Families of three-dimensional phase portraits in dynamics of a rigid body

М. В. Шамолин

1. Современное состояние изучения проблемы движения твердого тела в сопротивляющейся среде полностью опирается на развивающийся математический аппарат и возможные модельные ограничения в задаче. Например, известная задача Кирхгофа о движении твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости, покоящейся на бесконечности и совершающей безвихревое движение [1], затрагивает лишь один аспект рассмотрения проблемы. Он связан с вопросами интегрируемости соответствующих динамических систем (в данном случае с существованием полного набора аналитических и мероморфных первых интегралов).

Нетрудно заметить, что задача Кирхгофа является одним из первых «приближений» в описании явления взаимодействия тела со средой, поскольку при введении сколь угодно малой вязкости динамические системы Кирхгофа перестают быть консервативными, и в фазовых пространствах полученных систем появляются асимптотические предельные множества по причине того, что системы становятся диссипативными «в целом». Поэтому ни о каком полном наборе даже непрерывных первых интегралов утверждать не приходится [2].

В связи с этим укажем на другой аспект рассмотрения проблемы, а именно, на полный качественный анализ динамических систем (топология разбиения фазовых пространств на траектории). Последнему аспекту и посвящена настоящая работа.

2. Выделим задачу о пространственном движении динамически симметричного твердого тела при условии, что линия действия силы $\boldsymbol{S}$, приложенной к телу со стороны среды, не меняет своей ориентации относительно тела, часть поверхности которого имеет форму плоского диска, обтекаемого средой [3] по законам струйного обтекания [4,5]. Сила **S** направлена по нормали к диску и квадратична по скорости центра диска. Предполагается, что сила тяжести, действующая на тело, пренебрежимо мала по сравнению с силой сопротивления со стороны среды.

Выбор шести динамических фазовых переменных - v, α, β - сферических координат конца вектора скорости центра диска, p, q, r - компонент абсолютной угловой скорости тела в связанной системе координат – позволяет рассматривать систему динамических уравнений шестого порядка в качестве независимой. Более того, поскольку сила сопротивления допускает группу вращения тела вокруг оси динамической симметрии (проходящей через центр масс и центр диска), сохраняется компонента продольной составляющей угловой скорости: $p = p_0 = const$ [3,6].

3. Динамические уравнения движения. Если *(A,B,B)* – главные моменты инерции тела, m – его масса, σ - расстояние от центра масс до диска, $z_1 = q\cos\beta + r\sin\beta, z_2 = r\cos\beta - q\sin\beta,$ $z_i = Z_i v, i = 1,2, \alpha^\bullet = \alpha' v, \quad \beta^\bullet = \beta' v, v^\bullet = v'v$, то в случае отсутствия собственного вращения $(p_0 = 0)$ динамические уравнения движения примут следующий вид:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \tag{1}$$

$$\alpha' = -Z_2 + \sigma(Z_1^2 + Z_2^2)\sin\alpha + \frac{\sigma}{B}F(\alpha)\cos\alpha + \frac{s(\alpha)}{m}\sin\alpha, \tag{2}$$

$$Z_2' = \frac{1}{B}F(\alpha) - Z_2\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) - Z_1^2 ctg\alpha, \tag{3}$$

$$Z_1' = -Z_1\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) + Z_1 Z_2 ctg\alpha, \tag{4}$$

$$\beta' = Z_1 ctg\alpha,$$

где $\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) = -\sigma(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha + \frac{\sigma}{B}F(\alpha)\sin\alpha - \frac{s(\alpha)}{m}\cos\alpha$, $F(\alpha), s(\alpha)$ - пара динамических функций, для определения которых используется экспериментальная информация о свойствах струйного обтекания [7]. Типичными представителями классов функций $\{F\}$ и $\{s\}$ являются функции

$$F_0(\alpha) = A'B'\sin\alpha\cos\alpha,\; s_0(\alpha) = B'\cos\alpha\; (A', B' > 0). \qquad \textbf{(5)}$$

Уравнения (1)-(4) образуют замкнутую подсистему четвертого, а уравнения (2)-(4) – третьего порядка.

При некоторых естественных условиях система (1)-(4) при условии (5) отражает основные топологические особенности разбиения на траектории общей системы (1)-(4). Кроме того, векторные поля общей системы и системы (1)-(4) при условии (5) топологически эквивалентны.

4. Точки покоя систем. В фазовом пространстве системы (2)-(4) точки покоя могут являться проекциями неособых фазовых траекторий четырехмерного фазового пространства системы (1)-(4). Действительно, у системы (1)-(4) существуют положения равновесия, которые заполняют одномерные многообразия. Поэтому вопрос о точках покоя разбивается на два: для системы (1)-(4) в четырехмерном фазовом пространстве и для укороченной системы (2)-(4) в фазовом пространстве $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \Re^3 : 0 < \alpha < \pi,\, Z_1 > 0\}$.

Точки покоя системы (1)-(4) будут заданы следующими соотношениями с параметром v_1:

$$\alpha = \frac{\pi}{2},\; \left(Z_2 - \frac{1}{2\sigma}\right)^2 + Z_1^2 = \frac{1}{4\sigma^2},\; v = v_1. \qquad \textbf{(6)}$$

Система (6) задает в четырехмерном фазовом пространстве системы (1)-(4) двумерное многообразие (круговой цилиндр), сплошь заполненный точками покоя.

У системы (2)-(4) существуют точки покоя в пространстве $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \Re^3 : 0 \le \alpha \le \pi,\, Z_1 \ge 0\}$, которые задаются соотношениями

$$\alpha = \pi k,\; k \in \{0,1\},\; Z_1 = Z_2 = 0, \qquad \textbf{(7)}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2},\; \left(Z_2 - \frac{1}{2\sigma}\right)^2 + Z_1^2 = \frac{1}{4\sigma^2}. \qquad \textbf{(8)}$$

Система (8) и только она задает в фазовом пространстве точки покоя, в которые проектируются многообразия точек покоя системы (1)-(4).

Ввиду простоты механической интерпретации стационарных движений, соответствующих точкам покоя (7), (8), последние будем называть явными положениями равновесия (ЯПР).

Определение 1. *Неявными положениями равновесия (НПР) системы (2)-(4) будем называть точки покоя, не лежащие на плоскостях*

$$\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \Re^3 : Z_2 \sin\alpha \cos\alpha = 0\}.$$

5. Неявные положения равновесия. Введем обозначение $n_0^2 = \dfrac{F'(0)}{B}$. Для простоты рассмотрим систему (2)-(4) при условии (5). Необходимым и достаточным условием существования НПР (не лежащих на интегральной плоскости $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \Re^3 : Z_1 = 0\}$, на которую «укладывается» фазовый портрет соответствующей системы из плоской динамики [7,8]) является выражение НПР системой

$$Z_2 = \frac{\sigma n_0^2}{2}\sin\alpha,\ Z_1^2 = n_0^2\left[1 - \frac{\sigma^2 n_0^2}{4}\right]\sin^2\alpha,\ \sigma n_0 < 2,\ \cos\alpha = -\frac{\sigma n_0^2 m}{2s(0)},$$

причем при $\sigma n_0 > 2$ НПР «спускаются» на интегральную плоскость $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \Re^3 : Z_1 = 0\}$ [7,8].

6. Классификация точек покоя системы и ее симметрии. Введем два безразмерных параметра: $\mu_1 = 2\dfrac{s(0)}{mn_0}$, $\mu_2 = \sigma n_0$.

Предложение 1. *1) Точки покоя, заполняющие окружность (8) при* $Z_2 < \dfrac{1}{2\sigma}$, *в каждой перпендикулярной к окружности площадке являются седлами (рис. 1), а при* $Z_2 > \dfrac{1}{2\sigma}$ *- являются притягивающими.*

2) Точка покоя (7) при k = 0 является отталкивающей.

3) Точка покоя (7) при k = 1 является: отталкивающей, если $\mu_2 < \mu_1$ *и притягивающей, если* $\mu_2 > \mu_1$.

Векторное поле системы (2)-(4) обладает свойством центральной симметрии относительно точек $(\pi k, 0, 0)$, т. е. в координатах (α, Z_1, Z_2) векторное поле меняет направление при замене

$$\begin{pmatrix} \pi k+\alpha \\ Z_1, Z_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \pi k-\alpha \\ -Z_1, -Z_2 \end{pmatrix}, k \in \{0, 1\}.$$

Более того, плоскость $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \Re^3 : Z_1 = 0\}$ является интегральной, а векторное поле системы обладает следующей симметрией: $\alpha-$ и Z_2-составляющие сохраняются, а Z_1-составляющая меняет знак при замене

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ Z_1, Z_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha \\ -Z_1, Z_2 \end{pmatrix}, k \in \{0, 1\}.$$

Для дальнейшего анализа введем определения семейства слоев $\Pi_{(\alpha_1,\alpha_2)} = \{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \Re^3 : \alpha_1 < \alpha < \alpha_2\}$, при этом $\Pi_{\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)} = \Pi$, $\Pi_{\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)} = \Pi'$. Заметим, что фактически фазовым пространством системы (2)-(4) является слой $\Pi_{(0,\pi)}$.

7. Введение в классификацию фазовых портретов. Изучим те динамические системы вида (2)-(4), при которых НПР существуют лишь вне плоскости $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \Re^3 : Z_1 = 0\}$. В общем пространстве физических параметров в основном будем изучать лишь область

$$\left\{(\mu_1, \mu_2) \in \Re^2 : \frac{s(\alpha)}{m\cos\alpha} \geq \frac{\sigma F(\alpha)}{B\sin\alpha}, \forall \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \sigma n_0 < 2\right\}. \qquad \textbf{(9)}$$

Типичная топологическая классификация ЯПР была приведена выше. Для проведения полной классификации фазовых портретов приведем ряд утверждений, решающих многие актуальные вопросы качественного характера.

Предложение 2. *У системы (2)-(4) существуют и единственны траектории, уходящие на бесконечность. $\alpha-$ и $\omega-$предельными их множествами являются бесконечно удаленные точ-*

ки $(+0,+\infty,+\infty)$ *вне интегральной плоскости* $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \Re^3 : Z_1 = 0\}$ *и* $(+0,0,+\infty)$ *на ней.*

Предложение 3. *У систем вида (2)-(4) в области параметров (9) не существует замкнутых характеристик.*

Основным вопросом классификации (трехмерных) портретов является вопрос о поведении устойчивых и неустойчивых сепаратрис имеющихся (в данном случае неизолированных и негиперболических) седел.

Предложение 4. *1) Устойчивые сепаратрисы в слое* Π *для точек (8) при* $Z_2 < \dfrac{1}{2\sigma}$ *имеют в качестве* $\alpha-$*предельных множеств начало координат (рис. 2).*

2) В области параметров (9) сепаратрисы, входящие в точки (8) при $Z_2 < \dfrac{1}{2\sigma}$ *в слое* Π', *имеют в качестве* $\alpha-$*предельного множества точку* $(\pi,0,0)$ *(рис. 2).*

8. Основная теорема классификации. Рассмотрим вопрос о поведении сепаратрис, выходящих из точек (8) при $Z_2 < \dfrac{1}{2\sigma}$. Для этого дадим (аналогично [7,8]) определение индексу сепаратрисного поведения (ИСП) для данной системы.

Определение 2. *ИСП (будем обозначать его isp) называется число* $I \in N_0 \cup \left\{ l + \dfrac{1}{4}, l \in N_0 \right\}$. *По определению isp = I, если существуют сепаратрисы, выходящие из точек (8) при* $Z_2 < \dfrac{1}{2\sigma}$ *в слой* Π, *которые имеют в качестве* $\omega-$*предельного множества точки (8) при* $Z_2 > \dfrac{1}{2\sigma}$ *(*$I \in N_0$*) или бесконечно удаленную точку (*$I \in \left\{ l + \dfrac{1}{4}, l \in N_0 \right\}$*). При этом сепаратрисы огибают окружность (8) и уходят в область* $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \Re^3 : Z_2 < 0\}$ l *раз. При этом таких сепа-*

ратрис, огибающих окружность (8) и уходящих в область $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \Re^3 : Z_2 < 0\}$ *l+1 раз, не существует.*

Теорема классификации. *Для любого isp из области определения существует точка из пространства параметров системы (2)-(4), для которой в фазовом пространстве системы реализуется поведение рассматриваемых сепаратрис, в соответствии с определением 2.*

9. Классификация некоторого множества трехмерных фазовых портретов. В силу основной теоремы, можно провести полную классификацию фазовых портретов системы (2)-(4), когда ее параметры пробегают область (9). Таких топологически неэквивалентных портретов существует бесконечно много.

Для проведения полной классификации портретов остается исследовать сепаратрисы, выходящие из точек (8) при $Z_2 < \dfrac{1}{2\sigma}$ в слой Π'. Такие сепаратрисы могут иметь предельные множества из НПР. Положение равновесия (НПР) в полупространстве $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \Re^3 : Z_1 > 0\}$ имеет седловой тип с одним притягивающим собственным направлением и двумя отталкивающими. Одна устойчивая ветвь (данного НПР) имеет в качестве $\alpha-$предельного множества точку $(\pi, 0, 0)$. Неустойчивые же направления, на которые «натягивается» целая плоскость, имеют в качестве предельных множеств притягивающие точки (8) при $Z_2 > \dfrac{1}{2\sigma}$, а также бесконечно удаленную точку (см. предложение 2).

Топологические же типы трехмерных фазовых портретов «кодирует» индекс *isp*, который «отвечает» за сепаратрисные поверхности «вдали» от НПР.

10. Примеры трехмерных фазовых портретов. На рис. 3-4 изображены некоторые фрагменты фазовых портретов системы (2)-(4), которые, вообще говоря, являются топологически неэквивалентными (рис. 3: *isp = 0,* рис. 4: *isp = 2*).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика. М.: Физматгиз, 1947. – 928 с.
2. Шамолин М.В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. – 1998. - Т. 53. - Вып.3. - С. 209-210.
3. Шамолин М.В. Об интегрируемом случае в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Известия РАН. МТТ. – 1997. - № 2. - С. 65-68.
4. Чаплыгин С.А. Избранные труды. М.: Наука, 1976. – 495 с.
5. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. – 322 с.
6. Шамолин М.В. Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Доклады РАН. - 1999. - Т. 364. - № 5. - С. 627-629.
7. Шамолин М.В. Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика. – 1996. - № 4. - С. 57-69.
8. Шамолин М.В. Новое двупараметрическое семейство фазовых портретов в задаче о движении тела в среде // Доклады РАН. - 1994. - Т. 337. - № 5. - С. 611-614.

УДК 531.01+531.552+517.925 ***механика***

Новое семейство фазовых портретов в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой

М. В. Шамолин

Работа посвящена исследованию пространственного свободного торможения твердого тела в сопротивляющейся среде при условиях струйного обтекания. Получены некоторые классы частных решений полной системы в динамическом пространстве, подготовлена качественная методика исследования общих диссипативных систем, возникающих в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой. Получено новое двухпараметрическое семейство трехмерных фазовых портретов в пространстве квазискоростей. Данное семейство обладает еще более нетривиальными качественными нелинейными свойствами, характерными лишь для многомерных систем.

Maxim V. Shamolin,

New family of phase portraits in 3D dynamics of a rigid body interacting with a medium.