Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Воронежский государственный университет
Математический институт имени В.А. Стеклова
Российской академии наук
Вычислительный центр имени А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

**Материалы
Международной конференции,
посвященной 90-летию
Владимира Александровича Ильина**

**ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ — XXIX
(2–6 мая 2018 г.)**

Москва
Издательство МАКС-Пресс
2018

УДК 517.53(97; 98)
ББК 22.16
С56

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 18–01–20013

С56 **Современные методы теории краевых задач** : материалы международной конференции «Понтрягинские чтения — XXIX», посвященной 90-летию Владимира Александровича Ильина (2–6 мая 2018 г.) / Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова; Воронежский государственный университет; Математический институт имени В.А. Стеклова РАН; Вычислительный центр имени А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН. — Москва: Издательство МАКС-Пресс, 2018. — 282 с.

ISBN 978-5-9273-2453–8

В сборнике представлены материалы докладов и лекций, включенных в программу Международной конференции «Понтрягинские чтения — XXIX», посвященной 90-летию Владимира Александровича Ильина. Основные направления конференции: теория функций и функциональный анализ, спектральная теория дифференциальных операторов, уравнения математической физики и краевые задачи, оптимальное граничное управление.

УДК 517.53(97; 98)
ББК 22.16

ISBN 978-5-9273-2453–8

Теорема 1. *Если*

$$a)\ \ \Delta_{12}=0,\Delta_{13}=0,\Delta_{14}+\Delta_{32}=0,\Delta_{12}+\Delta_{34}\neq 0;$$
$$b)\ \ \overline{\Delta}_{12}=e^{i\theta}\Delta_{12},\ \ \overline{\Delta}_{34}=e^{i\theta}\Delta_{34},\ \ \overline{\Delta}_{14}=-e^{i\theta}\Delta_{14},$$

где $e^{i\theta}=(\overline{\Delta_{12}+\Delta_{34}}):(\Delta_{12}+\Delta_{34})$, *и*

$$\Delta_{ij}=a_{1i}a_{2j}-a_{2i}a_{1j}\quad (i,j=1,2,3,4) \tag{5}$$

то оператор Штурма-Лиувилля (1)-(2) вольтерров, оператор SL *имеет полную и ортогональную систему собственных векторов в пространстве* H, $(SL)^{-1}$ *самосопряжен и компактен, а его след вычисляется по формуле*

$$tr(SL)^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}=\int_0^1 G(x,1-x)dx=-\frac{1}{4}.$$

где $G(x,t)$ *— ядро функция Грина оператора Штурма-Лиувилля, т.е. является ядром обратного оператора* $(L)^{-1}$.

Литература

1. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. — М.: Наука, 1969. — 528 с.

ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НЕКОТОРОЙ ОДНОФАЗНОЙ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

М.В. Шамолин (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
shamolin@rambler.ru

Ключевые слова: *эллиптический оператор, однофазная задача, локальная разрешимость*

Рассматривается следующая однофазная задача со свободной границей. Необходимо найти функцию $u(x,t)$ и гладкое однопараметрическое семейство гиперповерхностей $\Sigma=\bigcup_{t\in(0,T]}(\Sigma(t)\times\{t\})$, удовлетворяющие следующей краевой задаче (см. также [1, 2, 3]): $Au=f(x,t)$, $x\in\Omega(t)$, $u=g(x,t)$, $x\in\partial\Omega(t)$, $v_n=-\left(\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)$, $x\in\Sigma(t)$, где A — эллиптический оператор второго порядка с гладкими коэффициентами: $A=\partial_i(a_{ij}\partial_j)+b_j\partial_j$, (a_{ij}) — симметричная положительно определенная матрица, удовлетворяющая условию эллиптичности:

$$\sum_{ij}a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant|\xi^2|,\quad \xi\in\mathbf{R}^N,$$

и b_j — гладкие коэффициенты.

Доказывается ее локальная разрешимость (по времени), при этом разрабатываемый общий метод применяется в более конкретном случае. При этом вводятся новая замена переменных, параметризация границы, и исследуемая задача сводится к задаче в постоянной области.

Литература

1. Радкевич Е.В. Об асимптотическом решении системы фазового поля / Е. В. Радкевич // Дифференциальные уравнения. — 1993. — Т. 29, вып. 3. — С. 487–500.

2. N. Yu. Selivanova, M. V. Shamolin, Local solvability of a one-phase problem with free boundary, J. Math. Sci., 189:2 (2013), 274–283.

3. N. Yu. Selivanova, M. V. Shamolin, Local solvability of the Capillary problem, J. Math. Sci., 189:2 (2013), 294–300.

ОБ ОДНОЗНАЧНОМ ПРОДОЛЖЕНИИ РОСТКОВ РЕШЕНИЙ СЛАБО НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Н.А. Шананин (Москва, ГУУ)

nashananin@inbox.ru

Ключевые слова: *слабо нелинейные уравнения, ростки решений*

Пусть Ω — открытое множество в $\mathcal{R}^n$, X_1 и X_2 - линейно независимые в каждой точке Ω векторные поля с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, удовлетворяющие условию инволютивности. Предположим, что функция $f(x, u)$ обладает свойством Каратеодори, $f(x, 0) \in L_2(\Omega)$ и для любых компакта $K \subset \mathcal{C}$ и ограниченного открытого множества G, содержащегося в Ω вместе с замыканием, найдется константа $C = C(K, G)$, с которой для всех u^1 и $u^2 \in K$ и почти всех $x \in G$ выполняется липшицева оценка: $|f(x, u^1) - f(x, u^2)| \leqslant C|u^1 - u^2|$. Пусть Γ — непрерывная кривая, содержащаяся в Ω. Мы говорим, что функция $u(x)$ *удовлетворяет вдоль* Γ слабо нелинейному уравнению:

$$(X_1 + iX_2)u = f(x, u),$$

если $u(x)$ определена в некоторой открытой окрестности U кривой Γ, принадлежит пространству $L_{\infty,\mathrm{loc}}(U)$ и удовлетворяет уравнению в U в слабом смысле. Говорят, что ростки функций $u^1(x)$ и $u^2(x) \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\Omega)$ равны в x^0 и пишут $u^1_{x^0} \cong u^2_{x^0}$, если существует открытая окрестность V этой точки, в которой $u^1(x) = u^2(x)$.

Теорема 1. *Пусть непрерывная кривая* Γ *содержится в одном из интегральных многообразий распределения, порожденного* X_1 *и*