Об одном интегрируемом случае в динамике пространственного движения тела в сопротивляющейся среде

М. В. Шамолин

Результаты предлагаемой работы появились благодаря исследованию некоторой задачи о движении твердого тела в среде с сопротивлением [1, 2], где пришлось иметь дело с первыми интегралами динамических систем, обладающими нестандартными свойствами. А именно, интегралы не являлись ни аналитическими, ни гладкими, а на некоторых множествах они были даже разрывными. При этом они выражались через конечную комбинацию элементарных функций. Последние обстоятельства, тем не менее, позволили-таки провести полный анализ всех фазовых траекторий и указать на те их свойства, который обладали «грубостью» и сохранялись для систем более общего вида, которые обладали некоторыми нетривиальными симметриями скрытого типа. Поэтому представляет интерес исследование достаточно широких классов систем, обладающих аналогичными свойствами, в частности, взятыми из динамики твердого тела, взаимодействующего со средой. В частности, будут предъявлены новые случаи интегрируемости в задаче о пространственном движении твердого тела в сопротивляющейся среде.

1. Системы с симметриями и переменной диссипацией с нулевым средним. Изучаются системы обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих, по крайней мере, одну периодическую фазовую координату. Исследуемые системы обладают такими свойствами симметрии, при которых в среднем за период по периодической координате сохраняется их фазовый объем. Так, например, маятниковая система с гладкой и периодической правой частью $\alpha^{\bullet} = -\omega + f(\alpha)$, $\omega^{\bullet} = g(\alpha)$, $f, g(\alpha + T) = f, g(\alpha)$, в некоторой части фазового цилиндра сохраняет площадь с переменной плотностью за период T и эквивалентна уравнению маятника $\alpha^{\bullet\bullet} - f'(\alpha)\alpha^{\bullet} + g(\alpha) = 0$, для которого интеграл от коэффициента $f'(\alpha)$ при диссипативном члене $\alpha^{\bullet}$ в среднем за период равен нулю. Данная система имеет такие симметрии, при которых она становится системой с переменной диссипацией с нулевым средним в смысле следующего определения.

Определение 1. Рассмотрим гладкую автономную систему n + 1 порядка нормального вида, заданную на многомерном цилиндре $R^n\{x\} \times S^1\{\alpha \bmod T\}$, где α — периодическая координата периода $T > 0$. Дивергенцию правой части (которая, вообще говоря, является функцией всех фазовых переменных и не равна тождественно нулю) данной системы обозначим через $div(x, \alpha)$. Назовем такую систему системой с переменной диссипацией с нулевым (ненулевым) средним, если функция $\int_0^T div(x,\alpha)d\alpha$ равна (не равна) тождественно нулю. При этом в некоторых случаях (например, когда в отдельных точках окружности $S^1\{\alpha \bmod T\}$ возникают особенности) интеграл понимается в смысле главного значения.

Рассмотрим далее системы следующего вида:

$$\alpha^{\bullet} = f_\alpha(\omega, \sin\alpha, \cos\alpha),\ \omega_k^{\bullet} = f_k(\omega, \sin\alpha, \cos\alpha),\ k = 1,\ldots,n, \qquad (1)$$

заданные на множестве $S^1\{\alpha \bmod T\}\setminus K \times R^n\{\omega\}$, $\omega = (\omega_1,\ldots,\omega_n)$, где функции $f_\lambda(u_1,u_2,u_3)$, $\lambda = \alpha,1,\ldots,n$, трех переменных u_1,u_2,u_3 таковы:

$$f_\lambda(-u_1,-u_2,u_3) = -f_\lambda(u_1,u_2,u_3),\ f_\alpha(u_1,u_2,-u_3) = f_\alpha(u_1,u_2,u_3),\ f_k(u_1,u_2,-u_3) = -f_k(u_1,u_2,u_3).$$

Множество K или пусто, или состоит из конечного числа точек окружности $S^1\{\alpha \bmod T\}$.

Последние две переменные u_2,u_3 в функциях $f_\lambda(u_1,u_2,u_3)$ зависят от одного параметра α, но они выделены в разные группы по следующим причинам. Во-первых, не во всей области определения они однозначно выражаются друг относительно друга, а, во-вторых, первая из них нечетная, а вторая — четная функции α, что по-разному влияет на симметрии рассматриваемой системы (1). Ей поставим в соответствие следующую неавтономную систему $\dfrac{d\omega_k}{d\alpha} = \dfrac{f_k(\omega,\sin\alpha,\cos\alpha)}{f_\alpha(\omega,\sin\alpha,\cos\alpha)}$, подстановкой $\tau = \sin\alpha$ приводимую к виду

$$\frac{d\omega_k}{d\tau} = \frac{f_k(\omega,\tau,\varphi_k(\tau))}{f_\alpha(\omega,\tau,\varphi_\alpha(\tau))},\ \varphi_\lambda(-\tau) = \varphi_\lambda(\tau),\ \lambda = \alpha,1,\ldots,n. \qquad (2)$$

Система (2) может иметь, в частности, алгебраическую правую часть, что поможет искать ее первые интегралы в явном виде.

Следующее предложение позволяет рассматривать только что введенный класс систем как подкласс систем с переменной диссипацией.

Предложение 1. Системы вида (1) являются динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним.

Обратное, конечно же, неверно.

Далее в работе будет затронут случай, когда функции $f_\lambda(\omega,\tau,\varphi_k(\tau))$ ($\lambda = \alpha,1,\ldots,n$) — полиномы по ω,τ.

2. Системы из пространственной динамики твердого тела, взаимодействующего со средой. *2.1. Движение твердого тела в сопротивляющейся среде под действием следящей силы и линейного демпфирования со стороны среды.* Ранее автором было рассмотрено пространственное движение однородного осесимметричного твердого тела массы m с передним круглым торцом в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности [1, 2]. Пусть (v,α,β) — сферические координаты некоторой характерной точки твердого тела, $\{\Omega_x,\Omega_y,\Omega_x\}$ — компоненты его угловой скорости, I_1, I_2, I_2 — главные моменты инерции в некоторой системе координат, связанной с телом. Если же рассматривается более общая задача о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии некоторой следящей силы, проходящей через ось симметрии, и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства v = const, то при $\Omega_x \equiv 0$ динамическая часть уравнений движения приведется к системе четвертого порядка. Действительно, если принять $z_1 = \Omega_y \cos\beta + \Omega_z \sin\beta$, $z_2 = -\Omega_y \sin\beta + \Omega_z \cos\beta$ и ввести безразмерные переменные w_k, $k = 1{,}2$, и параметры по формулам $h_1 = hB$, $\sigma h_1 / I_2 = H_1$, $b = \sigma^2 AB / I_2$, $\sigma z_k = v w_k$ (при этом $\alpha^{\bullet} = v\alpha' / \sigma$ и т.д.), получаем следующую динамическую систему четвертого порядка:

$$
\begin{aligned}
&\alpha' = -(1+H_1)w_2 + b\sin\alpha,\\
&w_2' = b\sin\alpha\cos\alpha - (1+H_1)w_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1 w_2 \cos\alpha,\\
&w_1' = (1+H_1)w_1 w_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1 w_1 \cos\alpha,
\end{aligned} \tag{3}
$$

$$
\beta' = (1+H_1)w_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{4}
$$

в которой имеется независимая подсистема третьего порядка (3).

При $b = H_1$ дивергенция правой части системы (3) ((3), (4)) после замены переменных $w_1^* = \ln|w_1|$ тождественно равна нулю, что позволяет считать данную систему (системы) консервативной (консервативными).

Теорема 1. Система (3), (4) обладает полным набором первых интегралов, являющихся элементарными трансцендентными функциями своих фазовых переменных. Два из них образуют полный набор первых интегралов системы (4).

Замечание. Вообще говоря, проинтегрированная система (3) рассматривается в трехмерной области $S^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \setminus \{\alpha = 0, \alpha = \pi\} \times R^2\{w_1, w_2\}$ (такая система приводится к эквивалентной себе системе на касательном расслоении $T_* S^2$ к двумерной сфере S^2 [3, 4]). С точки зрения теории элементарных функций, полученные первые интегралы являются трансцендентными (т.е. не алгебраическими). В данном же случае трансцендентность понимается в смысле теории функций комплексного переменного, когда у функции, после ее формального продолжения в комплексную область, имеются существенно особые точки, соответствующие притягивающим и отталкивающим предельным множествам рассматриваемой динамической системы.

Таким образом, система (3), (4) является системой с переменной диссипацией с нулевым средним, она обладает тремя первыми интегралами (т.е. полным списком), являющимися трансцендентными функциями и выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций. Последние свойства и стали для нее возможными после сопоставления ей (вообще говоря, неавтономной) системы уравнений с алгебраической (полиномиальной) правой частью (подобно (2)).

2.2. Движение твердого тела с постоянной скоростью центра масс в сопротивляющейся среде. Рассмотрим пространственное движение однородного осесимметричного твердого тела массы m с передним круглым торцом в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности [1, 2]. Пусть (v,α,β) — сферические координаты характерной точки твердого тела, $\{\Omega_x,\Omega_y,\Omega_x\}$ — компоненты его угловой скорости, I_1, I_2, I_2 — главные моменты инерции в некоторой системе координат, связанной с телом. Если же рассматривается более общая задача о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии некоторой следящей силы, проходящей через ось симметрии, и обеспечивающей во все время движения постоянство величины скорости центра масс, то при некоторых условиях в случае функций Чаплыгина воздействия среды [5, 6] динамическая часть уравнений движения приведется к системе, в которой произойдет отделение системы более низкого порядка.

Действительно, выбор фазовых переменных позволяет рассматривать систему динамических уравнений шестого порядка в качестве независимой. Более того, сохраняется компонента продольной составляющей угловой скорости: $\Omega_x = \Omega_{x0} = \mathrm{const}$. Ограничимся далее движением тела без собственного вращения, т.е. когда $\Omega_{x0} = 0$.

Введем следующие обозначения: $z_1 = \Omega_y \cos\beta + \Omega_z \sin\beta$, $z_2 = -\Omega_y \sin\beta + \Omega_z \cos\beta$, $z_i = Z_i v,\ i = 1, 2$, $\alpha^\bullet = \alpha' v$, $\beta^\bullet = \beta' v,\ v^\bullet = v' v$, $n_0^2 = AB / I_2$, $b = \sigma n_0$ (также введем новое дифференцирование «’» $\to$ n_0«’»). Тогда система преобразовывается к следующему виду:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \tag{5}$$

$$\begin{gathered}\alpha' = -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha, \\ Z_2' = \sin\alpha\cos\alpha + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha - bZ_2\sin^2\alpha\cos\alpha - Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ Z_1' = bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha - bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha + Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\end{gathered} \tag{6}$$

$$\beta' = Z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{7}$$

$$\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) = -b(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha + b\sin^2\alpha\cos\alpha,\ n_0^2 = AB / I_2 .$$

Поскольку мы рассматриваем такой класс движений тела, при котором постоянна величина скорости центра масс, то система (5)–(7) пятого порядка имеет аналитический первый интеграл следующего вида:

$$v^2(1 - 2bZ_2\sin\alpha + b^2(Z_1^2 + Z_2^2)) = V_{C0}^2 . \tag{8}$$

Видно, что соотношение (8) позволяет рассматривать вопросы интегрируемости в элементарных функциях системы (6), (7) уже четвертого порядка, в котором выделилась система третьего порядка (6).

Применяя часто используемую подстановку $\tau = \sin\alpha$, систему (6) можно привести к следующей системе с алгебраическими правыми частями (подобно (2)):

$$\begin{aligned} \frac{dZ_2}{d\tau} &= \frac{\tau + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2) - bZ_2\tau^2 - Z_1^2/\tau}{-Z_2 + b\tau(Z_1^2 + Z_2^2) + b\tau(1-\tau^2)}, \\ \frac{dZ_2}{d\tau} &= \frac{bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2) - bZ_1\tau^2 + Z_1Z_2/\tau}{-Z_2 + b\tau(Z_1^2 + Z_2^2) + b\tau(1-\tau^2)}. \end{aligned} \tag{9}$$

Произведем переход к однородным координатам u_k, $k = 1, 2$, по формулам $Z_k = u_k\tau$. Тогда система (9) приведется к виду

$$\begin{cases} \tau \dfrac{du_2}{d\tau} = \dfrac{1 - bu_2 + u_2^2 - u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1-\tau^2)}, \\ \tau \dfrac{du_1}{d\tau} = \dfrac{2u_1u_2 - bu_1}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1-\tau^2)}. \end{cases} \tag{10}$$

Системе (10) можно сопоставить автономное уравнение первого порядка, которое интегрируется в элементарных функциях и позволяет получить явный вид трансцендентного первого интеграла исследуемой системы:

$$\frac{Z_1^2 + Z_2^2 - bZ_2\sin\alpha + \sin^2\alpha}{Z_1\sin\alpha} = C_1 = \text{const}. \tag{11}$$

Теперь, пользуясь найденным первым интегралом (11), перепишем первое уравнение системы (10) в следующем виде:

$$\tau\frac{du_2}{d\tau} = \frac{2 - 2bu_2 + 2u_2^2 - \tilde{N}_1U_1(C_1, u_2)}{-u_2 + b - 2b\tau^2 + b\tau^2(C_1U_1(C_1, u_2) + bu_2)}, \tag{12}$$

$$U_1(C_1, u_2) = \{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + 1)}\}/2 ,$$

или в виде уравнения Бернулли:

$$\frac{d\tau}{du_2} = \frac{(b-u_2)\tau + b\tau^3(C_1U_1(C_1,u_2)+bu_2-2)}{2-2bu_2+2u_2^2-\tilde{N}_1U_1(C_1,u_2)}. \tag{13}$$

Уравнение (13) (при помощи (12)) легко приводится к линейному неоднородному уравнению:

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2(u_2-b)p-2b(C_1U_1(C_1,u_2)+bu_2-2)}{2-2bu_2+2u_2^2-\tilde{N}_1U_1(C_1,u_2)},\ p=\frac{1}{\tau^2}. \tag{14}$$

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде (т.е. через конечную комбинацию квадратур). При этом общее решение уравнения (14) зависит от произвольной постоянной C_2.

Для поиска последнего дополнительного первого интеграла системы (6), (7) (т.е. интеграла, привязывающего уравнение (7) на угол β) заметим, что, поскольку

$$\frac{d\beta}{d\tau} = \frac{Z_1/\tau}{-Z_2+b\tau(Z_1^2+Z_2^2)+b\tau(1-\tau^2)},$$

то к равенству

$$\frac{d\beta}{d\tau} = \frac{u_1}{-u_2\tau+b\tau^3(u_1^2+u_2^2)+b\tau(1-\tau^2)}, \tag{15}$$

добавим также равенство

$$\tau\frac{du_1}{d\tau} = \frac{2u_1u_2-bu_1}{-u_2+b\tau^2(u_1^2+u_2^2)+b(1-\tau^2)}, \tag{16}$$

взятое из системы (10).

Полученная система (15), (16) позволяет выписать уравнение для получения искомого интеграла: $\dfrac{du_1}{d\beta} = 2u_2 - b$, которое легко интегрируется:

$$\cos^2[2(\beta+C_3)] = \frac{\left(u_2-\dfrac{b}{2}\right)^2 u_1^2}{G'}, \tag{17}$$

где $G' = [u_2^2-bu_2]^2 + 2[u_2^2-bu_2][u_1^2+1]+[u_1^2+1]^2+b^2u_1^2$.

В частности, если $b=2$, то равенство (17) примет вид:

$$\cos^2[2(\beta+C_3)] = \frac{(Z_2-\sin\alpha)Z_1}{(Z_2-\sin\alpha)^2+Z_1^2}.$$

Доказано следующее утверждение.

Теорема 2. Система (5)–(7) обладает полным набором первых интегралов, один из которых является аналитической функцией, а три других являются элементарными трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

В заключение отметим, что для поиска первых интегралов рассматриваемых систем хорошо бы привести системы вида (1) к системам (2) с полиномиальными правыми частями, от вида которых зависит возможность интегрирования в элементарных функциях исходной системы. Поэтому далее пойдем следующим путем: будем искать достаточные условия интегрируемости в элементарных функциях систем уравнений с полиномиальными правыми частями, исследуя при этом системы наиболее общего вида.

3. Системы на касательном расслоении к двумерной сфере. Каковы возможности интегрирования в элементарных функциях следующей системы более общего вида, включающей в себя рассмотренные выше системы, в трехмерных фазовых областях:

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{ax+by+cz+c_1z^2/x+c_2zy/x+c_3y^2/x}{dx+eux+fvx}, \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{gx+hy+iz+i_1z^2/x+i_2zy/x+i_3y^2/x}{dx+eux+fvx}, \end{cases} \tag{18}$$

имеющей особенность типа $1/x$?

Вводя, как и ранее, подстановки $y=ux$, $z=vx$, получим, что система (18) приводится к виду

$$\begin{cases} x\dfrac{dv}{dx}+v = \dfrac{ax+bux+cvx+c_1v^2x+c_2vux+c_3u^2x}{dx+eux+fvx}, \\ x\dfrac{du}{dx}+u = \dfrac{gx+hux+ivx+i_1v^2x+i_2vux+i_3u^2x}{dx+eux+fvx}, \end{cases}$$

которому сопоставим неавтономное уравнение

$$\frac{dv}{du} = \frac{a+bu+cv+c_1v^2+c_2vu+c_3u^2-v[d+eu+fv]}{g+hu+iv+i_1v^2+i_2vu+i_3u^2-u[d+eu+fv]}.$$

Для интегрирования в элементарных функциях последнего достаточно наложить 7 соотношений:

$$g=0,\ i_3=e,\ i_1=0,\ i=0,\ c_2=e,\ c=h,\ 2c_1=i_2+f. \tag{19}$$

Введем 8 параметров $\beta_1,\ldots,\beta_8$ и рассмотрим их в качестве независимых:

$$g=0,\ h=\beta_1,\ i=0,\ i_1=0,\ i_2=\beta_2,\ i_3=\beta_3,\ d=\beta_4,\ e=\beta_3,$$

$$f=\beta_5,\ a=\beta_6,\ b=\beta_7,\ c=\beta_1,\ c_1=\frac{\beta_2+\beta_5}{2},\ c_2=\beta_3,\ c_3=\beta_8.$$

Далее, интегрируя наше уравнение при условиях (19), в координатах (x,y,z) получаем первый интеграл системы в следующем виде:

$$\frac{(\beta_2-\beta_5)z^2/2-\beta_8 y^2+(\beta_1-\beta_4)zx+\beta_6 x^2}{yx}-\beta_7 \ln\left|\frac{y}{x}\right|=\text{const}.$$

Таким образом, можно сделать вывод об интегрируемости в элементарных функциях следующей, вообще говоря, неконсервативной системы, зависящей от 8 параметров:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\beta_6 x+\beta_7 y+\beta_1 z+(\beta_2-\beta_5)z^2/2x+\beta_3 zy/x+\beta_8 y^2/x}{\beta_4 x+\beta_3 y+\beta_5 z},\ \frac{dy}{dx}=\frac{\beta_1 y+\beta_2 zy/x+\beta_3 y^2/x}{\beta_4 x+\beta_3 y+\beta_5 z}.$$

Теорема 3. Следующая система, зависящая от 8 параметров, заданная на множестве $S^1\{\alpha \bmod 2\pi\}\setminus\{\alpha=0, \alpha=\pi\}\times R^2\{w_1, w_2\}$, обладает, вообще говоря, трансцендентным первым интегралом, выражающимся через элементарные функции:

$$\begin{cases} \alpha^{\bullet}=\beta_4 \sin\alpha+\beta_3 z_1+\beta_5 z_2, \\ z_2^{\bullet}=\beta_6 \sin\alpha\cos\alpha+\beta_7 z_1\cos\alpha+\beta_1 z_2\cos\alpha+\dfrac{\beta_2+\beta_5}{2}z_2^2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+ \\ \qquad +\beta_3 z_1 z_2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\beta_8 z_1^2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ z_1^{\bullet}=\beta_1 z_1\cos\alpha+\beta_2 z_1 z_2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\beta_3 z_1^2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \end{cases} \tag{20}$$

В частности, система (20) при $\beta_1=-H_1$, $\beta_2=1+H_1$, $\beta_3=\beta_7=0$, $\beta_4=b$, $\beta_6=b$, $\beta_5=\beta_8=-(1+H_1)$ приводится к системе (3).

8. Заключение. Поиск случаев полной интегрируемости, а тем более в элементарных функциях, — всегда сложная задача. Но в работе показано, что существует тесная связь трех, на первый взгляд, независимых свойств, но при этом достаточно гармонично сочетающихся на системах из динамики твердого тела:

- рассмотрение класса систем (1) с отмеченными симметриями;
- обладание данным классом систем переменной диссипацией с нулевым средним (по имеющейся периодической фазовой переменной), что позволяет такие системы рассматривать как «почти» консервативные системы;
- в некоторых случаях обладание ими полным набором, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 08-01-00231-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Изд–во «Экзамен», 2007. 352 с.
2. Шамолин М. В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фунд. и прикл. мат. 2008. Т. 14. Вып. 3. С. 3–237.
3. Шамолин М. В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998, Т. 53. Вып. 3, с. 209–210.
4. Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы // Успехи матем. наук. 2007, Т. 62. Вып. 5, с. 169–170.
5. Чаплыгин С.А. Избранные труды. М.: Наука, 1976. 495 с.
6. Чаплыгин С.А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // В кн. Полн. собр. соч. Т.1. Л.: Изд–во АН СССР, 1933. С. 133–135.

УДК 531.01+531.552

Новые случаи интегрируемости в пространственной динамике твердого тела

М. В. Шамолин

АВТОРЕФЕРАТ

Результаты предлагаемой работы появились благодаря исследованию некоторой задачи о движении твердого тела в среде с сопротивлением, где пришлось иметь дело с первыми интегралами динамических систем, обладающими нестандартными свойствами. А именно, интегралы не являлись ни аналитическими, ни гладкими, а на некоторых множествах они были даже разрывными. При этом они выражались через конечную комбинацию элементарных функций. Последние обстоятельства, тем не менее, позволили-таки провести полный анализ всех фазовых траекторий и указать на те их свойства, который обладали «грубостью» и сохранялись для систем более общего вида, которые обладали некоторыми нетривиальными симметриями скрытого типа. Поэтому представляет интерес исследование достаточно широких классов систем, обладающих аналогичными свойствами, в частности, взятыми из динамики твердого тела, взаимодействующего со средой. В частности, будут предъявлены новые случаи интегрируемости в задаче о пространственном движении твердого тела в сопротивляющейся среде.

Maxim V. Shamolin

New cases of integrability in the spatial dynamics of a rigid body