СИСТЕМЫ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ МНОГОМЕРНОЙ СФЕРЫ, ИНТЕГРИРУЕМЫЕ В ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЯХ

М. В. Шамолин

Институт механики МГУ имени М. В. Ломоносова

shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

Москва, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

Результаты предлагаемой работы являются развитием предыдущих исследований, в том числе, и некоторой прикладной задачи из динамики твердого тела, где были получены полные списки трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [1, 2].

Как известно, понятие интегрируемости достаточно расплывчатое. При его построении необходимо учитывать в каком смысле оно понимается, в классе каких функций ищутся первые интегралы и т.д. В данной работе принимается такой подход, который учитывает в качестве класса функций как первых интегралов трансцендентные функции, причем элементарные. Здесь трансцендентность понимается не в смысле теории элементарных функций, а в смысле наличия у них существенно особых точек (в силу классификации, принятой в теории функций комплексного переменного, когда функция имеет существенно особые точки) [3].

В [1] автором уже была показана полная интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде в условиях струйного обтекания, когда у системы динамических уравнений существует первый интеграл, являющийся трансцендентной функцией квазискоростей. Тогда предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластины. Позднее [2, 3] плоская задача была обобщена на пространственный (трехмерный) случай, при этом у системы динамических уравнений существует полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского (двумерного) диска. Далее [4], была исследована динамическая часть уравнений движения различных динамически симметричных четырехмерных твердых тел, где силовое поле сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму двумерного (трехмерного) диска, при этом силовое воздействие сосредоточено на двумерной плоскости (одномерной прямой), перпендикулярной данному диску [4, 5].

В данной работе результаты относятся к случаю, когда все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму $(n-1)$-мерного диска, при этом силовое воздействие сосредоточено в направлении, которое перпендикулярно данному диску. Данные результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде. При этом вводится дополнительная зависимость момента неконсервативной силы от угловой скорости.

Так, например, рассмотрим следующую систему уравнений порядка $2n-3$:

$$
\begin{aligned}
&\ddot{\xi}+b_*\dot{\xi}\cos\xi+\sin\xi\cos\xi-\\
&-\left[\dot{\eta_1}^2+\dot{\eta_2}^2\sin^2\eta_1+\dot{\eta_3}^2\sin^2\eta_1\sin^2\eta_2+\ldots+\dot{\eta}_{n-2}^2\sin^2\eta_1\ldots\sin^2\eta_{n-3}\right]\frac{\sin\xi}{\cos\xi}=0,\\
&\ddot{\eta_1}+b_*\dot{\eta_1}\cos\xi+\dot{\xi}\dot{\eta_1}\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi}-\\
&-\left[\dot{\eta_2}^2+\dot{\eta_3}^2\sin^2\eta_2+\dot{\eta_4}^2\sin^2\eta_2\sin^2\eta_3+\ldots+\dot{\eta}_{n-2}^2\sin^2\eta_2\ldots\sin^2\eta_{n-3}\right]\sin\eta_1\cos\eta_1=0,\\
&\ddot{\eta_2}+b_*\dot{\eta_2}\cos\xi+\dot{\xi}\dot{\eta_2}\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi}+2\dot{\eta_1}\dot{\eta_2}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}-\\
&-\left[\dot{\eta_3}^2+\dot{\eta_4}^2\sin^2\eta_3+\dot{\eta_5}^2\sin^2\eta_3\sin^2\eta_4+\ldots+\dot{\eta}_{n-2}^2\sin^2\eta_3\ldots\sin^2\eta_{n-3}\right]\sin\eta_2\cos\eta_2=0,\\
&\ddot{\eta_3}+b_*\dot{\eta_3}\cos\xi+\dot{\xi}\dot{\eta_3}\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi}+2\dot{\eta_1}\dot{\eta_3}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}+2\dot{\eta_2}\dot{\eta_3}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}-\\
&-\left[\dot{\eta_4}^2+\dot{\eta_5}^2\sin^2\eta_4+\dot{\eta_6}^2\sin^2\eta_4\sin^2\eta_5+\ldots+\dot{\eta}_{n-2}^2\sin^2\eta_3\ldots\sin^2\eta_{n-3}\right]\sin\eta_3\cos\eta_3=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ddot{\eta}_{n-4}+b_*\dot{\eta}_{n-4}\cos\xi+\dot{\xi}\dot{\eta}_{n-4}\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi}+2\dot{\eta_1}\dot{\eta}_{n-4}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}+\ldots+2\dot{\eta}_{n-5}\dot{\eta}_{n-4}\frac{\cos\eta_{n-5}}{\sin\eta_{n-5}}-\\
&-\left[\dot{\eta}_{n-3}^2+\dot{\eta}_{n-2}^2\sin^2\eta_{n-3}\right]\sin\eta_{n-4}\cos\eta_{n-4}=0,\\
&\ddot{\eta}_{n-3}+b_*\dot{\eta}_{n-3}\cos\xi+\dot{\xi}\dot{\eta}_{n-3}\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi}+2\dot{\eta_1}\dot{\eta}_{n-3}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}+\ldots+2\dot{\eta}_{n-4}\dot{\eta}_{n-3}\frac{\cos\eta_{n-4}}{\sin\eta_{n-4}}-\\
&-\dot{\eta}_{n-2}^2\sin\eta_{n-3}\cos\eta_{n-3}=0,\\
&\ddot{\eta}_{n-2}+b_*\dot{\eta}_{n-2}\cos\xi+\dot{\xi}\dot{\eta}_{n-2}\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi}+2\dot{\eta_1}\dot{\eta}_{n-2}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}+\ldots+2\dot{\eta}_{n-3}\dot{\eta}_{n-2}\frac{\cos\eta_{n-3}}{\sin\eta_{n-3}}=0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

($b_*>0$) описывающую закрепленный n-мерный маятник в неконсервативном поле сил. Порядок системы должен быть равен $2(n-1)$, но переменная η_{n-2} является циклической, что и приводит к расслоению фазового пространства, являющимся касательным расслоением

$$
T\mathbf{S}^{n-1}\{\dot{\xi},\dot{\eta_1},\ldots,\dot{\eta}_{n-2},\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}\} \tag{2}
$$

к $(n-1)$-мерной сфере $\mathbf{S}^{n-1}\{\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}\}$. Система (1) является динамической системой с переменной диссипацией на касательном расслоении (2) [4, 5].

Литература. [1] Шамолин М. В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. – М.: Изд-во "Экзамен", 2007. [2] Шамолин М. В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фунд. и прикл. мат., **14**:3 (2008), 3—237. [3] Трофимов В. В., Шамолин М. В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фунд. и прикл. мат., **16**:4 (2010), 3—229. [4] Шамолин М. В. Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде // Доклады РАН, **375**:3 (2000), 343—346. [5] Шамолин М. В. Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил / Итоги науки и техники. Сер. "Современая математика и ее приложения. Тематические обзоры". Т. 125. М.: ВИНИТИ, 2013. С. 5–254.