СЕМЕЙСТВА ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТОВ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

А. В. Андреев, М. В. Шамолин

МГУ имени М. В. Ломоносова

shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

Москва, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

Рассматривается математическая модель воздействия среды на твердое тело с участком его внешней поверхности в виде конуса. Приводится полная система уравнений движения, состоящая из динамической и кинематической частей. Динамическая часть образует независимую подсистему третьего порядка. Получено новое семейство фазовых портретов на фазовом цилиндре квазискоростей.

Ордината точки N приложения силы воздействия среды определяется как $y_N = R(\alpha)$, α — угол атаки. Силы лобового и бокового сопротивления будем представлять в виде $\mathbf{S}_x = -s(\alpha)v^2\mathbf{e}_x$, $\mathbf{S}_y = -b(\alpha)v^2\mathbf{e}_y$, $|\mathbf{v}_D| = v$.

Динамическая часть уравнений движения перепишется в виде (m — масса тела, I — центральный момент его инерции, $\sigma = CD$):

$$\dot{v}\cos\alpha - \dot{\alpha}v\sin\alpha + \Omega v\sin\alpha + \sigma\Omega^2 = -\frac{s(\alpha)}{m}v^2, \tag{1}$$

$$\dot{v}\sin\alpha + \dot{\alpha}v\cos\alpha - \Omega v\cos\alpha + \sigma\dot{\Omega} = -\frac{b(\alpha)}{m}v^2, \tag{2}$$

$$I\dot{\Omega} = -F(\alpha)s(\alpha)v^2 + \sigma b(\alpha)v^2 - h\Omega v, \tag{3}$$

при этом $F(\alpha) = R(\alpha)s(\alpha)$, а коэффициент $h > 0$ характеризует дополнительный момент, зависящий от угловой скорости [1, 2].

Поскольку кинетическая энергия тела и обобщенные силы и моменты, действующие на тело, не зависят от положения тела на плоскости, позиционные координаты в системе являются циклическими. Это позволяет рассматривать систему динамических уравнений (1)–(3) в качестве независимой.

Без ограничения общности [1, 2] в основном будем рассматривать следующее представление для функций $R(\alpha), s(\alpha), b(\alpha)$, определяющих воздействие среды:

$$R(\alpha) = A\sin\alpha,\ A > 0, \tag{4}$$

$$s(\alpha) = B\cos\alpha,\ b(\alpha) = b_1\sin\alpha,\ B, b_1 > 0, \tag{5}$$

и именовать функции R, s, b функциями Чаплыгина.

Уравнения (1), (2) могут быть приведены к виду

$$\dot{v} + \sigma\Omega^2\cos\alpha + \sigma\dot{\Omega}\sin\alpha = -\frac{s(\alpha)}{m}v^2\cos\alpha - \frac{b(\alpha)}{m}v^2\sin\alpha, \tag{6}$$

$$\dot{\alpha}v - \Omega v + \sigma\dot{\Omega}\cos\alpha - \sigma\Omega^2\sin\alpha = -\frac{b(\alpha)}{m}v^2\cos\alpha + \frac{s(\alpha)}{m}v^2\sin\alpha. \tag{7}$$

Вводя далее новое дифференцирование по формуле $<\cdot>= d/dt = vd/dq = v <'>$, где q — путь, пройденный точкой D, имеем: $\Omega = \omega v$, $\dot{\Omega} = v(\omega' v + \omega v')$. Тогда динамическая часть уравнений движения в нашем случае примет следующий вид:

$$v' = v\Psi_1(\alpha,\omega), \tag{8}$$

$$\alpha' = \omega + \frac{\sigma}{I}\psi(\alpha,\omega)\cos\alpha + \sigma\omega^2\sin\alpha + \frac{s(\alpha)}{m}\sin\alpha - \frac{b(\alpha)}{m}\cos\alpha, \tag{9}$$

$$\omega' = -\frac{1}{I}\psi(\alpha,\omega) - \omega\Psi_1(\alpha,\omega), \tag{10}$$

где

$$\psi(\alpha,\omega) = F(\alpha) - \sigma b(\alpha) + h\omega,$$

$$\Psi_1(\alpha,\omega) = \frac{\sigma}{I}\psi(\alpha,\omega)\sin\alpha - \sigma\omega^2\cos\alpha - \frac{s(\alpha)}{m}\cos\alpha - \frac{b(\alpha)}{m}\sin\alpha.$$

Вводя далее безразмерные параметры и дифференцирование в виде

$$q = Q\sigma,\ \bar{\omega} = \omega\sigma,\ \beta_1 = \frac{\sigma^2 AB}{I},\ \beta_2 = \frac{\sigma^3 b_1}{I},\ \beta_3 = \frac{\sigma h}{I},\ \beta_4 = \frac{B\sigma}{m},\ \beta_5 = \frac{b_1\sigma}{m},$$

опуская при этом черту в дальнейшем над безразмерной переменной $\bar{\omega}$, а также попрежнему обозначая штрихом производную по безразмерной величине Q, имеем систему (9), (10) в случаях (4), (5) в следующем виде:

$$\alpha' = \omega + \beta_1\sin\alpha\cos^2\alpha - \beta_2\sin\alpha\cos\alpha + \beta_3\omega\cos\alpha +$$

$$+\omega^2\sin\alpha + \beta_4\sin\alpha\cos\alpha - \beta_5\sin\alpha\cos\alpha, \tag{11}$$

$$\omega' = -\beta_1\sin\alpha\cos\alpha + \beta_2\sin\alpha - \beta_3\omega + \omega^3\cos\alpha - \beta_1\omega\sin^2\alpha\cos\alpha +$$

$$+\beta_2\omega\sin\alpha - \beta_3\omega^2\sin\alpha + \beta_4\omega\cos^2\alpha + \beta_5\omega\sin^2\alpha. \tag{12}$$

Безразмерные параметры $\beta_k, k = 1,\ldots,5$, естественно являются: β_1 — параметром момента силы лобового сопротивления; β_2 — параметром момента боковой силы; β_3 — параметром дополнительного демпфирующего момента; β_4 — параметром силы лобового сопротивления; β_5 — параметром момента боковой силы.

Имеем, таким образом, пятипараметрическое семейство систем (11), (12) на двумерном фазовом цилиндре $\{(\alpha,\omega) \in \mathbf{R}^2 : \alpha \bmod 2\pi\}$.

Рассмотрим случай наличия двух пар сил, а именно, придположим, что выполнены следующие условия:

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0. \tag{13}$$

Таким образом, в системе присутствуют две пары сил: пара силы силы лобового сопротивления и пара боковой силы. Тогда система (11), (12) при условиях (13) обладает двухпараметрическим семейством фазовых портретов. Полученное семейство отличается от ранее полученных [1–3].

Литература. [1] Шамолин М. В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. – М.: Изд-во "Экзамен", 2007. [2] Шамолин М. В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фунд. и прикл. мат., **14**:3 (2008), 3—237. [3] Shamolin M.V., New cases of integrability in dynamics of a rigid body with the cone form of its shape interacting with a medium, PAMM, **9**, 139–140 (2009).