ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 999 (2019). С. 1–13

УДК 517.933+531.01

АЛГОРИТМЫ ДИАГНОСТИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

© 2019 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Посвящается И. Т. Борисенку

Аннотация. В настоящей работе проводится качественный и численный математический эксперимент по диагностике системы управления летательным аппаратом при его планировании с высот, близких к орбитальным, с начальной скоростью, близкой к первой космической скорости. И мы показали, что что предлагаемые алгоритмы диагностирования успешно работают при поиске различного рода опорных неисправностей, в частности, неисправностей датчиков управляющих сигналов с гиростабилизированной платформы, неисправностей, близких к опорным, при траекторных измерениях с ошибкой, а также в случае непрерывной экспресс-диагностики.

Ключевые слова: задача дифференциальной диагностики, система прямого (непрямого) управления, диагностирование, априорный список неисправностей.

AMS Subject Classification: 34, 62

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

Как уже отмечалось ранее [1, 8, 9], задача дифференциальной диагностики функционального состояния объектов управления может быть сведена к двум самостоятельным последовательно решаемым задачам: задаче контроля, т.е. установлению критерия наличия неисправности в системе, и задаче диагностирования, т.е. поиску происшедшей неисправности. Критерием наличия неисправности в системе может быть выход траектории объекта на некоторую заранее выбранную поверхность. Неисправность может произойти в любой заранее неизвестный момент времени движения объекта, в любой точке внутри данной поверхности контроля [3, 6, 25].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 19–01–00016).

Исходной информацией при решении задачи контроля является математическая модель движения рассматриваемого объекта, ограниченная область ее начальных условий и априорный список математических моделей движения объекта с той или иной возможной неисправностью. По этой информации может быть выбрана поверхность контроля. Задача же диагностирования может быть решена путем последующего слежения за траекторией объекта после ее выхода на поверхность контроля. При этом необходимо, чтобы процесс диагностики совершался во время движения объекта, был осуществлен в течение весьма краткого интервала времени. Эти обстоятельства иногда не позволяют использовать довольно громоздкие алгоритмы теории идентификации и приводят к необходимости построения алгоритмов непрерывной экспресс-диагностики (см. также [4, 5, 7]).

Рассматривается применение развиваемой методики диагностирования к теории летательных аппаратов.

В качестве численного эксперимента было рассмотрено движение летательного аппарата (ЛА), описываемого уравнениями, приведенными в [1]. ЛА находится в режиме планирующего спуска с высот, близких к орбитальным ($\cong 100$ км), с начальной скоростью, близкой к первой космической скорости. Воспроизведем полнее и уточним уравнения движения ЛА и покажем, что они приводятся, в некотором смысле, к каноническому виду.

Остановимся на общем описании рассматриваемого подхода подробнее. Проектирование современных систем управления движением сопряжено со значительными трудностями. Аналитическое исследование ограничено, поскольку порядок системы уравнений движения достаточно высок, сами уравнения нелинейны, нестационарны и многопараметричны. Имеются также такие факторы, как нецентральность поля тяготения, несферичность поверхности Земли и др.

В то же время можно решить рассматриваемый круг задач с помощью метода математического моделирования. Оно используется для синтеза законов управления летательных аппаратов, определения влияния ошибок датчиков инерциальной информации на характеристики движения.

2. Динамические системы, описывающие движение ЛА

Эти уравнения имеют следующую структуру.

Динамические уравнения центра масс (штрихом в системах нормального вида обозначается производная по времени)

$$V'_{y_i} = -W_{e_{y_i}} + g_{y_i} + \frac{F_{y_i}}{m},\ i = 1, 2, 3, \tag{1}$$

где V_{y_i} — проекции вектора путевой скорости ЛА $\mathbf{V}$ на оси системы координат M_{y_i}, связанной с географической вертикалью и ориентированной в азимуте в ортодромической координатной сетке, $W_{e_{y_i}}$ — проекции составляющей ускорения точки M, обусловленной кривизной и вращением Земли на те же оси, g_{y_i} — проекции ускорения силы тяжести на рассматриваемую подвижную систему координат, F_{y_i} — проекции силы $\mathbf{F}$, действующей на ЛА, где $\mathbf{F} = \mathbf{A} + \mathbf{T}$, $\mathbf{A}$ — аэродинамическая сила, $\mathbf{T}$ — сила тяги двигателя, m — масса ЛА.

Кинематические уравнения движения центра масс имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma'_1 &= \frac{V_{y_1}}{r\cos\sigma_2}, \\ \sigma'_2 &= \frac{V_{y_2}}{r}, \\ r' &= V_{y_3}. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь σ_1 и σ_2 — ортодромические долгота и широта центра масс (точки M) летательного аппарата, r — радиус-вектор этой точки в системе O_{y_i}.

Уравнения движения ЛА вокруг центра масс в проекциях на оси $M_s = M_{s_1}, M_{s_2}, M_{s_3}$ системы, жестко связанной с ЛА, таковы:

$$
\begin{aligned}
&I_{s_1}\frac{d\omega_{s_1}}{dt} + (I_{s_3} - I_{s_2})\omega_{s_2}\omega_{s_3} - I_{s_2s_3}(\omega_{s_2}^2 - \omega_{s_3}^2) = M_{s_1},\\
&I_{s_2}\frac{d\omega_{s_2}}{dt} + (I_{s_1} - I_{s_3})\omega_{s_1}\omega_{s_3} - I_{s_2s_3}\left(\frac{d\omega_{s_3}}{dt} + \omega_{s_2}\omega_{s_3}\right) = M_{s_2},\\
&I_{s_3}\frac{d\omega_{s_3}}{dt} + (I_{s_2} - I_{s_1})\omega_{s_1}\omega_{s_2} - I_{s_2s_3}\left(\frac{d\omega_{s_2}}{dt} - \omega_{s_1}\omega_{s_2}\right) = M_{s_3}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Здесь $I_{s_1}, I_{s_2}, I_{s_3}$ — главные, а $I_{s_2s_3}$ — центробежный моменты инерции, $\omega_{s_i}, i = 1, 2, 3,$ — угловые скорости ЛА; все — в проекциях на оси M_s.

Так как

$$\omega_s = \omega_c + \alpha' + \beta' + \gamma_c',$$

где ω_c — угловая скорость траекторной системы координат, α — угол атаки, β — угол скольжения, γ_c — угол скоростного крена, то имеем еще одну группу кинематических уравнений:

$$\omega_s = D_{sc}\omega_c + \gamma_c' D_{sn}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \beta'\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \alpha'\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \tag{4}$$

в которой сами уравнения можно разрешить относительно $\alpha', \beta', \gamma_c'$. Здесь D_{sc}, D_{sn} — матрицы перехода (см. также [10, 11, 23]).

Кроме того, имеем группу уравнений, выражающих величину ω_c через $U, \sigma_1, \sigma_2, \psi_c$ и θ, где U — угловая скорость вращения Земли, ψ_c — угол скоростного курса, θ — угол наклона траектории:

$$\omega_c = D_{cy}\left[U_y + \psi_c'\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \sigma_2'\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right] + \sigma_1' D_{c\zeta}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \theta'\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $D_{cy}, D_{c\zeta}$ — соответствующие матрицы перехода (см. также [10, 24]).

Из определения углов ψ_c и θ следуют соотношения

$$
\begin{aligned}
\psi_c' &= -\frac{V_{y_1}'\cos\psi_c + V_{y_2}'\sin\psi_c}{V\cos\theta},\\
\theta' &= \frac{V_{y_3}'\cos\theta + \sin\theta(V_{y_1}'\sin\psi_c - V_{y_2}'\cos\psi_c)}{V},
\end{aligned}
\tag{6}
$$

где V — абсолютная величина вектора путевой скорости ЛА.

Уравнения (1)–(6) могут быть представлены в виде одного уравнения нормального вида на своем 14-мерном фазовом многообразии как

$$x' = K(x), \tag{7}$$

где x — 14-мерный вектор (см. также [1, 12, 16]):

$$x = (V_{y_1}, V_{y_2}, V_{y_3}, \psi_c, \theta, r, \lambda, \varphi, \omega_{s_1}, \omega_{s_2}, \omega_{s_3}, \alpha, \beta, \gamma_c). \tag{8}$$

Здесь (для простоты) рассмотрен случай, когда полюс ортодромии лежит на оси вращения Земли, т.е. $\sigma_1 = \lambda$, $\sigma_2 = \varphi$, где λ и φ — геоцентрические долгота и широта центра масс ЛА [13, 17, 22].

3. Структура системы управления ЛА

Аэродинамические силы и моменты, действующие на ЛА, определяются следующими выражениями:

$$
\begin{aligned}
&X = c_x\frac{\rho V^2}{2}S,\ Y = c_y\frac{\rho V^2}{2}S,\ Z = c_z\frac{\rho V^2}{2}S,\\
&M_{s_1} = \frac{\rho V^2}{2}Sb_a m_z,\ M_{s_2} = \frac{\rho V^2}{2}Slm_x,\ M_{s_3} = \frac{\rho V^2}{2}Slm_y,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где ρ — плотность воздуха на высоте полета, S — характерная площадь ЛА, b_a — средняя аэродинамическая хорда, l — размах крыльев, c_x, c_y, c_z — аэродинамические коэффициенты сил, m_x, m_y, m_z — аэродинамические коэффициенты моментов.

Будем рассматривать аэродинамические коэффициенты в виде

$$\begin{aligned} c_x &= c_{x\alpha}(M,\alpha) + c_{xTP}(M,h), \\ c_y &= c_{y\alpha}(M,\alpha) + c_y^{\delta_b}(M)\delta_b, \\ c_z &= c_z^{\beta}(M,\alpha)\beta + c_z^{\delta_H}(M,\alpha)\delta_H, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} & m_x = m_{s_1} = m_{s_1\alpha}(M,\alpha) + m_{s_1}^{\omega_{s_1}}(M)\frac{b_a}{V}\omega_{s_1} + m_{s_1}^{\delta_b}(M)\delta_b, \\ & m_y = m_{s_2} = m_{s_2}^{\beta}(M,\alpha)\beta + m_{s_2}^{\omega_{s_2}}(M)\frac{l}{2V}\omega_{s_2} + m_{s_2}^{\omega_{s_3}}(M)\frac{l}{2V}\omega_{s_3} + \\ & + m_{s_2}^{\delta_H}(M,\alpha)\delta_H + m_{s_2}^{\delta_E}(M)\delta_E, \\ & m_z = m_{s_3} = m_{s_3}^{\beta}(M,\alpha)\beta + m_{s_3}^{\omega_{s_2}}(M)\frac{l}{2V}\omega_{s_2} + m_{s_3}^{\omega_{s_3}}(M)\frac{l}{2V}\omega_{s_3} + \\ & + m_{s_3}^{\delta_H}(M,\alpha)\delta_H. \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь $\delta_b, \delta_E, \delta_H$ — имеют вполне ясный геометрический смысл, а именно, отклонение рулей высоты, элеронов и рулей направления, соответственно.

Структура системы управления отклонением рулей высоты, направления и элеронов зависит от выбранной программы движения. В данной работе рассмотрено управления следующего вида:

$$\delta_u = f(\delta_{u\max}, \delta_u^0), \ u = b, E, H, \tag{12}$$

где $\delta_{u\max}$ — максимальная величина отклонения величин $\delta_b, \delta_E, \delta_H$, соответственно, а f — некоторая (не обязательно гладкая) функция.

Переменные δ_u^0 определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \delta_b^0 &= r_1\omega_{s_1} - r_2\Phi[1] + f(\alpha_m, \sigma_b), \\ \delta_E^0 &= k_1\omega_{s_2} - k_2\Phi[2] + f(\gamma_m, \sigma_E) + k_7\Phi[3], \\ \delta_H^0 &= l_1\omega_{s_3} - l_2\Phi[3] + f(\beta_m, \sigma_H) + l_7\Phi[2]. \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь $\Phi[1] = \theta'$, $\Phi[2] = \gamma_n - \gamma_s'$, $\Phi[3] = -\beta'$ — сигналы, поступающие с гироплатформы [19]: значения углов тангажа (θ'), скольжения ($-\beta'$) и разности между программным (γ_n) и вычисленным (γ_s') значениями угла крена.

Сигналы с постоянными коэффициентами r_i, k_j, l_s формируются в зависимости от углового движения ЛА. Сигналы $f(\sigma_u)$ формируются в зависимости от характеристик траекторного движения ЛА. Здесь $f(\sigma_u)$ — также некоторая (не обязательно гладкая) функция. Сигналы формируются в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \sigma_b = r_3(\alpha' - \alpha_n) + r_4(\tilde{\alpha}' - \alpha_n) + r_5\int_{t_0}^{t}(\alpha' - \alpha_n)dt, \\ & \sigma_E = k_3(\sigma_{2n}'^0 - \sigma_{2n}) + k_4(\tilde{\sigma}_2'^0 - \tilde{\sigma}_{2n}) + k_5\int_{t_0}^{t}(\sigma_2'^0 - \sigma_2)dt + k_6(\psi_s' - \psi_{sn}), \\ & \sigma_H = l_3(\sigma_{2n}'^0 - \sigma_{2n}) + l_4(\tilde{\sigma}_2'^0 - \tilde{\sigma}_{2n}) + l_5\int_{t_0}^{t}(\sigma_2'^0 - \sigma_2)dt + l_6(\psi_s' - \psi_{sn}). \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь величины K' (со штрихом) — суть вычисленные значения переменных, K_n (с индексом "n") — программные значения этих переменных, r_i, k_j, l_s — постоянные коэффициенты, $\alpha_m, \beta_m, \gamma_m$ — постоянные, ограничивающие значения рассматриваемых сигналов траекторного слежения.

Значения коэффициентов r_i, k_j, l_s приведены в таблице 1.

Таблица 1

	1	2	3	4	5	6	7
r	20	0	10	0	0	0	0
k	0,4	0,3	0	0	0	0	1
l	7	7	0	0	0	0	0,3

Уравнения (7) совместно с (8)–(14) и с учетом таблицы 1 могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} &x'' = X(x) + A(x)\xi, \\ &\xi = \Phi(\delta), \\ &\delta = Bx^* + f(\sigma), \\ &\sigma = Cx^{**}. \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь

$$x^* = (\omega_{s_1}, \omega_{s_2}, \omega_{s_3}, \theta^*, \gamma_n - \gamma_s^*, -\beta)$$

и

$$x^{**} = (\alpha^* - \alpha_n, \psi_s^* - \psi_n, \sigma_s^* - \sigma_n)$$

— шестимерный и трехмерный вектора, составляющие которых представляют значения некоторых координат фазового вектора состояния x, вычисленные на ЛА в процессе полета или сигналов, поступающих с гироплатформы;

$$\delta = (\delta_b^0, \delta_E^0, \delta_H^0)$$

— трехмерный вектор переменных вида (13);

$$\Phi(\delta) = (f(\delta_{b\max}, \delta_b^0), f(\delta_{E\max}, \delta_E^0), f(\delta_{H\max}, \delta_H^0))$$

и

$$f(\sigma) = (f(\alpha_m, \sigma_b), f(\gamma_m, \sigma_E), f(\beta_m, \sigma_H))$$

— трехмерные векторы допустимых нелинейных функций, имеющих вид (13)–(14), где

$$\sigma = (\sigma_b, \sigma_E, \sigma_H)$$

— трехмерный вектор сигналов (14);

$$B = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & -r_2 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & 0 & -k_2 & k_7 \\ 0 & 0 & l_1 & 0 & l_7 & -l_2 \end{pmatrix}$$

и

$$C = \begin{pmatrix} r_3 & 0 & 0 \\ 0 & k_6 & 0 \\ 0 & 0 & l_6 \end{pmatrix}$$

— постоянные матрицы;

в настоящей работе в численном эксперименте коэффициенты k_6 и l_6 принимались равными нулю.

Уравнение

$$x'' = X(x) + A(x)\xi,$$

где x — 14-мерный фазовый вектор (8) системы (15), $\xi = (\delta_b, \delta_E, \delta_H)$ — 3-мерный вектор управления, $X(x)$ и $A(x)$ — матрицы-функции с довольно громоздкими коэффициентами — здесь не приводятся (см. также [14, 18, 26]).

Система (15) представляет в настоящей работе систему с прямым перекрестным управлением по отклонениям рулей высоты, элеронов и направления.

4. Численный эксперимент и топологический анализ пространства неисправностей

Мы моделировали движение ЛА, представляющее собой планирующий спуск с высот, близких к орбитальным ($\cong$ 100 км), с начальной скоростью, близкой к первой космической скорости. Программное движение определялось заданием программного угла атаки и угла крена.

Численный эксперимент заключался в моделировании различных неисправностей в системе управления (13) и (14). Был составлен список возможных неисправностей, в соответствии с классификацией неисправностей, приведенной в [17, 18, 20].

Первый список возможных неисправностей включал следующие неисправности, происходящие в первом канале управления (13), т.е. в канале управления рулями высоты δ_b.

4.1. Априорный список неисправностей № 1. Список состоял из 5 следующих неисправностей.

1) *Отказ датчика угловой скорости* ω_{s_1}. Неисправность моделировалась путем обнуления коэффициента r_1 в матрице B в момент времени $t = t_0$, t_0 — момент возникновения неисправности.

Таким образом, при неисправности 1 из априорного списка неисправностей № 1 выполняется условие
$$r_1(t) = 0,\ t \geqslant t_0.$$

2) *Отказ при формировании сигнала* σ_b. Моделируется путем обнуления коэффициента r_3 в матрице C:
$$r_3(t) = 0,\ t \geqslant t_0.$$

3) *Нарушение симметрии функции* $f(\delta_{b\,\max}, \delta_b^0)$. Моделируется путем замены $f(\delta_{b\,\max}, \delta_b^0)$ на $f(\delta_{b\,\max}, \delta_b^0 + \delta')$, т.е. сдвига графика функции f по оси x.

4) *Заклинивание управляющего органа (руля высоты).* Моделируется как $\delta_b(t) = \delta_b(t_0)$ при $t \geqslant t_0$, где t_0 — момент возникновения неисправности.

5) *Активный отказ управляющего органа (руля высоты).* Значение δ_b в момент возникновения неисправности t_0 скачком меняется на $\delta_{b\,\max}$ — максимально возможное значение δ_b.

Таким образом, при неисправности 5 из априорного списка неисправностей № 1 выполняется условие
$$\delta_b(t) = \delta_{b\,\max},\ t \geqslant t_0.$$

В процессе полета тяжелого ЛА, уравнения движения которого рассмотрены выше, характерно наличие двух существенно отличных по временным характеристикам движений. Это движения вокруг центра масс с постоянными времени порядка минут.

Все перечисленные выше неисправности приводят к изменениям относительно исправного движения вокруг центра масс. В то же время движения ЛА относительно центра масс при различных неисправностях различны между собой и приводят к выходу на поверхность контроля через разные промежутки времени, начиная с момента возникновения неисправности.

Численное интегрирование исправной и соответствующих неисправных систем (15) проводилось с шагом $h = 0,8$ сек, характерным для движения относительно центра масс тяжелого ЛА с данными уравнениями движения.

4.2. Поверхность контроля. Вектор контроля $y(t)$ для данной системы состоял из одной компоненты — угла атаки α. Множество начальных условий представляло собой сферу $\mathbf{S}_{0,1}^{x_0}$ радиуса $0,1$ (рад) в пространстве фазовых переменных с центром в точке
$$x_0 = (V_{y_1}^0, V_{y_2}^0, V_{y_3}^0, \psi_c^0, \theta^0, r^0, \lambda^0, \varphi^0, \omega_{s_1}^0, \omega_{s_2}^0, \omega_{s_3}^0, \alpha^0, \beta^0, \gamma_c^0).$$

Здесь используются следующие постоянные:
$$\begin{aligned}
&V_{y_1}^0 = 7350\ \text{км},\ V_{y_2}^0 = 0,\ V_{y_3}^0 = 0,\\
&\lambda^0 = 0,\ \varphi^0 = 45^\circ,\ \omega_{s_1}^0 = 0,\ \omega_{s_2}^0 = 0,\ \omega_{s_3}^0 = 0,\\
&\alpha^0 = 0,519\ \text{рад},\ \gamma_c^0 = 0,\ \beta^0 = 0,\\
&r^0 = 646572\ \text{м}\ (h = 100\ \text{км}).
\end{aligned} \tag{16}$$

Промежуток времени процесса построения был выбран в следующих пределах:

$$[0;\ 2000 \text{ сек}].$$

Для такого множества начальных условий X^0, вектора контроля $y(0)$ и априорного списка неисправностей методом статистических испытаний [2, 21, 27] была получена поверхность контроля π_k — отрезок $[0,499;\ 0,539]$ (в радианах). При исправном движении ЛА значение угла атаки находится внутри π_k. Поверхность контроля построена с доверительной вероятностью, не меньшей $0,95$ (доказанное утверждение).

4.3. Обнаружение неисправностей. Путем численного интегрирования системы (15) моделировалось исправное функционирование объекта (полет ЛА), затем возникновение некоторой (j-й) неисправности из априорного списка в момент времени t_0 и дальнейшее функционирование вплоть до выхода траектории на поверхность π_k. Времена выхода на π_k для разных неисправностей из списка приведены в следующей таблице 2.

Таблица 2

номер неисправности	1	2	3	4	5
время выхода на поверхность контроля π_k (сек)	28	118	16	36	2,4

По выходе траектории на π_k включается алгоритм диагностирования с вектором диагностирования $z = \alpha$, т.е. содержащим ту же компоненту фазового вектора, что и вектор контроля.

Характеристиками алгоритма являются время диагностирования τ и число измерений N (так как численное интегрирование осуществлялось с шагом $h = 0,8$ сек, то N и τ связаны соотношением $\tau = Nh$).

Численный эксперимент показал, что для всех номеров i из априорного списка неисправностей алгоритм диагностирования правильно определяет априорные неисправности при $N = 3$ ($\tau = 2,4$ сек). Моделировалось также обнаружение неисправностей с вектором диагностирования

$$\bar{z} = (\omega^0_{s_1}, \omega^0_{s_2}, \omega^0_{s_3}).$$

Численный эксперимент также показал, что для $\bar{z}$ все неисправности из априорного списка определялись однозначно за число измерений $N = 3$.

Прежде чем переходить к неисправностям не из априорного списка, сделаем ряд топологических замечаний.

Определение 4.1. *Диагностическим пространством назовем совокупность датчиков, которой становится в соответствие набор возможных опорных неисправностей H_j с их окрестностями O_j, подвергающихся диагностированию посредством опорных невырожденных неисправностей из класса возможных.*

Уточним математическую структуру всего диагностического пространства:

$$(M; O_1, O_2, \ldots, O_l; A_1, A_2, A_3), \tag{17}$$

где M — множество рассмотренных неисправностей $H_1, \ldots, H_l$ вместе с их окрестностями $O_1, \ldots, O_l$. Аксиомы A_1, A_2, A_3 определяются следующим образом:

$$A_1:\ \forall H_j \in M\ \exists O_j\ (H_j \subset O_j);$$
$$A_2:\ \forall O_j\ \exists H_j\ (H_j \subset O_j);$$
$$A_3:\ H_j \subset O_j \cap O_k \Rightarrow \exists O_\mu\ (H_j \subset O_\mu \subset O_j \cap O_k \vee O_\mu \subset O_j \cup O_k).$$

Аксиома A_1 утверждает, что окрестности O_j, являющиеся подмножествами множества M, покрывают все M, а из аксиомы A_2 следует, что эти окрестности не пусты.

Аксиома A_3 позволяет обеспечить непрерывный процесс приближения к элементу H_j:

$$H_j = \lim_{\mu \to \infty} O_\mu \Leftrightarrow \forall O_\mu\ \exists \overline{M}\ (\mu > \overline{M} \Rightarrow H_j \subset O_\mu),$$

каждая окрестность O_μ которого содержит H_j и "близкие" к H_j непредвиденные и не содержащиеся в рассматриваемом наборе неисправности, которые, если они возникнут в окрестностях O_j, надо уметь диагностировать посредством априорного набора неисправностей.

Если же под элементом x понимать не только событие H_j, но и непредвиденное событие (не включенное в список H возможных неисправностей, которое может произойти в любой точке M и которое требуется диагностировать посредством H_j, то аксиомы математической структуры диагностического пространства (17) могут быть записаны в следующем виде:

$$A_1: \ \forall x \in M \ \exists O_i \ (x \in O_i),$$

то есть окрестности покрывают все M;

$$A_2: \ \forall O_i \ \exists x \ (x \in O_i),$$

то есть окрестности не пусты;

$$A_3: \ x \in O_i \cap O_j \Rightarrow \exists O_k \ (x \in O_k \subset O_i \cap O_j \vee O_k \subset O_i \cup O_j),$$

то есть окрестности можно измельчать и обеспечивать процесс приближения к элементу x.

Предел последовательности $\{O_k\}$ можно определить как элемент

$$x = \lim_{k\to\infty} O_k,$$

каждая окрестность $O_j(x)$ которого содержит H_j и "близкие" к H_j непредвиденные и не содержащиеся в наборе неисправности, которые, если они возникнут в окрестностях $O_j(H_j)$, надо уметь диагностировать посредством априорного набора неисправностей:

$$x = \lim_{k\to\infty} O_k \Leftrightarrow \forall O_k(x) \ \exists \overline{K} \ (k > \overline{K} \Rightarrow x \in O_k, H_j \subset O_k, j = 1, \ldots, l).$$

Математическая структура диагностического пространства (17) позволяет обеспечить ситуацию, при которой решение рассматриваемой динамической системы и системы с неисправностями в системе управления с одинаковыми начальными условиями x^0 из некоторого ограниченного пространства будут отличаться друг от друга, а решение рассматриваемой системы с опорной неисправностью H_j и с не предусмотренной априорным списком (непредвиденной) неисправностью из окрестности O_j этой опорной неисправности с одинаковыми начальными условиями x^0 будут "близкими", то есть "мало" отличаться друг от друга, и они могут быть диагностированы как опорные неисправности.

Это во всяком случае будет справедливо для непересекающихся окрестностей O_j, $j = 1, \ldots, l$, или окрестностей, пересекающихся только вдоль прямых по оси времени.

А вот теперь переходим к неисправностям не из априорного списка.

4.4. Определение неисправностей не из априорного списка. Располагая априорным списком неисправностей, можно определить неисправность, не находящуюся в списке, но близкую к одной из списочных.

Были рассмотрены две неисправности не из списка.

1) *Постепенное ухудшение качества показаний датчика угловой скорости $\omega_{s_1}^0$ вплоть до полного исчезновения поступающего с него сигнала.*

Эта неисправность моделировалась путем уменьшения r_1 до нуля по линейному закону:

$$r_1(t) = r_{1N} c_1(t - t_0), \ t > t_0,$$

где r_{1N} — номинальное значение коэффициента r_1, c_1 — отрицательная константа. Достигнув нуля, значение r_1 больше не меняется. Значение $r_1 = 0$ достигается за время $\tau \cong 30 \div 40$ сек, т.е. после выхода неисправной системы на поверхность контроля. Таким образом, эта неисправность близка к неисправности из априорного списка неисправностей № 1, но не совпадает с ней, так как в момент выхода на π_k коэффициент r_1 еще не равен нулю.

2) *Постепенный отказ в формировании сигнала σ_b.* Моделируется как

$$r_3(t) = r_{3N} c_3(t - t_0), \ t > t_0.$$

Здесь r_{3N} — номинальное значение коэффициента r_3, c_3 — некоторая отрицательная константа.

Достигнув нуля, величина r_3 далее не меняется. Значение $r_3 = 0$ достигается за время $\tau \cong 140 \div 150$ сек, т.е. после выхода системы на π_k. Эта неисправность близка к неисправности из априорного списка неисправностей № 1.

Линейный закон в последних двух случаях 1) и 2) из раздела 4.4 взят, в принципе, на предварительном этапе. Ну а в дальнейших исследованиях предполагается также и нелинейная аппроксимация рассматриваемых величин.

Обнаружение неисправностей 1 и 2 из раздела 4.4 (т.е. не из априорного списка неисправностей № 1) моделировалось следующим образом: возникновение неисправности 1 (неисправности 2) в момент t_0, включение алгоритма на выходе на π_k (время выхода на π_k для неисправности 1 — 78 сек, для неисправности 2 — 224 сек), включение алгоритма с одним из векторов диагностирования z, $\bar{z}$ и выбор минимума из S_j^N, $j = 1, \ldots, 5$.

Обнаружением рассматриваемой неисправности 1 (неисправности 2) из раздела 4.4 в данном случае является определение случившейся неисправности как неисправности 1 (неисправности 2) из априорного списка неисправностей № 1.

Численное моделирование показало, что для $N = 5$ ($\tau = 4$ сек) алгоритм с векторами диагностирования z и $\bar{z}$ правильно обнаруживают рассматриваемые неисправности 1 и 2.

4.5. Априорный список неисправностей № 2. Каждая неисправность из этого списка характеризовалась наличием функций f_j, $j = 1, \ldots, 17$, где f_j содержала j-й набор значений коэффициентов $r_1, r_3, k_1, k_2, k_3, l_1, l_2, l_3$ в цепях формирования сигналов δ_u^0 из (13). Различные комбинации приведены в таблице 3. В ней индекс Nom означает номинальное значение коэффициента. Из таблицы видно, что неисправности с номерами 1–3 относятся к первому каналу управления из (13), формирующему величину δ_b, с номерами 4–10 — ко второму (формирующему величину δ_E), а с номерами 11–17 — к третьему (формирующему величину δ_H).

По этим опорным неисправностям проводилось затем определение не списочных неисправностей в каналах управления. В этом случае распознавался только номер канала: при номере i минимального из чисел S_j^N, $j = 1, \ldots, 17$, равном 1, 2 или 3, неисправность определялась как случившаяся в первом канале управления (δ_b), при номере $i = 4, \ldots, 10$, — во втором (δ_E), при номере $i = 11, \ldots, 17$, — в третьем (δ_H).

Поверхность контроля π_k в данном случае при векторе контроля $y = \alpha$ и множестве начальных условий была получена такой же, как и для априорного списка неисправностей № 1 (множество начальных условий такое же, как и для априорного списка неисправностей № 1):

$$\pi_k: \ [0,499; \ 0,539].$$

Численное моделирование показало, что диагностирование неисправностей с векторами диагностирования $z = \alpha$ и $\bar{z} = (\omega_{s_1}^0, \omega_{s_2}^0, \omega_{s_3}^0)$ за число измерений $N = 8$ ($\tau = 6,4$ сек) привело к правильному определению номера канала, в котором произошла неисправность. Набор не списочных неисправностей, для которых проводилось определение номера неисправного канала, приведен в таблице 4.

Номинальные значения коэффициентов в цепях управления (15) приведены в таблице 1.

При этом были выбраны следующие значения постоянных:

$$r_1 = 20, \ r_3 = 10, \ k_1 = 7, \ k_2 = 1,$$
$$k_3 = 0,3, \ l_1 = 7, \ l_2 = 1, \ l_3 = 0,7.$$

4.6. Обнаружение неисправностей без применения метода поверхности контроля. Возможно обнаружение неисправностей по алгоритму диагностирования без построения самой поверхности контроля π_k. При этом:

1) Под номером 0 в априорный список неисправностей вносится *исправная* система.

2) Алгоритм диагностирования, в принципе, включается *циклически*, с некоторым интервалом времени Δt.

3) Если обнаружена так называемая “неисправность” под номером 0 — то есть система *исправна*, — продолжается функционирование объекта до момента нового включения алгоритма диагностирования.

Таблица 3

N	r_1	r_3	k_1	k_2	k_3	l_1	l_2	l_3
1	0	Nom						
2	Nom	0						
3	0	0						
4			0	Nom	Nom			
5			Nom	0	Nom			
6			Nom	Nom	0			
7			0	0	Nom			
8			Nom	0	0			
9			0	Nom	0			
10			0	0	0			
11						0	Nom	Nom
12						Nom	0	Nom
13						Nom	Nom	0
14						0	0	Nom
15						Nom	0	0
16						0	Nom	0
17						0	0	0

Таблица 4

Номер канала	Коэффициенты	в цепи	управления
1	$r_1 = 5$	$r_3 = 10$	
1	$r_1 = 1$	$r_3 = 5$	
1	$r_1 = 0$	$r_3 = 2$	
2	$k_1 = 0,5$	$k_2 = 1$	$k_3 = 0,3$
2	$k_1 = 1$	$k_2 = 0$	$k_3 = 0$
2	$k_1 = 3$	$k_2 = 0$	$k_3 = 1$
3	$l_1 = 3$	$l_2 = 1$	$l_3 = 0,7$
3	$l_1 = 1$	$l_2 = 0$	$l_3 = 0,3$
3	$l_1 = 1$	$l_2 = 0$	$l_3 = 0$

4) Если обнаружена неисправность с номером $i \neq 0$, выдается сообщение *о наличии этой неисправности.*

Численное моделирование диагностики с циклическим включением алгоритма показало, что при интервалах включения алгоритма $\Delta t = 10, 20, 30$ сек все вышеперечисленные неисправности из априорного списка неисправностей № 1 и априорного списка неисправностей № 2 были правильно определены.

Алгоритм диагностирования работал с векторами диагностирования $z = \alpha$ и $\bar{z} = (\omega_{s_1}, \omega_{s_2}, \omega_{s_3})$ и числом измерений $N = 5$ ($\tau = 4$ сек).

Таким образом, с помощью предлагаемого алгоритма диагностирования численным экспериментом показана возможность диагностирования неисправностей датчиков управляющих сигналов, формирующих СУ движением ЛА и, в частности, датчиков управляющих сигналов с гиростабилизированной платформы (см. также [15, 19]).

Таблица 3 представляет собой в некотором роде опорные неисправности. В этой таблице неисправности 5, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 17 формируются, в частности, отказами датчиков сигналов управления с гиростабилизированной платформы. Эти неисправности правильно диагностируются.

По опорным неисправностям (таблица 3) проводилось диагностирование не списочных неисправностей (таблица 4) в каналах управления движением ЛА (неисправности 5, 6, 8, 9 формируются в таблице 4 и с помощью отказов датчиков сигналов управления с гиростабилизированной платформы). В этом случае распознавался только номер канала управления движением летательного аппарата. Численное моделирование показало, что диагностирование неисправностей за вполне приемлемое время привело к правильному определению номера сигнала управления, в котором произошла неисправность.

Численный эксперимент, таким образом, показал работоспособность предлагаемого алгоритма диагностирования.

5. Диагностика в условиях измерения части фазового вектора

Для практического применения алгоритма диагностирования неисправностей, как показано в предыдущем разделе о численном эксперименте, требуется знание начальных условий для всего 14-мерного фазового вектора состояния x. Это несколько затрудняет возможность практического применения алгоритма диагностирования неисправностей.

Из системы уравнений (15) может быть выделена динамическая подсистема из 3-х уравнений (рассматриваемая на алгебре Ли so(3)) относительно угловых скоростей $\omega_{s_i}, i = 1, 2, 3$. В нормальном виде она может быть представлена как

$$\begin{aligned}
\omega'_{s_1} &= \frac{\rho V_e^2}{2}\frac{Sb_a}{I_{s_1}}\left(m_{s_1}^{\alpha} + m_{s_1}^{\delta_e}\delta_e + m_{s_1}^{\omega_{s_1}}\frac{b_a}{V_e}\omega_{s_1}\right) + \\
&+ \frac{I_{s_2} - I_{s_3}}{I_{s_1}}\omega_{s_2}\omega_{s_3} + \frac{M_{s_1}^{\partial}}{I_{s_1}}, \\
\omega'_{s_2} &= \frac{\rho V_e^2}{2}\frac{SL}{I_{s_2}}\left(m_{s_2}^{\beta}(\beta - \beta_e) + m_{s_2}^{\delta_E}\delta_E + m_{s_2}^{\delta_H}\delta_H + m_{s_2}^{\omega_{s_2}}\frac{L}{2V_e}\omega_{s_2}\right) + \\
&+ \frac{I_{s_3} - I_{s_1}}{I_{s_2}}\omega_{s_1}\omega_{s_3} + \frac{M_{s_2}^{\partial}}{I_{s_2}}, \\
\omega'_{s_3} &= \frac{\rho V_e^2}{2}\frac{SL}{I_{s_3}}\left(m_{s_3}^{\beta}(\beta - \beta_e) + m_{s_3}^{\delta_H}\delta_H + m_{s_3}^{\omega_{s_2}}\frac{L}{2V_e}\omega_{s_2} + m_{s_3}^{\omega_{s_3}}\frac{L}{2V_e}\omega_{s_3}\right) + \\
&+ \frac{I_{s_1} - I_{s_2}}{I_{s_3}}\omega_{s_1}\omega_{s_2} + \frac{M_{s_3}^{\partial}}{I_{s_3}}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Эти уравнения имеют место при совпадении главных осей инерции с так называемыми “строительными осями”, т.е. при тензоре инерции следующего вида

$$I = \begin{pmatrix} I_{s_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{s_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{s_3} \end{pmatrix}.$$

Здесь ρ, L, S, I_{s_i} — вполне определенные физические константы, m_{s_i} — медленно меняющиеся коэффициенты аэродинамических моментов, которые можно считать постоянными на времени работы алгоритма диагностирования. Величины ω_{s_i} — наблюдаются и, таким образом, начальные условия для уравнения (18) — известны. Величины $\delta_e, \delta_E, \delta_H$ известны в любой момент времени, так как это — формируемое управление.

Таким образом, измеряя величины V_e, $\beta - \beta_e$, присутствующие а правой части, можно замкнуть систему уравнений (18) и численно ее интегрировать на некотором промежутке времени (диагностирования) $[t_0, t]$ с начальными условиями $\omega_{s_i}(t_0)$.

Численный эксперимент представлял собой диагностирование неисправностей из априорного списка неисправностей № 1 в условиях неточных измерений величин V_e, $\beta - \beta_e$ (измеренные значения отличались (при каждом измерении) на $5 \div 10\%$ от действительных). Измеряемый вектор $z(t) = (\omega_{s_1}, \omega_{s_2}, \omega_{s_3})$, компоненты расчетного вектора z_j получались путем численного интегрирования системы (18). Алгоритм диагностирования работал циклически (под № 0 в него была включена исправная система) с интервалом включения $15 \div 20$ сек и правильно определял происшедшее в системе управления ЛА неисправности за $15 \div 20$ измерений ($8 \div 14$ сек).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисенок И.Т., Шамолин М.В. Решение задачи дифференциальной диагностики // Фундам. и прикл. матем. — 1999. — Т. 5. — Вып. 3. — С. 775–790.
2. Борисенок И.Т., Шамолин М.В. Решение задачи дифференциальной диагностики методом статистических испытаний // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2001. — № 1. – С. 29–31.
3. Жуков В.П. О достаточных и необходимых условиях асимптотической устойчивости нелинейных динамических систем // Автоматика и телемеханика. – 1994. – № 3. – С. 24–36.
4. Мироновский Л.А. Функциональное диагностирование динамических систем // Автоматика и телемеханика. – 1980. – № 8. – С. 96–121.
5. Окунев Ю.М., Садовничий В.А., Самсонов В.А., Черный Г.Г. Комплекс моделирования задач динамики полета // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 1996. — № 6. — С. 66–75.
6. Пархоменко П.П., Сагомонян Е.С. Основы технической диагностики. – М.: Энергия, 1981.
7. Чикин М.Г. Системы с фазовыми ограничениями // Автоматика и телемеханика. – 1987. – № 10. – С. 38–46.
8. Шамолин М.В. Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. — М.: Изд-во “Экзамен”, 2004. — 256 с.
9. Шамолин М.В. Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. Издание 2-е, переработанное и дополненное. — М.: Изд-во “Экзамен”, 2007. — 320 с.
10. Шамолин М.В. Диагностика неисправностей в одной системе непрямого управления // Электронное моделирование. — 2009. — Т. 31. — № 4. — С. 55–66.
11. Шамолин М.В. Расширенная задача дифференциальной диагностики и ее возможное решение // Электронное моделирование. — 2009. — Т. 31. — № 1. — С. 97–115.
12. Шамолин М.В. Решение задачи диагностирования в случае точных траекторных измерений с ошибкой // Электронное моделирование. — 2009. — Т. 31. — № 3. — С. 73–90.
13. Шамолин М.В. Диагностика движения летательного аппарата в режиме планирующего спуска // Электронное моделирование. — 2010. — Т. 32. — № 5. — С. 31–44.
14. Шамолин М.В. Диагностика одной системы прямого управления движением летательных аппаратов // Электронное моделирование. — 2010. — Т. 32. — № 1. — С. 45–52.
15. Шамолин М.В. Диагностика гиростабилизированной платформы, включенной в систему управления движением летательного аппарата // Электронное моделирование. — 2011. — Т. 33. — № 3. — С. 121–126.
16. Шамолин М.В. Решение задачи диагностирования в случаях траекторных измерений с ошибкой и точных траекторных измерений // Геометрия и механика. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. — Т. 150. — М.: ВИНИТИ РАН, 2018. — С. 88–109.
17. Шамолин М.В. Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Часть 1. Уравнения движения и классификация неисправностей // Вестник СамУ. Естественнонаучная серия. — 2019. — Т. 25. — № 1. — С. 32–43.

18. Шамолин М.В. Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Часть 2. Задача дифференциальной диагностики // Вестник СамУ. Естественнонаучная серия. — 2019. — Т. 25. — № 3. — С. 22–31.
19. Шамолин М.В., Кругова Е.П. Задача диагностики модели гиростабилизированной платформы // Материалы межд. конф. “International Conference on Mathematical Modelling in Applied Sciences, ICMMAS-17”, Санкт-Петербургский политехнический университет, 24–28 июля 2017 г., Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. — Т. 160. — М.: ВИНИТИ РАН, 2019. — С. 137–141.
20. Шамолин М.В. Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Часть 3. Задача контроля // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. – 2019. – Т. 25. – № 4. – С. 36–47.
21. Шамолин М.В. Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Часть 4. Задача диагностирования (случай точных траекторных измерений) // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. – 2020. – Т. 26. – № 1. – С. 52–68.
22. Aleksandrov A.Y., Aleksandrova E.B., Tikhonov A.A. On the monoaxial stabilization of a rigid body under vanishing restoring torque // AIP Conference Proceedings 2018, 1959, 080001.
23. Beck A., Teboulle M. Mirror Descent and Nonlinear Projected Subgradient Methods for Convex Optimization, *Oper. Res. Lett.*, 2003, Vol. 31, No. 3, pp. 167–175.
24. Ben-Tal A., Margalit T., Nemirovski A. The Ordered Subsets Mirror Descent Optimization Method with Applications to Tomography, *SIAM J. Optim.*, 2001, Vol. 12, No. 1, pp. 79–108.
25. Shamolin M.V., Foundations of differential and topological diagnostics, In: Journal of Mathematical Sciences, Vol. 114, No. 1, 2003, pp. 976–1024.
26. Su W., Boyd S., Candes E. A Differential Equation for Modeling Nesterov’s Accelerated Gradient Method: Theory and Insights, *J. Machine Learning Res.*, 2016, No. 17(153), pp. 1–43.
27. Tikhonov A.A., Yakovlev A.B. On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters, International Journal of Plasma Environmental Science and Technology, Vol. 13, No. 1, pp. 49–52.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (МГУ)
E-mail: `shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru`