Воронежский государственный университет
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

$\Sigma d\sigma$

МАТЕРИАЛЫ

Воронежской весенней математической школы
«Понтрягинские чтения—XXII»

ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В.А. СТЕКЛОВА РАН

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

МАТЕРИАЛЫ
Воронежской весенней математической школы
«Понтрягинские чтения–XXII»

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2011

УДК 517.94(92;054,97)
С56

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 11–01–06810–моб_г

Современные методы теории краевых задач : материалы
С56 Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения–XXII» / Воронежский государственный университет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2011. – 221 с.
ISBN 978-5-9273-1787-5

В сборнике представлены материалы докладов и лекций, включенных в программу Воронежской весенней математической школы, проводимой Воронежским госуниверситетом совместно с Математическим институтом им. В.А. Стеклова РАН и Московским государственным университетом.

Тематика охватывает широкий спектр проблем качественной и спектральной теории дифференциальных уравнений, геометрии и анализа, моделирования, оптимального управления, теории игр и других смежных направлений, а также проблем преподавания математики в средних и высших учебных заведениях.

УДК 517.94(92;054,97)

ISBN 978-5-9273-1787-5

Условие 1. Существуют $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ такие, что при $x \in [0, \infty)$ выполнено неравенство $\varepsilon_1 \leqslant \rho_0(x) \leqslant \varepsilon_2$, $\rho_0(x) \in C^2\,[0, \infty)$.

Определение. Пусть $\delta > 0$ через $l_\delta^{\alpha,\beta}$ обозначим следующий контур $l_0 \cup l \cup l_1$, где $l = -\xi^2\alpha + i\xi\beta$ при $\zeta \in [-\delta, \delta]$, $l_0 = -\delta^2\alpha - i(\delta+\xi)\beta$ при $\xi \in [0, \infty)$, $l_0 = -\delta^2\alpha + i(\delta+\xi)\beta$ при $\xi \in [0, \infty)$, где $\alpha = \frac{\varepsilon_2}{\alpha^2 v}$, $\beta = \frac{6\varepsilon_2}{\alpha^2 v}$.

Лемма. Пусть функции $f(\gamma, x), v(\gamma, x)$, $\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 v(\gamma,x)}{\partial x^2}$ принадлежат пространству $L_2([0, \infty))$ по переменной x при каждом фиксированном γ лежащим правее некоторого контура $l_\delta^{\alpha,\beta}$, тогда существует такое $\delta_1 > 0$, что правее контура $l_{\delta_1}^{\alpha_1,\beta_1}$ будет выполнена следующая оценка $\left\|\frac{\partial^2 v(\gamma,x)}{\partial x^2}\right\|^2 + |\gamma| \left\|\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}\right\|^2 + |\gamma|^2 \|v(\gamma, x)\|^2 \leqslant c(\gamma) \|f(\gamma, x)\|^2$ при каждом γ, лежащим правее контура $l_{\delta_1}^{\alpha,\beta}$, за исключением $\gamma = 0$, $0 < \varepsilon_1 < c(\gamma) < \varepsilon_2$.

Теорема 1. Пусть функция $f(\gamma, x)$ принадлежит пространству $L_2([0, \infty))$ по переменной x при $\operatorname{Re}\gamma \geqslant -\varepsilon$, для функции $\rho_0(x)$ выполнено условие 1, тогда при каждом фиксированном γ лежащем правее контура $l_{\delta_3}^{\alpha_3,\beta_3}$, за исключением, быть может, $\gamma = 0$ у задачи (1) существует единственное решение из $H^2([0, \infty))$.

Теорема 2. Пусть функции $f(\gamma, x), v(\gamma, x)$, $\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 v(\gamma,x)}{\partial x^2}$ принадлежат пространству $L_2([0, \infty))$ по переменной x при каждом γ, лежащем правее некоторого контура $l_\delta^{\alpha,\beta}$, функция $f(\gamma, x)$ аналитична по γ при каждом фиксированном x, для функции $\rho_0(x)$ выполнено условие 1 и функция $f(\gamma, x)$ аналитична по γ равномерно по $x \in [0, \infty)$, тогда при γ лежащем правее контура $l_\delta^{\alpha,\beta}$ функции $v(\gamma, x)$, $\frac{\partial v(\gamma,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 v(\gamma,x)}{\partial x^2}$ будут аналитичны по γ равномерно по $x \in [0, \infty)$.

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕЖФАЗНОЙ ЗОНЫ В НЕКОТОРОЙ СИНГУЛЯРНО ПРЕДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ

Селиванова Н.Ю., Шамолин М.В. (Москва)
shamolin@imec.msu.ru, shamolin@rambler.ru

Продолжается исследование математической модели сепарации двухкомпонентного сплава свинец–олово, рассмотренной в [1], с существенно различными кристаллическими структурами компонент. Проблема описания процесса возникновения и роста кристалла остается на сегодняшний момент одной из труднейших задач математической физики. Важнейшую роль в исследовании классической модели Кана–Хилларда [2] сыграла ее сингулярно-предельная задача — так называемая задача Мелина–Сикерка со свободной границей, позволившая на сегодняшний момент только численно описать неустойчивость процесса кристаллизации. Целью данной работы является подготовка материала для вывода сингулярно предельной задачи для существенно несимметричной модели [2, 3].

Литература

[1] *Радкевич Е. В., Захарченко М.* Асимптотическое решение расширенной модели Кана–Хилларда // Соврем. мат. и ее прил. — 2003. — *2*. — С. 121–138.

[2] *Cahn J. W., Hilliard J. E.* Free energy of a non-uniform system, Part I: Interfacial free energy // J. Chemical Physics. — 1958. — *28*, № 1. — С. 258–267.

[3] *Dreyer W. and Muller W. H.* A study of the coarseing in tin/lead solders // Int. J. Solids Structures. — 2000. — *37*. — С. 3841–3871.

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ЗАДАННОЙ НА ОБЛАСТИ С НЕГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ

Семенов С.Л. (Воронеж)

sergo_7@list.ru

В работе устанавливается принадлежность решений начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности заданной на области с кусочно-плоской границей специальным функциональным пространствам с топологией заданной системой полунорм. А именно, пусть Ω – замкнутая область в R^n с границей $\partial\Omega$, являющейся объединением $n-1$ мерных поверхностей с нулевой кривизной. Рассматривается пространство $E^{2+\lambda}(\Omega)$ с топологией определяемой следующей системой норм

$$p_0(\varphi) = ||\varphi||_{C(\Omega)}$$

$$p_i(\varphi) = ||\varphi||_{C^{2+\lambda}(D_i)} + ||\varphi||_{C^{2+\lambda}(B_i)} \quad i = 1, 2, \dots,$$

где $D_1 \subset D_2 \subset D_3 \ldots \subset \Gamma$, $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} D_i} = \Gamma$ и ∂B_i — гладкая поверхность, $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \ldots \subset \Gamma$, $\partial B_i \cap \partial\Omega = \varnothing$, $\partial B_i \cap \partial\Gamma \neq \varnothing$, $\partial B_1 \cap \partial\Gamma \subset B_2 \cap \partial\Gamma \subset \ldots \subset \partial\Gamma$.