СЛУЧАИ ПОЛНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

М. В. Шамолин

МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

В работе исследуется динамическая часть уравнений пространственного движения осесимметричного твердого тела в сопротивляющейся среде [1, 2] при выполнении гипотезы квазистационарности, когда выполнены условия струйного или отрывного обтеканий. Если тело движется без собственного вращения, то при определенных условиях такая система приводится к следующему виду:

$$
\begin{aligned}
&v' = \Psi(\alpha, Z_1, Z_2),\\
&\alpha' = -Z_2 + \sigma\left(Z_1^2 + Z_2^2\right)\sin\alpha + \sigma F(\alpha)\cos\alpha/I_2,\\
&Z_2' = F(\alpha)/I_2 - Z_2\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) - Z_1^2\cos\alpha/\sin\alpha,\\
&Z_1' = -Z_1\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) + Z_1 Z_2\cos\alpha/\sin\alpha,\\
&\beta' = Z_1\cos\alpha/\sin\alpha,\\
&\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) = -\sigma\left(Z_1^2 + Z_2^2\right)\cos\alpha + \sigma F(\alpha)\sin\alpha/I_2,
\end{aligned} \tag{1}
$$

где (v, α, β) — сферические координаты некоторой характерной точки твердого тела, Z_1, Z_2 — две поперечных компоненты угловой скорости тела в проекциях на систему координат, связанную с телом, σ — расстояние от центра масс тела до кавитатора, I_2 — главный поперечный его момент инерции.

Функцию $F(\alpha)$, также присутствующую в системе (1), будем принимать в виде С. А. Чаплыгина [3]:

$$
F(\alpha) = AB\sin\alpha\cos\alpha,\ \ A, B > 0. \tag{2}
$$

Теорема 1. *Система (1) при условии (2) обладает полным набором первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций, и при этом являющихся, вообще говоря, трансцендентными функциями фазовых переменных.*

Трансцендентность в данном случае понимается в смысле теории функций комплексного переменного, когда после формального продолжения рассматриваемых функций в комплексную область у последних имеются существенно особые точки, соответствующие притягивающим или отталкивающим множествам самой динамической системы.

На самом деле один из интегралов системы является аналитической функцией, а вот остальные — функции трансцендентные.

В частности, аналитический первый интеграл системы (1) имеет следующий вид:

$$v^2\left(1 - 2\sigma Z_2 \sin\alpha + \sigma^2(Z_1^2 + Z_2^2)\right) = \text{const}, \tag{3}$$

а один из трансцендентных можно представить в виде

$$\frac{Z_1^2 + Z_2^2 - \sigma n_0 Z_2 \sin\alpha + \sin^2\alpha}{Z_1 \sin\alpha} = \text{const},\ \ n_0^2 = \frac{AB}{I_2}. \tag{4}$$

Видно, что у первого интеграла (4) имеется существенно особые точки $(\pi k, 0, 0)$, $k \in \mathbf{Z}$, соответствующие притягивающим или отталкивающим положениям равновесия системы (1) (если, конечно в данных точках саму систему доопределить по непрерывности).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№08-01-00231-а).

Список литературы

1. *Шамолин М.В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Изд–во "Экзамен", 2007.
2. *Шамолин М.В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фунд. и прикл. мат. 2008. Т. 14. № 3. С. 3–237.
3. *Чаплыгин С.А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // В кн. Полн. собр. соч. Т. 1. Л.: Изд–во АН СССР, 1933. С. 133–135.

CASES OF COMPLETE INTEGRABILITY OF THE EQUATIONS OF A SPATIAL MOTION OF A RIGID BODY IN A RESISTING MEDIUM

O. A. Kuzenkov, E. A. Ryabova

N. I. Lobachevskiy State University of Nizhniy Novgorod, Russia

Bearing this in mind, we next carry out the global qualitative analysis of systems of differential equations that arise when the motion of a rigid body in the resisting motion under the action of only a pair of forces on this body is described. There were obtained the new cases of complete integrability of the dynamic part of the system of the equations of such motion.