Qualitative Methods to the Dynamic Model of an Interaction of a Rigid Body with a Resisting Medium and New Two-Parametric Families of the Phase Portraits

М. В. Шамолин

Как известно, задача о движении твердого тела в безграничном объеме среды из-за своей сложности требует введения целого ряда упрощающих предположений, при этом основным является введение таких гипотез, которые позволили бы изучать движение твердого тела отдельно от движения среды, в которую данное тело помещено. Подобные действия были предприняты в классической задаче Кирхгофа [1], но и она не исчерпывает возможностей моделирования подобного типа.

Данная работа представляет собой исследование задачи плоскопараллельного движения симметричного твердого тела, взаимодействующего со средой лишь через плоский участок (кавитатор) его внешней поверхности. При построении силового поля используется информация о свойствах струйного обтекания в условиях квазистационарности, при этом движение среды не изучается [2,3].

В отличие от предыдущих работ (см. также [4]), в которых зависимостью момента силы воздействия среды от угловой скорости тела пренебрегалось, в данной работе, в соответствие с экспериментом [5], учитываются эффекты от влияния вращательных производных момента гидроаэродинамических сил по компонентам угловой скорости тела [6,7].

С практической точки зрения важен вопрос исследования устойчивости прямолинейного поступательного движения, при котором скорости точек тела перпендикулярны кавитатору (угол атаки при этом тождественно равен нулю).

Необходимость же полного нелинейного исследования подтверждается важностью нахождения таких условий, при которых существуют колебания ограниченной амплитуды возле прямолинейного поступательного движения, которое является неустойчивым по отношению к углу атаки и угловой скорости [5].

1. Динамическая часть уравнений движения

Рассмотрим плоскопараллельное движение симметричного однородного твердого тела массы m с передним плоским торцом (пластиной) в сопротивляющейся среде (см. также [2-5]). В случае отсутствия касательных сил воздействие среды на тело сводится к силе **S** (приложенной в некоторой точке *N*), ортогональной пластине.

В динамической модели органично вводятся следующие три фазовые координаты: $v=|\vec{v}|$ – величина скорости центра *D* пластины относительно среды, α – угол атаки, Ω – алгебраическое значение проекции угловой скорости тела на ось, перпендикулярную движению.

Величина силы **S** квадратично зависит от v ($S = s_1 v^2$) с коэффициентом s_1 (ньютоновское сопротивление). Воздействие среды на тело определяется двумя знакопеременными функциями фазовых переменных: $y_N = DN$ и $s = s_1 \operatorname{sgn} \cos\alpha$. В принципе будем считать величину s функцией α, а величину y_N функцией пары безразмерных переменных (α, ω), $\omega \cong \Omega / v$.

Фазовое состояние системы определяется с помощью шести функций, три из которых — v, α, Ω — рассматриваются в качестве квазискоростей системы, при этом три других (кинематические переменные) являются циклическими, что приводит к понижению порядка общей системы уравнений движения.

В нее также входят функции $y_N(\alpha, \omega)$ и $s(\alpha)$, определяющие воздействие среды на тело. Как уже отмечалось, функция y_N, кроме как от угла атаки, зависит еще и от приведенной угловой скорости ω. Если, в частности, последней зависимостью пренебречь (как было в ряде предыдущих работ), то величина y_N является функцией лишь угла атаки: $y_N = y(\alpha)$, а ее зависимость от единственного аргумента определяется с помощью экспериментальной информации о свойствах струйного обтекания. Тогда в дальнейшем применяется метод «погружения» задачи в более общий класс задач [3].

Основной целью данной работы является учет влияния вращательных производных момента силы воздействия среды по угловой скорости тела, требующий введения в функции воздействия среды дополнительного аргумента, что само по себе является нетривиальной задачей моделирования. В данной работе ограничимся введением угловой скорости в качестве аргумента лишь в функцию y_N, а подобным ее введением в приведенный коэффициент сопротивления s пренебрежем.

В дальнейшем величину y_N будем рассматривать в следующем виде:

$$y_N(\alpha,\omega) \cong y_N(\alpha,\frac{\Omega}{v}) = y(\alpha) - H\frac{\Omega}{v},$$

при этом $H > 0$, в силу результатов эксперимента [5].

Тогда уравнение об изменении кинетического момента запишется как

$$I\Omega^{\bullet} = F(\alpha)v^2 - Hs(\alpha)\Omega v, \; F(\alpha) = y(\alpha)s(\alpha),$$

при этом, поменяв дифференцирование, динамическая часть уравнений движения приводится к следующему виду:

$$v' = \Psi(\alpha,\omega)v, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= \omega + \sigma\omega^2 \sin\alpha + \frac{\sigma}{I}F(\alpha)\cos\alpha + \frac{s(\alpha)}{m}\sin\alpha + \frac{\sigma}{I}h\omega s(\alpha)\cos\alpha, \\ \omega' &= -\frac{1}{I}F(\alpha) + \sigma\omega^3\cos\alpha - \frac{\sigma}{I}\omega F(\alpha)\sin\alpha + \omega\frac{s(\alpha)}{m}\cos\alpha - \\ &\quad -\frac{B}{I}h\omega\cos\alpha - \frac{\sigma}{I}h\omega^2 s(\alpha)\sin\alpha, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\Psi(\alpha,\omega) = -\sigma\omega^2\cos\alpha + \frac{\sigma}{I}F(\alpha)\sin\alpha - \frac{s(\alpha)}{m}\cos\alpha + \frac{\sigma}{I}h\omega s(\alpha)\sin\alpha$. Два последних уравнения (2) системы (1), (2) образуют независимую подсистему второго порядка на фазовом цилиндре $S^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times R^1\{\omega\}$.

2. «Погружение» задачи в более широкий класс задач

Система (1), (2) содержит функции $F(\alpha)$, $s(\alpha)$, явный вид которых, даже для пластин простой формы, аналитически описать довольно затруднительно. По этой причине используется прием «погружения» данной задачи в более широкий класс задач, учитывающий лишь качественные свойства функций $F(\alpha)$, $s(\alpha)$.

Опорным для нас является результат С. А. Чаплыгина, который для плоскопараллельного струйного обтекания пластины бесконечной длины получил функции $y(\alpha)$, $s(\alpha)$ в аналитическом виде [8]:

$$y(\alpha) = y_0(\alpha) = A\sin\alpha \in \{y\}, \; A > 0, \tag{3}$$

$$s(\alpha) = s_0(\alpha) = B\cos\alpha \in \{s\}, \; B > 0. \tag{4}$$

Этот результат помогает построить функциональные классы $\{y\}$, $\{s\}$, а затем и $\{F\}$. Сочетая (3), (4) с экспериментальной информацией о свойствах струйного обтекания, опишем необходимые классы, состоящие из функций достаточно гладких, 2π–периодических ($y(\alpha)$ – нечетная, а $s(\alpha)$ – четная), удовлетворяющих следующим условиям: $y(\alpha)>0$ при $\alpha\in(0,\pi)$, причем $y'(0)>0, y'(\pi)<0$ (класс функций $\{y\}=\mathrm{Y}$); $s(\alpha)>0$ при $\alpha\in\left(0,\pi/2\right)$, $s(\alpha)<0$ при $\alpha\in\left(\pi/2,\pi\right)$, причем $s(0)>0, s'\left(\pi/2\right)<0$ (класс функций $\{s\}=\Sigma$). Как y, так и s меняют знак при замене α на $\alpha+\pi$. Таким образом,

$y\in\mathrm{Y}$, $s\in\Sigma$.

Из вышеперечисленных условий следует, что F – достаточно гладкая нечетная π–периодическая функция, удовлетворяющая условиям: $F(\alpha)>0$ при $\alpha\in\left(0,\pi/2\right), F'(0)>0, F'\left(\pi/2\right)<0$ (класс функций $\left\{F\right\}=\Phi$). Таким образом,

$F\in\Phi.$

В частности, аналитическая функция [8]

$$F=F_0(\alpha)=AB\sin\alpha\cos\alpha\in\Phi \tag{5}$$

является типичным представителем класса функций Φ.

В связи с отмеченной в [5] неустойчивостью прямолинейного поступательного торможения можно поставить следующий вопрос: существуют ли угловые колебания оси симметрии тела конечной (ограниченной) амплитуды?

Сформулируем этот вопрос в более общем виде: существует ли пара функций y и s воздействия среды такая, чтобы для некоторого решения динамической части уравнений движения выполнялось бы ограничение $0<\alpha(t)<\alpha^*<\pi/2$, начиная с некоторого момента времени $t=t_1$?

При простейшем предположении на функции y_N и s воздействия среды на тело ранее показано [3,4], что при квазистационарном описании взаимодействия среды с симметричным телом (когда величины y_N и s зависят лишь от угла атаки (H = 0)) для любой допустимой пары функций $y(\alpha)$ и $s(\alpha)$ воздействия среды во всем диапазоне ($0<\alpha<\pi/2$) конечных углов атаки в системе отсутствуют какие-либо колебательные решения конечной (ограниченной) амплитуды.

Таким образом, для возможного положительного ответа на вопрос, поставленный выше, необходимо «привлекать» зависимость момента силы воздействия среды от приведенной угловой скорости. Как будет показано далее, при некоторых предположениях ответа на данный вопрос в принципе можно ожидать положительного.

Конечно, с практической точки зрения важен анализ динамических уравнений лишь в окрестности прямолинейного поступательного торможения, поскольку при некоторых углах атаки происходит замыв боковой поверхности, и настоящая модель воздействия среды на тело перестает быть достоверной. Но, во-первых, для тел с боковой поверхностью различной формы величины критических углов атаки, вообще говоря, различны и неизвестны. Поэтому приходится исследовать весь диапазон углов. Во-вторых, исходная система (1), (2) является механической системой маятникового типа, обладающей интересными нелинейными свойствами, что побуждает проводить полный нелинейный анализ. Тем самым, вторая часть данной работы представляет самостоятельный методический интерес.

Итак, для исследования плоскопараллельного обтекания пластины средой используются классы динамических систем, определенные с помощью пары функций воздействия среды, что значительно усложняет проведение качественного анализа.

3. Многопараметрическое семейство фазовых портретов системы на двумерном цилиндре

Динамическая система (2) имеет на двумерном фазовом цилиндре следующие положения равновесия.

$$(0,0) \text{ и } (\pi,0). \tag{6}$$

$$(\pi/2,0) \text{ и } (3\pi/2,0). \tag{7}$$

$$(\pi/2,1/\sigma) \text{ и } (-\pi/2,-1/\sigma). \tag{8}$$

Необходимо заметить, что положения равновесия (7) при любых допустимых параметрах задачи являются седлами, а положения равновесия (8) — притягивающими.

Для системы вида (1), (2) удобно ввести следующие три безразмерных параметра:

$$\mu_1 = 2\frac{B}{mn_0},\ \mu_2 = \sigma n_0,\ \mu_3 = \frac{Bh}{In_0},\ n_0^2 = \frac{AB}{I},\ B = s(0),\ AB = F'(0). \tag{9}$$

Введем обозначения для полос на фазовом цилиндре:

$$\Pi = \left\{(\alpha,\omega) \in R^2 : -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right\},\ \Pi' = \left\{(\alpha,\omega) \in R^2 : \frac{\pi}{2} < \alpha < 3\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Теорема 1. В бесконечномерном пространстве параметров системы (2) имеется область **J** положительной меры, которая соответствует следующему поведению траекторий данной системы:

1) других положений равновесия, кроме как (6)-(8), система (2) не имеет;

2) в полосе Π' *система (2) не имеет замкнутых фазовых характеристик;*

3) в полосе П около положения равновесия (0,0) *при изменении параметров (9) может происходить бифуркация рождения единственного устойчивого предельного цикла из слабого фокуса.*

Рассмотрим также следующую подобласть области **J**:

$J_1 = \{(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in R^3 : 0 < \mu_3 - \mu_2 < 2\}$.

В данной работе рассматривается лишь следующая бесконечномерная область параметров системы (2):

$$\mathbf{J} \cap J_1. \qquad (10)$$

Замечание. Области параметров (10) соответствует следующее поведение фазовых траекторий возле положений равновесия (6):

1) положение равновесия $(\pi,0)$ является отталкивающим;

2) положение равновесия (0,0) является отталкивающим, если $\mu_1 > \mu_3 - \mu_2$, и притягивающим, если $\mu_1 \le \mu_3 - \mu_2$, при этом если $\mu_1 = \mu_3 - \mu_2$, то оно является слабым притягивающим фокусом.

Замкнутые кривые, состоящие из фазовых траекторий системы (2), для области параметров (10) могут существовать лишь в полосе Π [3,9].

Основным вопросом классификации портретов является вопрос о поведении устойчивых и неустойчивых сепаратрис имеющихся гиперболических седел.

Рассмотрим ключевые вопросы – о глобальном поведении следующих сепаратрис:

а) выходящей из точки $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ в полосу Π';

б) входящей в точку $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ из полосы Π;

в) выходящей из точки $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ в полосу Π.

Под независимостью поведения данных сепаратрис будем понимать ситуацию, при которой они имеют предельные множества, независимо выбираемые из области определения всех логически возможных их предельных множеств, принимая во внимание характер расположения всех изоклин системы и имеющихся положений равновесия.

Теорема 2. *Глобальное поведение любых двух сепаратрис из а)–в) независимо, т. е. поведение третьей сепаратрисы определяется через поведение двух других.*

Выберем в качестве пары ключевых сепаратрис, поведение которых независимо, сепаратрисы а) и б).

Определение 1. *Индексом k_1 сепаратрисы а) назовем рациональное число, выбираемое из множества*

$$\left\{r \in Q : r = \frac{1}{4} + m,\, r = \frac{1}{2} + m,\, m \in N_0\right\}.$$

Скажем, что $k_1 = r$, если сепаратриса а) имеет в качестве $\omega-$ предельного множества точку $\left(2\pi r, \frac{1}{\sigma}\right)$, если $r = \frac{1}{4} + m$, и точку $(2\pi r - 0, +\infty)$, если $r = \frac{1}{2} + m$.

Определение 2. *Индексом k_2 сепаратрисы б) назовем натуральное число j, выбираемое из множества*

$$\{j \in N : j = 1,2,3,4,5\}.$$

Скажем, что $k_2 = j$, если сепаратриса б) имеет в качестве $\alpha-$ предельного множества точку $(0,0)$ или устойчивый предельный цикл ($j = 1$); точку $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ ($j = 2$); точку $(\pi,0)$ ($j = 3$); точку $(-0,-\infty)$ ($j = 4$); точку $(-\pi,0)$ ($j = 5$).

Таким образом, видно, что глобальное поведение сепаратрисы в) действительно зависит от индексов k_1 и k_2, т. е. от поведения сепаратрис а) и б) в каждом конкретном случае.

Замечание. Если фиксировать индекс k_1, то индекс k_2 может в некоторых случаях выбираться из более узкого множества, описанного в определении 2.

Теорема 3. *Для любого k из (возможно усеченной) области определения допустимо соответствующее глобальное поведение сепаратрис а) и б).*

Таким образом, определения 1 и 2 корректны, и строится бесконечное семейство фазовых портретов, содержащее портреты с предельными циклами, при этом все портреты имеют различные качественные свойства.

Теорема 3 позволяет сделать следующий вывод: любое достаточно малое возмущение, дающее искомую систему в рассматриваемой области параметров, описывающей физический маятник на плоскости, бесконечно много раз перестраивает глобальный тип гамильтонового фазового портрета физического маятника.

Некоторые из портретов (индекс k принимает значения $(1/4,2)^*$, $(1/4,4)^*$, $(1/4,5)$, $(1/2,3)^*$) показаны, соответственно, на фиг. 1-4. Здесь звездочкой помечены фазовые портреты, имеющие в полосе Π предельные циклы.

Для системы частного вида (2) при выполнении условий (3), (4) (или (5)) имеем, таким образом, некоторое *трехпараметрическое семейство* фазовых портретов.

Двухпараметрическое семейство, построенное в [4], не содержит предельных циклов, в отличие от только что построенного семейства. Но эти два семейства объединяет тот факт, что каждым значениям безразмерных параметров задачи соответствует пара независимых индексов (в данном случае k_1, k_2), «кодирующих» топологический тип фазового портрета.

Заметим, что многие утверждения данного параграфа справедливы и в более широких областях параметров.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 05-08-01378-а и 05-01-00401-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика. - М.: Физматгиз, 1947. - 928 с.
2. Локшин Б. Я., Привалов В. А., Самсонов В. А. Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. - М.: МГУ, 1986. - 86 с.
3. Шамолин М. В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Изд–во «Экзамен», 2006. – 352 с.
4. Шамолин М. В. Новое двупараметрическое семейство фазовых портретов в задаче о движении тела в среде // Доклады РАН. - 1994. - Т. 337. - № 5. - С. 611-614.
5. Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В. Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании // Известия РАН. - МЖГ. - 1995. - № 3. - С. 23-27.
6. Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В. Динамика продольного и бокового движения. М.: Машиностроение, 1969. - 349 с.
7. Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В. Динамика самолета. Пространственное движение. М.: Машиностроение, 1988. - 320 с.
8. Чаплыгин С. А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // В кн. Полн. собр. соч. Т.1. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. - С. 133-135.
9. Шамолин М. В. Замкнутые траектории различного топологического типа в задаче о движении тела в среде с сопротивлением // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. - 1992. - № 2. - С. 52-56.

УДК 531.01+531.552 МЕХАНИКА

Трехпараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой

М. В. Шамолин

АВТОРЕФЕРАТ

Работа представляет собой исследование задачи плоскопараллельного движения симметричного твердого тела, взаимодействующего со средой через плоский участок своей внешней поверхности. При построении силового поля используется информация о свойствах струйного обтекания при учете вращательных производных момента силы воздействия среды по угловой скорости тела в условиях квазистационарности, при этом движение среды не изучается.

Применяется разработанная автором ранее методика полного нелинейного исследования диссипативных динамических систем определенного вида, при этом получено трехпараметрическое семейство фазовых портретов с предельными циклами на фазовом цилиндре, состоящее из топологически неэквивалентных портретов.

M. V. Shamolin

Three-parameter family of the phase patterns in dynamics of a rigid body Interacting with the medium