

МЕТОДЫ АНАЛИЗА СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННОЙ ДИССИПАЦИЕЙ В ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО СО СРЕДОЙ

М. В. Шамолин, д.ф.-м.н.

Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова
shamolin@imec.msu.ru, shamolin@professor.ru

Построить общую теорию исследования систем обыкновенных дифференциальных уравнений пусть даже и не самого общего вида не представляется возможным. Поэтому данная работа не является очередной попыткой в этом направлении, а лишь обобщает качественные исследования по динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, начатого уже много лет назад.

1. Системы с переменной диссипацией

Рассмотрим, для примера, маятниковую систему второго порядка, заданную на цилиндре $\ddot{O} = \{(\alpha, \omega) \in R^2 : \alpha \bmod T\}$

$$\alpha^\bullet = -\omega + f(\alpha), \quad \omega^\bullet = g(\alpha), \quad (1)$$

$$f(\alpha + T) = f(\alpha), \quad g(\alpha + T) = g(\alpha),$$

эквивалентную уравнению

$$\alpha^{\bullet\bullet} - f'(\alpha)\alpha^\bullet + g(\alpha) = 0. \quad (2)$$

В уравнении (2) видно наличие позиционной составляющей $g(\alpha)$ обобщенной силы, а также линейной диссипативной силы с коэффициентом, зависящим от α : $-f'(\alpha)$, который в принципе может менять знак при изменении α , тем самым в различных полосах фазового цилиндра \mathcal{C} обеспечивая или рассеяние, или подкачку энергии.

Но уже в данном случае видно, что в среднем за период T диссипация в системе равна нулю:

$$\int_0^T f'(\alpha) d\alpha = 0.$$

Итак, мы имеем пример системы со (знако)переменной диссипацией, при этом равной нулю в среднем за период (с так называемым нулевым средним).

Сразу отметим, что коэффициент диссипации $-f'(\alpha)$ с точностью до знака равен дивергенции правой части системы (1), при этом сама дивергенция, кроме этого, «отвечает» и за изменение фазового объема. Поэтому подмечаем еще один факт: у таких систем, вообще говоря, в некоторых частях фазового цилиндра \mathcal{C} в среднем за период может сохраняться фазовая площадь.

2. Направления, развиваемые в работе

Перечислим направления, развиваемые в работе для многомерных систем в соответствии с приведенным выше примером.

1) Условия наличия и отсутствия замкнутых характеристик динамических систем на многомерных поверхностях.

2) Метод исследования систем большого порядка с помощью топографических систем Пуанкаре и более общих систем сравнения.

3) Условия наличия у динамических систем с переменной диссипацией интегрального инварианта (сохранение фазового объема).

4) Введение новых определений относительной грубости и ее доказательство для систем с переменной диссипацией.

5) Аспект полной интегрируемости в трансцендентных функциях.

Работа содержит обзор аналитических и геометрических методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, обладающих определенными симметриями. Основное место в данном исследовании занимают полный качественный (топологический) анализ и поиск полного набора первых интегралов систем, обладающих в некоторой части фазового пространства, наряду с рассеянием обобщенной энергии, свойствами, характеризующими ее подкачку. В основе данного исследования лежит идея изучения таких систем «в целом», т.е. отсутствия деления их фазового пространства на части, отвечающие свойствам рассеяния или подкачки энергии.

Специальное внимание уделено разработке геометрических методов исследования систем достаточно общего вида на предмет наличия или отсутствия у них замкнутых характеристик, которые, в зависимости от топологии фазового многообразия, могут по-разному влиять на интегрируемость и качественное расположение фазовых траекторий «в целом».

Одно из главных мест исследования принадлежит обнаружению полного набора трансцендентных (в смысле классификации их особенностей) первых интегралов динамических систем, обладающих асимптотическими предельными множествами – отталкивающими или притягивающими. В частности, найдены новые интегрируемые случаи в обобщенных динамических системах с переменной диссипацией.

Рассмотрены задачи из динамики твердого тела, взаимодействующего со средой, а именно, о движении динамически симметричного свободного тела при наличии или отсутствии следящей силы, а также тел частично закрепленных (маятников), находящихся в однородном потоке набегающей среды. Найдены новые семейства многомерных фазовых портретов, как (абсолютно или относительно) грубых, так и негрубых различной степени данной негрубости, при этом состоящих из бесчисленного множества топологически неэквивалентных портретов.