

---

**Методы анализа динамических систем с определенной группой симметрий**  
**Methods of analysis of dynamical systems with some group of symmetry**

Шамолин М.В.

*Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Мичуринский пр.,  
д. 1, Москва, 119899, Российская Федерация*  
e-mail: shamolin@imec.msu.ru, shamolin@professor.ru

---

Построить общую теорию исследования систем обыкновенных дифференциальных уравнений пусть даже и не самого общего вида не представляется возможным. Поэтому данная работа не является очередной попыткой в этом направлении. Она лишь обобщает качественные исследования в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, начатого уже много лет назад. Тогда пришлось столкнуться с динамическими системами, обладающими очень интересными свойствами.

**1. Системы с переменной диссипацией**

Рассмотрим, для примера, маятниковую систему второго порядка, заданную на цилиндре  $P = \{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \bmod T\}$ :

$$\dot{\alpha} = -\omega + f(\alpha), \quad \dot{\omega} = g(\alpha), \quad f(\alpha + T) = f(\alpha), \quad g(\alpha + T) = g(\alpha),$$

эквивалентную уравнению

$$\ddot{\alpha} - f'(\alpha)\dot{\alpha} + g(\alpha) = 0.$$

В данном уравнении видно наличие позиционной составляющей  $g(\alpha)$  обобщенной силы, а также линейной диссипативной силы с коэффициентом, зависящим от  $\alpha$ :  $-f'(\alpha)$ , который в принципе может менять знак при изменении  $\alpha$ , тем самым в различных полосах фазового цилиндра  $P$  обеспечивая как рассеяние, так и подкачку энергии.

Но уже в данном случае видно, что в среднем за период диссипация в системе равна нулю:

$$\int_0^T f'(\alpha) d\alpha = 0.$$

Итак, мы имеем пример системы со (знако)переменной диссипацией, при этом равной нулю в среднем за период (с так называемым *нулевым средним*).

Сразу отметим, что коэффициент диссипации  $-f'(\alpha)$  с точностью до знака равен дивергенции правой части рассматриваемой системы,

при этом сама дивергенция, кроме этого, "отвечает" и за изменение фазового объема. Поэтому подмечаем еще один факт: у таких систем, вообще говоря, в некоторых частях фазового цилиндра  $P$  в среднем за период может сохраняться фазовая площадь.

## 2. Направления, развиваемые в работе

Перечислим направления, которые были развиты в работе для многомерных систем в соответствии с приведенным выше примером.

А) Условия наличия и отсутствия замкнутых характеристик динамических систем на многомерных поверхностях.

Б) Метод исследования систем большого порядка с помощью топологических систем Пуанкаре и более общих систем сравнения.

В) Условия наличия у динамических систем с переменной диссипацией интегрального инварианта (сохранение фазового объема).

Г) Поиск устойчивых по Пуассону траекторий.

Д) Введение новых определений относительной грубости и ее доказательство для систем с переменной диссипацией.

Е) Аспект полной интегрируемости в трансцендентных функциях.

Работа содержит обзор аналитических и геометрических методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, обладающих определенными симметриями. Основное место в данном исследовании занимает полный качественный (топологический) анализ систем, обладающих в некоторой части фазового пространства, наряду с рассеянием обобщенной энергии, свойствами, характеризующими ее подкачку. В основе данного исследования лежит идея изучения таких систем "в целом", т.е. отсутствие деления их фазового пространства на части, отвечающие свойствам рассеяния или подкачки энергии.

Одно из главных мест исследования принадлежит обнаружению полного набора трансцендентных (в смысле классификации их особенностей) первых интегралов динамических систем, обладающих асимптотическими предельными множествами — отталкивающими или притягивающими. В частности, найдены новые интегрируемые случаи в более общих системах, чем системы, описывающие пространственную динамику твердого тела, взаимодействующего со средой.

## Список литературы

- [1] Шамолин М.В., "О грубости диссипативных систем и относительной грубости и негрубости систем с переменной диссипацией," *Успехи матем. наук*, 54, No. 5, 181-182 (1999).
- [2] Шамолин М.В., *Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией*, Экзамен, (2007).