

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

М. В. Шамолин¹, д.ф.-м.н., Институт механики Московского
Государственного Университета им. М. В. Ломоносова
Российская Федерация, 119192 Москва, Мичуринский пр-т, 1
shamolin@imec.msu.ru

Известные редуцированные динамические уравнения пространственного движения динамически симметричного твердого тела в сопротивляющейся среде [1] имеют следующий вид:

$$\alpha^{\bullet} v \cos \alpha \cos \beta_1 - \beta_1^{\bullet} v \sin \alpha \sin \beta_1 + \Omega_z v \cos \alpha - \sigma \Omega_z^{\bullet} = 0, \quad (1)$$

$$\alpha^{\bullet} v \cos \alpha \sin \beta_1 + \beta_1^{\bullet} v \sin \alpha \cos \beta_1 - \Omega_y v \cos \alpha + \sigma \Omega_y^{\bullet} = 0, \quad (2)$$

$$I_2 \Omega_y^{\bullet} = -z_N s(\alpha) v^2, \quad I_2 \Omega_z^{\bullet} = y_N s(\alpha) v^2. \quad (3)$$

Здесь $diag\{I_1, I_2, I_2\}$ — тензор инерции, (v, α, β_1) — сферические координаты характерной его точки, $|\vec{v}| = v \equiv const$, $(\Omega_x = \Omega_{x_0} \equiv 0, \Omega_y, \Omega_z)$ — его угловая скорость, а также $(A, B, h, \sigma > 0)$
 $y_N = A \sin \alpha \cos \beta_1 + h \Omega_z / v$, $z_N = A \sin \alpha \sin \beta_1 - h \Omega_y / v$, $s(\alpha) = B \cos \alpha$.

Система (1)-(3) является так называемой динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним (в данном случае по углу α). Это означает, что интеграл по периоду угла атаки от дивергенции ее правой части равен нулю. Система является как бы «полуконсервативной». Если $z_1 = \Omega_y \cos \beta_1 + \Omega_z \sin \beta_1$,

$z_2 = -\Omega_y \sin \beta_1 + \Omega_z \cos \beta_1$, $\sigma h_1 / I_2 = H_1$, $\beta = \sigma^2 AB / I_2$, $\sigma z_k = v w_k$,
 $k = 1, 2$ ($\alpha' = v \alpha^{\bullet} / \sigma$ и т. д.), получаем систему следующего вида:

$$\alpha' = -(1 + H_1) w_2 + \beta \sin \alpha, \quad (4)$$

$$w_2' = \beta \sin \alpha \cos \alpha - (1 + H_1) w_1^2 \operatorname{ctg} \alpha - H_1 w_2 \cos \alpha, \quad (5)$$

$$w_1' = (1 + H_1) w_1 w_2 \operatorname{ctg} \alpha - H_1 w_1 \cos \alpha, \quad (6)$$

$$\beta_1' = (1 + H_1) w_1 \operatorname{ctg} \alpha, \quad (7)$$

Теорема. Система (4)-(7) обладает полным набором первых интегралов, являющихся элементарными трансцендентными (в смысле ТФКП) функциями своих фазовых переменных.

Литература

1. Шамолин М. В. Новое семейство фазовых портретов в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Доклады РАН, 2000. — Т. 371. — № 4. — С. 480–483.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта Президента Российской Федерации для молодых докторов наук (МД-2311.2005.1) и РФФИ (гранты 05-08-01378-а и 05-01-00401-а).