Об одном интегрируемом случае в динамике на $so(4) \times R^4$

М. В. Шамолин, д.ф.-м.н., ст.н.с. Института механики МГУ

Качественная структура динамических уравнений движения свободного двухмерного и трехмерного твердого тела на $so(2) \times R^2$ и $so(3) \times R^3$, соответственно, сохраняется при переносе динамических свойств на случай большей размерности. Настоящая работа посвящена изучению движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле сил сопротивления с так называемой переменной диссипацией.

Системы со (знако)переменной диссипацией понимаем в следующем смысле. Пусть в некоторых координатах дивергенция правой части (которая "отвечает"за изменение фазового объема) гладкой системы обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих по крайней мере одну периодическую координату, не тождественно равна нулю. Тогда такая система называется динамической системой с переменной диссипацией с нулевым (с ненулевым) средним, если интеграл от полученной дивергенции по периодической координате за ее период равен (не равен) нулю.

Динамические системы с переменной диссипацией с нулевым средним часто в некоторых областях своего фазового пространства допускают сохранение фазового объема с переменной плотностью.

Кратко о физических предположениях. Предполагается что все взаимодействие (четырехмерного) твердого тела со средой сосредоточено на той части (трехмерной) поверхности тела, которая имеет форму (трехмерного) шара. При этом вектор угловой скорости движения такого тела – элемент алгебры $so(4)$, а скорость центра масс – элемент R^4.

Если оператор инерции в декартовой системе $Dx_1x_2x_3x_4$, связанной с телом (ось Dx_1 направлена вдоль оси динамической симметрии, а декартова система $Dx_2x_3x_4$ связана с трехмерным шаром), имеет диагональный вид $diag I_1, I_2, I_3, I_4$, $\Omega \in so(4)$ – матрица $<$угловой скорости$>$ твердого тела, то та часть уравнений движения, которая отвечает алгебре $so(4)$, имеет следующий вид:

$$\dot{\Omega}\Lambda + \Lambda\dot{\Omega} + [\Omega,\ \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M,$$

где $\Lambda = diag\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, $\lambda_1 = (-I_1 + I_2 + I_3 + I_4)/2$, $\ldots$, $\lambda_4 = (I_1 + I_2 + I_3 - I_4)/2$, M – момент <внешних сил>, действующих на тело в R^4, спроектированный на $so(4)$), $[,\ ]$ – коммутатор в $so(4)$).

Часть же уравнений, соответствующая R^4, аналогична уравнениям движения центра масс в R^4 (при этом используются многомерные аналоги формул Эйлера и Ривальса).

Поле сил определяем по аналогии с полем, используемым при моделировании воздействия сопротивляющейся среды на твердое тело в условиях струйного обтекания.