УДК 517.9+531.01

Трансцендентные первые интегралы динамических систем на касательном расслоении к сфере

М. В. Шамолин

Аннотация

Изучаются вопросы наличия трансцендентных первых интегралов для некоторых классов систем с симметриями. При этом получены достаточные условия наличия в неавтономных однородных системах второго порядка первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями, как в смысле теории элементарных функций, так и в смысле комплексного анализа, и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

1 Предварительные суждения и результаты

Результаты предлагаемой работы являются развитием предыдущих исследований, в том числе, и некоторой прикладной задачи из динамики твердого тела [9, 10, 13, 16], где были получены полные списки трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Позднее данное обстоятельство позволило провести полный анализ всех фазовых траекторий и указать на те их свойства, которые обладали грубостью и сохранялись для систем более общего вида. Полная интегрируемость таких систем была связана с симметриями скрытого типа.

Как известно, понятие интегрируемости, вообще говоря, достаточно расплывчатое. При его построении необходимо учитывать в каком смысле оно понимается (имеется в виду некий критерий, по которому делается вывод о том, что траектории рассматриваемой динамической системы устроены особенно “привлекательно и просто”), в классе каких функций ищутся первые интегралы и т.д. (см. также [1, 2, 6, 7, 8]).

В данной работе принимается такой подход, который учитывает в качестве класса функций как первых интегралов трансцендентные функции, причем элементарные. Здесь трансцендентность понимается не только в смысле теории элементарных функций (например, тригонометрических), а в смысле наличия у них существенно особых точек (в силу классификации, принятой в теории функций комплексного переменного, когда функция имеет существенно особые точки). При этом их необходимо формально продолжить в комплексную область (см. также [5, 14, 15]).

Конечно, в общем случае построить какую-либо теорию интегрирования таких неконсервативных систем (хотя бы и невысокой размерности) довольно затруднительно. Но в ряде случаев, когда исследуемые системы обладают дополнительными симметриями, удается найти первые интегралы через конечные комбинации элементарных функций.

Многие результаты данной работы регулярно докладывались, в том числе и на семинаре “Актуальные проблемы геометрии и механики” им. профессора В. В. Трофимова под руководством Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина.

2 Системы с симметриями и переменной диссипацией с нулевым средним

Рассмотрим системы следующего вида (точкой обозначена производная по времени):

$$\begin{aligned} &\dot{\alpha} = f_\alpha(\omega, \sin\alpha, \cos\alpha), \\ &\dot{\omega_k} = f_k(\omega, \sin\alpha, \cos\alpha),\ k = 1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{1}$$

заданные на множестве

$$\mathbf{S}^1\{\alpha \mod 2\pi\}\backslash K \times \mathbf{R}^n\{\omega\}, \tag{2}$$

$\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, где достаточно гладкие функции $f_\lambda(u_1, u_2, u_3)$, $\lambda = \alpha, 1, \ldots, n$, трех переменных u_1, u_2, u_3 таковы:

$$\begin{aligned} &f_\lambda(-u_1, -u_2, u_3) = -f_\lambda(u_1, u_2, u_3), \\ &f_\alpha(u_1, u_2, -u_3) = f_\alpha(u_1, u_2, u_3), \\ &f_k(u_1, u_2, -u_3) = -f_k(u_1, u_2, u_3), \end{aligned} \tag{3}$$

при этом функции $f_k(u_1, u_2, u_3)$ *определены* при $u_3 = 0$ для любого $k = 1, \ldots, n$.

Множество K или пусто, или состоит из конечного числа точек окружности $\mathbf{S}^1\{\alpha \mod 2\pi\}$.

Последние две переменные u_2, u_3 в функциях $f_\lambda(u_1, u_2, u_3)$ зависят от одного параметра α, но они выделены в разные группы по следующим причинам. Во-первых, не во всей области определения они однозначно выражаются друг относительно друга, а, во-вторых, первая из них нечетная, а вторая — четная функции α, что по-разному влияет на симметрии системы (1).

Поставим в соответствие системе (1) следующую уже неавтономную систему

$$\frac{d\omega_k}{d\alpha} = \frac{f_k(\omega, \sin\alpha, \cos\alpha)}{f_\alpha(\omega, \sin\alpha, \cos\alpha)},\ k = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

подстановкой $\tau = \sin\alpha$ приводимую к виду

$$\frac{d\omega_k}{d\tau} = \frac{f_k(\omega, \tau, \varphi_k(\tau))}{f_\alpha(\omega, \tau, \varphi_\alpha(\tau))},\ k = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

$$\varphi_\lambda(-\tau) = \varphi_\lambda(\tau),\ \lambda = \alpha, 1, \ldots, n.$$

Последняя система может иметь, в частности, алгебраическую правую часть (т.е. быть отношением двух полиномов), что иногда помогает искать ее первые интегралы в явном виде.

Определение 2.1. *Рассмотрим гладкую автономную систему $(n+1)$-го порядка нормального вида, заданную на цилиндре $\mathbf{R}^n\{x\} \times \mathbf{S}^1\{\alpha \mod 2\pi\}$, где α — периодическая координата периода $T > 0$. Дивергенцию правой части $\boldsymbol{V}(x, \alpha)$ (которая, вообще говоря, является функцией всех фазовых переменных и не равна тождественно нулю) данной системы обозначим через $div\,\boldsymbol{V}(x, \alpha)$. Назовем такую систему системой с переменной диссипацией с нулевым (ненулевым) средним, если функция*

$$\int_0^T div\,\boldsymbol{V}(x, \alpha)d\alpha \tag{6}$$

равна (не равна) тождественно нулю. При этом в некоторых случаях (например, когда в отдельных точках окружности $\mathbf{S}^1\{\alpha \mod 2\pi\}$ *возникают особенности) данный интеграл понимается в смысле главного значения.*

Необходимо заметить, что дать общее определение системы с переменной диссипацией с нулевым (ненулевым) средним достаточно непросто. Приведенное только что определение использует понятие дивергенции (как известно, дивергенция правой части системы нормального вида характеризует изменение фазового объема в фазовом пространстве данной системы).

Следующее утверждение погружает рассматриваемый класс систем (1) в класс динамических систем с переменной диссипацией с нулевым средним. Обратное вложение, вообще говоря, не выполняется.

Теорема 2.1. *Системы вида (1) являются динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним.*

Данная теорема доказывается с использованием лишь некоторых из вышеперечисленных симметрий (3) системы (1), а также использует периодичность правой части системы по α.

Действительно, вычислим указанную дивергенцию векторного поля системы (1). Она равна

$$\frac{\partial f_\alpha(\omega,\sin\alpha,\cos\alpha)}{\partial u_2}\cos\alpha - \frac{\partial f_\alpha(\omega,\sin\alpha,\cos\alpha)}{\partial u_3}\sin\alpha + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_k(\omega,\sin\alpha,\cos\alpha)}{\partial u_1}. \tag{7}$$

Следующий интеграл от первых двух слагаемых (7) равен нулю:

$$\int_0^{2\pi}\left\{\frac{\partial f_\alpha(\omega,\sin\alpha,\cos\alpha)}{\partial u_2}d\sin\alpha + \frac{\partial f_\alpha(\omega,\sin\alpha,\cos\alpha)}{\partial u_3}d\cos\alpha\right\} =$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{\partial f_\alpha(\omega,\sin\alpha,\cos\alpha)}{\partial\alpha}d\alpha = h_\alpha(\omega) \equiv 0, \tag{8}$$

поскольку функция $f_\alpha(\omega,\sin\alpha,\cos\alpha)$ — периодическая по α.

Далее, в силу третьего уравнения (3) для любого $k = 1,\ldots,n$ выполнено свойство

$$\frac{\partial f_k(\omega,\sin\alpha,\cos\alpha)}{\partial u_1} = \cos\alpha\cdot\frac{\partial g_k(\omega,\sin\alpha)}{\partial u_1}, \tag{9}$$

при этом функция $g_k(u_1,u_2)$ — достаточно гладкая для любого номера $k = 1,\ldots,n$.

Тогда интеграл по периоду 2π от правой части равенства (9) дает

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial g_k(\omega,\sin\alpha)}{\partial u_1}d\sin\alpha = h_k(\omega) \equiv 0 \tag{10}$$

для любого $k = 1,\ldots,n$. Из равенств (8), (10) и следует утверждение теоремы 2.1.

В данной работе в основном будет затронут случай, когда функции $f_\lambda(\omega,\tau,\varphi_k(\tau))$ ($\lambda = \alpha,1,\ldots,n$) — полиномы по ω,τ.

Пример 1. В работах [9, 13, 19, 20, 23] рассмотрены маятниковые системы на двумерном цилиндре $\mathbf{S}^1\{\alpha \mod 2\pi\}\times\mathbf{R}^1\{\omega\}$ с параметром $b > 0$:

$$\dot\alpha = -\omega + b\sin\alpha,\ \dot\omega = \sin\alpha\cos\alpha, \tag{11}$$

и
$$\dot{\alpha} = -\omega + b\sin\alpha\cos^2\alpha + b\omega^2\sin\alpha,$$
$$\dot{\omega} = \sin\alpha\cos\alpha - b\omega\sin^2\alpha\cos\alpha + b\omega^3\cos\alpha, \tag{12}$$

которым в переменных (ω, τ) можно сопоставлять уравнения с алгебраическими правыми частями
$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{\tau}{-\omega + b\tau}, \tag{13}$$
и
$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{\tau + b\omega[\omega^2 - \tau^2]}{-\omega + b\tau + b\tau[\omega^2 - \tau^2]} \tag{14}$$
вида (5), соответственно. При этом данные системы являются динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним, что нетрудно проверить напрямую.

Действительно, дивергенции их правых частей равны соответственно $b\cos\alpha$ и $b\cos\alpha[4\omega^2 + \cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha]$, при этом они попадают в класс систем (1).

Более того, каждая из них обладает первым интегралом, являющимся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного) функцией, выражающейся через конечную комбинацию элементарных функций.

Пример 2. Следующей системе с параметром b, рассматриваемой уже в трехмерной области
$$\{0 < \alpha < \pi\} \times \mathbf{R}^2\{z_1, z_2\} \tag{15}$$
(такая система отделяется от системы на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$ двумерной сферы $\mathbf{S}^2\{\alpha, \beta\}$):
$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -z_2 + b\sin\alpha, \\ \dot{z}_2 &= \sin\alpha\cos\alpha - z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ \dot{z}_1 &= z_1 z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \end{aligned} \tag{16}$$
(см. также [24, 27, 32, 33, 34]) поставим в соответствие неавтономную систему с алгебраической правой частью ($\tau = \sin\alpha$):
$$\frac{dz_2}{d\tau} = \frac{\tau - z_1^2/\tau}{-z_2 + b\tau}, \quad \frac{dz_1}{d\tau} = \frac{z_1 z_2/\tau}{-z_2 + b\tau}. \tag{17}$$

Следующей системе с параметрами b, H_1, рассматриваемой в трехмерной области (15) (такая система также отделяется от системы на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$ двумерной сферы $\mathbf{S}^2\{\alpha, \beta\}$):
$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -(1 + bH_1)z_2 + b\sin\alpha, \\ \dot{z}_2 &= \sin\alpha\cos\alpha - (1 + bH_1)z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1 z_2\cos\alpha, \\ \dot{z}_1 &= (1 + bH_1)z_1 z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1 z_1\cos\alpha, \end{aligned} \tag{18}$$
поставим в соответствие неавтономную систему с алгебраической правой частью ($\tau = \sin\alpha$):
$$\frac{dz_2}{d\tau} = \frac{\tau - (1 + bH_1)z_1^2/\tau - H_1 z_2}{-(1 + bH_1)z_2 + b\tau}, \quad \frac{dz_1}{d\tau} = \frac{(1 + bH_1)z_1 z_2/\tau - H_1 z_1}{-(1 + bH_1)z_2 + b\tau}. \tag{19}$$

И в данных случаях видно, что система (16) (или (18)) является системой с переменной диссипацией с нулевым средним; чтобы было полное соответствие с определением достаточно ввести новую фазовую переменную $z_1^* = \ln|z_1|$.

Если подсчитать дивергенцию правой части системы (16) в декартовых координатах α, z_1^*, z_2, то получим, что она равна $b\cos\alpha$. При этом, учитывая (15), в смысле главного значения имеем:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} b\cos\alpha + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\pi+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} b\cos\alpha = 0.$$

Более того, она обладает двумя первыми интегралами (т.е. полным списком), являющимися трансцендентными функциями и выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций, что и стало возможным после сопоставления ей (вообще говоря, неавтономной) системы уравнений с алгебраической (полиномиальной) правой частью (17).

Приведенные выше системы (11), (12), (16), (18), мало того, что попадают в класс систем (1) и обладают переменной диссипацией с нулевым средним, они еще и имеют полный список трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [28, 29, 30, 31, 35].

Итак, для поиска первых интегралов рассматриваемых систем лучше привести системы вида (1) к системам с полиномиальными правыми частями (5), от вида которых зависит возможность интегрирования в элементарных функциях исходной системы. Поэтому пойдем следующим путем: будем искать достаточные условия интегрируемости в элементарных функциях систем уравнений с полиномиальными правыми частями, исследуя при этом системы наиболее общего вида.

3 Системы на касательном расслоении к двумерной сфере

Рассмотрим следующую динамическую систему:

$$\begin{gathered}\ddot\theta + b\dot\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta - \dot\psi^2\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 0,\\ \ddot\psi + b\dot\psi\cos\theta + \dot\theta\dot\psi\left[\frac{1+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right] = 0\end{gathered} \tag{20}$$

на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^2$ двумерной сферы $\mathbf{S}^2\{\theta,\psi\}$. Данная система описывает сферический маятник, помещенный в поток набегающей среды (см. также [11, 12, 22, 36]). При этом в системе присутствует консервативный момент $\sin\theta\cos\theta$, а также момент силы, линейным образом зависящий от скорости с переменным коэффициентом: $b\begin{pmatrix}\dot\theta\\ \dot\psi\end{pmatrix}\cos\theta$.

Оставшиеся коэффициенты в уравнениях являются коэффициентами связности, а именно:

$$\Gamma^{\theta}_{\psi\psi} = -\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\ \Gamma^{\psi}_{\theta\psi} = \frac{1+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}.$$

Система (20) фактически имеет порядок 3, поскольку переменная ψ является циклической, при этом в систему входит лишь производная $\dot\psi$.

Предложение 3.1. *Уравнение*

$$\dot{\psi} = 0 \tag{21}$$

задает семейство интегральных плоскостей для системы (20).

Более того, уравнение (21) редуцирует систему (20) к уравнению, описывающему цилиндрический маятник, находящийся в потоке набегающей среды (см. также [35, 36]).

Предложение 3.2. *Система (20) эквивалентна следующей системе:*

$$\begin{aligned} &\dot{\theta} = -z_2 + b\sin\theta, \\ &\dot{z}_2 = \sin\theta\cos\theta - z_1^2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \\ &\dot{z}_1 = z_1 z_2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \\ &\dot{\psi} = z_1\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \end{aligned} \tag{22}$$

на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^2\{z_2, z_1; \theta, \psi\}$ двумерной сферы $\mathbf{S}^2\{\theta, \psi\}$.

Более того, первые три уравнения системы (22) образуют замкнутую систему третьего порядка и совпадают с системой (16) (если положить $\alpha = \theta$). Отделение четвертого уравнения системы (22) также произошло по причине цикличности переменной ψ.

О построении фазового портрета системы (20), изображенного на рис. 1, см. [36].

Пример 3. Исследуем систему вида (16), которая сводится к (17), а также следующую систему:

$$\begin{aligned} &\dot{\alpha} = -z_2 + b(z_1^2 + z_2^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha, \\ &\dot{z}_2 = \sin\alpha\cos\alpha + bz_2(z_1^2 + z_2^2)\cos\alpha - \\ &- bz_2\sin^2\alpha\cos\alpha - z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ &\dot{z}_1 = bz_1(z_1^2 + z_2^2)\cos\alpha - \\ &- bz_1\sin^2\alpha\cos\alpha + z_1 z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ &\dot{\beta} = z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \end{aligned} \tag{23}$$

три первых (отделящихся) уравнения которой соответствуют следующей неавтономной системе с алгебраической правой частью:

$$\begin{aligned} \frac{dz_2}{d\tau} &= \frac{\tau + bz_2(z_1^2 + z_2^2) - bz_2\tau^2 - z_1^2/\tau}{-z_2 + b\tau(z_1^2 + z_2^2) + b\tau(1 - \tau^2)}, \\ \frac{dz_1}{d\tau} &= \frac{bz_1(z_1^2 + z_2^2) - bz_1\tau^2 + z_1 z_2/\tau}{-z_2 + b\tau(z_1^2 + z_2^2) + b\tau(1 - \tau^2)}. \end{aligned} \tag{24}$$

Итак, мы по-прежнему рассматриваем пару систем: три первых уравнения системы (23) и соответствующую им алгебраическую неавтономную систему (24).

Производится переход к однородным координатам u_k, $k = 1, 2$, по формулам

$$z_k = u_k\tau. \tag{25}$$

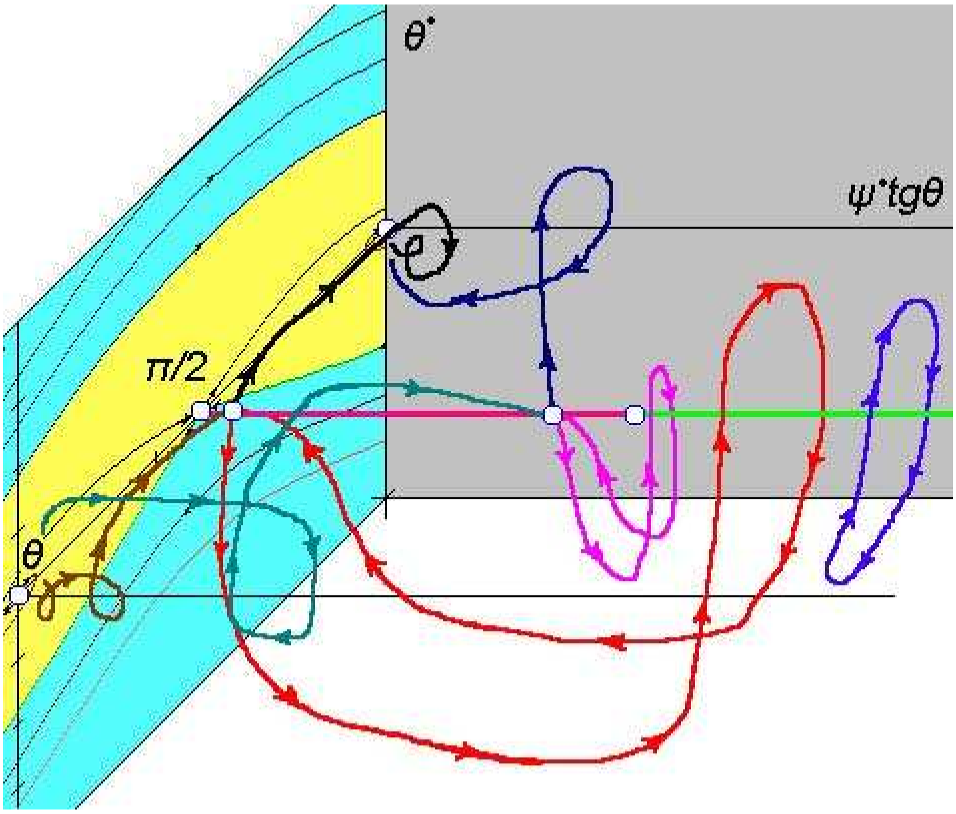

Рис. 1: Относительно грубый фазовый портрет в трехмерной области

Система (17) (см. выше) приводится с помощью последней замены к виду

$$\tau\frac{du_2}{d\tau}+u_2=\frac{\tau-u_1^2\tau}{-u_2\tau+b\tau},\quad \tau\frac{du_1}{d\tau}+u_1=\frac{u_1u_2\tau}{-u_2\tau+b\tau}, \tag{26}$$

который, в свою очередь, соответствует уравнению

$$\frac{du_2}{du_1}=\frac{1-bu_2+u_2^2-u_1^2}{2u_1u_2-bu_1}. \tag{27}$$

Данное уравнение интегрируется в элементарных функциях, поскольку интегрируется тождество

$$d\left(\frac{1-bu_2+u_2^2}{u_1}\right)+du_1=0, \tag{28}$$

и имеет в координатах (τ, z_1, z_2) первый интеграл следующего вида (ср. с [3, 4, 17, 18, 25, 26]):

$$\frac{z_1^2+z_2^2-bz_2\tau+\tau^2}{z_1\tau}=\mathrm{const}.$$

Система же (23) после ее приведения к соответствует системе

$$\begin{aligned}\tau\frac{du_2}{d\tau}+u_2&=\frac{\tau+bu_2\tau^3(u_1^2+u_2^2)-bu_2\tau^3-u_1^2\tau}{-u_2\tau+b\tau^3(u_1^2+u_2^2)+b\tau(1-\tau^2)},\\ \tau\frac{du_1}{d\tau}+u_1&=\frac{bu_1\tau^3(u_1^2+u_2^2)-bu_1\tau^3+u_1u_2\tau}{-u_2\tau+b\tau^3(u_1^2+u_2^2)+b\tau(1-\tau^2)},\end{aligned} \tag{29}$$

которая также приводится к (27) и может быть аналогично проинтегрирована.

4 Неавтономные однородные системы второго порядка

Зададим вопрос: каковы возможности интегрирования в элементарных функциях следующей системы более общего вида, включающей в себя рассмотренные выше системы (17), (19), в трехмерных фазовых областях:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{ax + by + cz + c_1 z^2/x + c_2 zy/x + c_3 y^2/x}{d_1 x + ey + fz}, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{gx + hy + iz + i_1 z^2/x + i_2 zy/x + i_3 y^2/x}{d_1 x + ey + fz}, \end{aligned} \tag{30}$$

имеющей особенность типа $1/x$?

Другими словами, изучается вопрос существования первых интегралов для класса неавтономных однородных систем второго порядка. Ранее уже был получен ряд результатов по данному вопросу (см. также [35]).

Вводя подстановки

$$y = ux, \; z = vx, \tag{31}$$

получим, что система (30) приводится к следующей системе:

$$x\frac{dv}{dx} + v = \frac{ax + bux + cvx + c_1 v^2 x + c_2 vux + c_3 u^2 x}{d_1 x + eux + fvx}, \tag{32}$$

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{gx + hux + ivx + i_1 v^2 x + i_2 vux + i_3 u^2 x}{d_1 x + eux + fvx}, \tag{33}$$

эквивалентной

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{ax + bux + (c - d_1)vx + (c_1 - f)v^2 x + (c_2 - e)vux + c_3 u^2 x}{d_1 x + eux + fvx}, \tag{34}$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{gx + (h - d_1)ux + ivx + i_1 v^2 x + (i_2 - f)vux + (i_3 - e)u^2 x}{d_1 x + eux + fvx}, \tag{35}$$

которой сопоставим следующее неавтономное уравнение с алгебраической правой частью:

$$\frac{dv}{du} = \frac{a + bu + cv + c_1 v^2 + c_2 vu + c_3 u^2 - v[d_1 + eu + fv]}{g + hu + iv + i_1 v^2 + i_2 vu + i_3 u^2 - u[d_1 + eu + fv]}. \tag{36}$$

Интегрирование последнего уравнения сводится к интегрированию уравнения в полных дифференциалах:

$$\begin{aligned} &[g + hu + iv + i_1 v^2 + i_2 vu + i_3 u^2 - d_1 u - eu^2 - fuv]dv = \\ &= [a + bu + cv + c_1 v^2 + c_2 vu + c_3 u^2 - d_1 v - euv - fv^2]du, \end{aligned} \tag{37}$$

или

$$\begin{aligned} &[g + (h - d_1)u + iv + i_1 v^2 + (i_2 - f)uv + (i_3 - e)u^2]dv = \\ &= [a + bu + (c - d_1)v + (c_1 - f)v^2 + (c_2 - e)uv + c_3 u^2]du. \end{aligned} \tag{38}$$

Имеем, вообще говоря, 15–параметрическое семейство уравнений вида (37) (или (38)).

5 Некоторые случаи наличия рационального первого интеграла

В рассматриваемых случаях изучаемая неавтономная система второго порядка обладает полным набором (двумя) первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Оба первых интеграла являются, вообще говоря, трансцендентными функциями своих переменных с точки зрения комплексного анализа. При этом один из предъявляемых первых интегралов является рациональной однородной функцией — отношением двух полиномов одной степени:

$$\frac{P_m(x,y,z)}{Q_m(x,y,z)}, \tag{39}$$

где $P_m(x,y,z), Q_m(x,y,z)$ — однородные полиномы степени m.

5.1 Случай $m = 2$. I

5.1.1 Интегрирование уравнения (38)

Будем интегрировать уравнение (38) с интегрирующим множителем (последним множителем Якоби) следующего вида:

$$\varrho(u) = \frac{1}{u^s}, s = 2. \tag{40}$$

Тогда уравнение (38) примет вид

$$\begin{gathered}\left[\frac{g}{u^2} + \frac{h-d_1}{u} + \frac{iv}{u^2} + \frac{i_1 v^2}{u^2} + \frac{(i_2-f)v}{u} + (i_3-e)\right] dv = \\ = \left[\frac{a}{u^2} + \frac{b}{u} + \frac{(c-d_1)v}{u^2} + \frac{(c_1-f)v^2}{u^2} + \frac{(c_2-e)v}{u} + c_3\right] du.\end{gathered} \tag{41}$$

Для интегрирования в элементарных функциях последнего тождества достаточно наложить 6 независимых соотношений:

$$g = 0,\ i = 0,\ i_1 = 0,\ e = c_2,\ h = c,\ i_2 = 2c_1 - f. \tag{42}$$

Введем 9 параметров $\beta_1, \ldots, \beta_9$ и рассмотрим их в качестве независимых:

$$\begin{gathered}\beta_1 = a,\ \beta_2 = b,\ \beta_3 = c,\ \beta_4 = c_1,\ \beta_5 = c_2, \\ \beta_6 = c_3,\ \beta_7 = d_1,\ \beta_8 = f,\ \beta_9 = i_3.\end{gathered} \tag{43}$$

Таким образом, уравнение (38) при выполнении групп условий (42), (43) сводится к виду

$$\frac{dv}{du} = \frac{\beta_1 + \beta_2 u + (\beta_3-\beta_7)v + (\beta_4-\beta_8)v^2 + \beta_6 u^2}{(\beta_3-\beta_7)u + 2(\beta_4-\beta_8)vu + (\beta_9-\beta_5)u^2}, \tag{44}$$

а система (34), (35), соответственно, к виду

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{\beta_1 + \beta_2 u + (\beta_3 - \beta_7)v + (\beta_4 - \beta_8)v^2 + \beta_6 u^2}{\beta_7 + \beta_5 u + \beta_8 v}, \tag{45}$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{(\beta_3 - \beta_7)u + 2(\beta_4 - \beta_8)vu + (\beta_9 - \beta_5)u^2}{\beta_7 + \beta_5 u + \beta_8 v}, \tag{46}$$

после чего уравнение (44) интегрируется через конечную комбинацию элементарных функций.

Действительно, интегрируя тождество (41), получаем следующее соотношение:

$$\begin{gathered} d\left[\frac{(\beta_3 - \beta_7)v}{u}\right] + d\left[\frac{(\beta_4 - \beta_8)v^2}{u}\right] + d[(\beta_9 - \beta_5)v] + d\left[\frac{\beta_1}{u}\right] - \\ - d[\beta_2 \ln|u|] - d[\beta_6 u] = 0, \end{gathered} \tag{47}$$

которое для начала позволяет получить следующее инвариантное соотношение:

$$\begin{gathered} \frac{(\beta_3 - \beta_7)v}{u} + \frac{(\beta_4 - \beta_8)v^2}{u} + (\beta_9 - \beta_5)v + \frac{\beta_1}{u} - \\ - \beta_2 \ln|u| - \beta_6 u = C_1 = \mathrm{const}, \end{gathered} \tag{48}$$

а затем в координатах (x, y, z) — первый интеграл системы (30) в следующем виде:

$$\begin{gathered} \frac{(\beta_4 - \beta_8)z^2 - \beta_6 y^2 + (\beta_3 - \beta_7)zx + (\beta_9 - \beta_5)zy + \beta_1 x^2}{yx} - \\ - \beta_2 \ln\left|\frac{y}{x}\right| = C_1 = \mathrm{const}. \end{gathered} \tag{49}$$

Таким образом, делается вывод об интегрируемости в элементарных функциях следующей, вообще говоря, неконсервативной системы третьего порядка, зависящей от 9 параметров:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + \beta_4 z^2/x + \beta_5 zy/x + \beta_6 y^2/x}{\beta_7 x + \beta_5 y + \beta_8 z}, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{\beta_3 y + (2\beta_4 - \beta_8)zy/x + \beta_9 y^2/x}{\beta_7 x + \beta_5 y + \beta_8 z}. \end{aligned} \tag{50}$$

Следствие 5.1. *Следующая система третьего порядка*

$$\begin{aligned} \dot\alpha &= \beta_7 \sin\alpha + \beta_5 z_1 + \beta_8 z_2, \\ \dot z_2 &= \beta_1 \sin\alpha\cos\alpha + \beta_2 z_1 \cos\alpha + \beta_3 z_2 \cos\alpha + \\ &+ \beta_4 z_2^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \beta_5 z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \beta_6 z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ \dot z_1 &= \beta_3 z_1 \cos\alpha + (2\beta_4 - \beta_8) z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \beta_9 z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \end{aligned} \tag{51}$$

зависящая от 9 параметров $\beta_1, \dots, \beta_9$, рассмотренная на множестве

$$\{\alpha \in \mathbf{R}^1 : \ 0 < \alpha < \pi\} \times \mathbf{R}^2\{z_1, z_2\}, \tag{52}$$

обладает, вообще говоря, трансцендентным первым интегралом, выражающимся через элементарные функции:

$$\frac{(\beta_4-\beta_8)z_2^2-\beta_6 z_1^2+(\beta_3-\beta_7)z_2\sin\alpha+(\beta_9-\beta_5)z_2 z_1+\beta_1\sin^2\alpha}{z_1\sin\alpha}- \\ -\beta_2\ln\left|\frac{z_1}{\sin\alpha}\right|=C_1=const. \tag{53}$$

В частности, система (51):

- при $\beta_1=1,\ \beta_2=\beta_3=\beta_4=\beta_5=\beta_9=0,\ \beta_6=\beta_8=-1,\ \beta_7=b$ имеет вид системы (16);
- при $\beta_1=1,\ \beta_2=\beta_4=\beta_5=\beta_9=0,\ \beta_3=-H_1,\ \beta_6=\beta_8=-(1+bH_1),\ \beta_7=b$ имеет вид системы (18).

5.1.2 Нахождение дополнительного инвариантного соотношения

Для нахождения дополнительного первого интеграла неавтономной системы (50) используется найденный первый интеграл (49), выражающийся через конечную комбинацию элементарных функций.

Преобразуем для начала соотношение (48) следующим образом:

$$(\beta_4-\beta_8)v^2+[(\beta_9-\beta_5)u+(\beta_3-\beta_7)]\,v+f_1(u)=0, \tag{54}$$

где

$$f_1(u)=\beta_1-\beta_6u^2-\beta_2u\ln|u|-C_1u.$$

При этом формально величину v можно найти из следующих равенств:

$$v_{1,2}(u)=\frac{1}{2(\beta_4-\beta_8)}\left\{(\beta_5-\beta_9)u+(\beta_7-\beta_3)\pm\sqrt{f_2(u)}\right\},\ \beta_4\neq\beta_8, \tag{55}$$

где

$$f_2(u)=A_1+A_2u+A_3u^2+A_4u\ln|u|,$$
$$A_1=(\beta_3-\beta_7)^2-4\beta_1(\beta_4-\beta_8),\ A_2=2(\beta_9-\beta_5)(\beta_3-\beta_7)+4C_1(\beta_4-\beta_8),$$
$$A_3=(\beta_9-\beta_5)^2+4\beta_6(\beta_4-\beta_8),\ A_4=4\beta_2(\beta_4-\beta_8),$$

или

$$v_0(u)=-\frac{f_1(u)}{(\beta_9-\beta_5)u+(\beta_3-\beta_7)},\ \beta_4=\beta_8,\ (\beta_9-\beta_5)u+(\beta_3-\beta_7)\neq 0. \tag{56}$$

Тогда искомая квадратура при $\beta_4\neq\beta_8$ для поиска дополнительного, вообще говоря, трансцендентного первого интеграла системы (45), (46) (при этом используется уравнение (46)) примет следующий вид:

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{[\beta_7+\beta_5u+\beta_8v_{1,2,0}(u)]du}{(\beta_3-\beta_7)u+(\beta_9-\beta_5)u^2+2(\beta_4-\beta_8)uv_{1,2,0}(u)}=$$
$$=\pm\int\frac{[B_1+B_2u+B_3\sqrt{f_2(u)}]du}{u\sqrt{f_2(u)}}, \tag{57}$$

$$B_1=\beta_7+\frac{\beta_8(\beta_7-\beta_3)}{2(\beta_4-\beta_8)},\ B_2=\beta_5+\frac{\beta_8(\beta_5-\beta_9)}{2(\beta_4-\beta_8)},\ B_3=\pm\frac{\beta_8}{2(\beta_4-\beta_8)};$$

при $\beta_4 = \beta_8$ искомая квадратура примет вид

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{\{(\beta_7 + \beta_5 u)[(\beta_9 - \beta_5)u + (\beta_3 - \beta_7)] - \beta_8 f_1(u)\}du}{(\beta_3 - \beta_7)u + (\beta_9 - \beta_5)u^2[(\beta_9 - \beta_5)u + (\beta_3 - \beta_7)]}. \tag{58}$$

Искомая же квадратура для поиска дополнительного, вообще говоря, трансцендентного первого интеграла системы (45), (46) (при этом используется уравнение (45)) примет следующий вид:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{[\beta_7 + \beta_5 u(v) + \beta_8 v]dv}{\beta_1 + \beta_2 u(v) + (\beta_3 - \beta_7)v + (\beta_4 - \beta_8)v^2 + \beta_6 u^2(v)}, \tag{59}$$

при этом функция $u(v)$ должна быть получена в результате разрешения неявного уравнения (48) относительно u (что, в общем случае, не всегда очевидно).

Достаточные условия выражения интегралов в (57) через конечную комбинацию элементарных функций дает следующая

Лемма 5.1. *При $A_4 = 0$, т.е. при*

$$\beta_2 = 0 \tag{60}$$

или при

$$\beta_4 = \beta_8 \tag{61}$$

неопределенный интеграл в (57) выражается через конечную комбинацию элементарных функций.

Следующее важное следствие из леммы 5.1 сформулируем в качестве теоремы.

Теорема 5.1. *Система (50) (а также (51)) при выполнении свойства (60), обладает полным набором первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.*

5.1.3 Некоторые условия отсутствия последнего множителя Якоби

В данном разделе используется интегрирующий множитель (последний множитель Якоби) вида (40). В частности. он позволил найти первый интеграл для системы (16) (и (18)). Возникает вопрос: существуют ли интегрирующие множители (последние множители Якоби) другого вида, независимого с (40), позволяющие проинтегрировать уравнение (44) (в частности, уравнение (27))?

Некоторые ответы на поставленный вопрос дают две следующие леммы.

Лемма 5.2. *Уравнение (44) не имеет интегрирующих множителей (последних множителей Якоби) вида*

$$\varrho = \varrho(u) \tag{62}$$

кроме случая (40).

Доказательство леммы 5.2. Предъявим для начала общее уравнение, которому должен удовлетворять интегрирующий множитель $\varrho(u, v)$ уравнения (44):

$$\begin{gathered}[\beta_1 + \beta_2 u + (\beta_3 - \beta_7)v + (\beta_4 - \beta_8)v^2 + \beta_6 u^2]\varrho(u, v)du = \\ = [(\beta_3 - \beta_7)u + 2(\beta_4 - \beta_8)vu + (\beta_9 - \beta_5)u^2]\varrho(u, v)dv.\end{gathered} \tag{63}$$

Если $\varrho(u,v)$ — искомый интегрирующий множитель, то должно быть выполнено следующее равенство:

$$\begin{gathered}[(\beta_3-\beta_7)+2(\beta_4-\beta_8)v+2(\beta_9-\beta_5)u]\varrho(u,v)+\\+[(\beta_3-\beta_7)u+2(\beta_4-\beta_8)vu+(\beta_9-\beta_5)u^2]\frac{\partial\varrho(u,v)}{\partial u}=\\=-[(\beta_3-\beta_7)+2(\beta_4-\beta_8)v]\varrho(u,v)-\\-[\beta_1+\beta_2u+(\beta_3-\beta_7)v+(\beta_4-\beta_8)v^2+\beta_6u^2]\frac{\partial\varrho(u,v)}{\partial v}.\end{gathered}\tag{64}$$

Если же мы ищем интегрирующий множитель в виде (62), то равенство (64) перепишется в виде

$$[(\beta_3-\beta_7)+2(\beta_4-\beta_8)v+(\beta_9-\beta_5)u]\left[2\varrho(u)+u\frac{d\varrho(u)}{du}\right]=0,\tag{65}$$

и должно быть выполнено на всей области определения. Отсюда следует, что должно быть выполнено уравнение

$$2\varrho(u)+u\frac{d\varrho(u)}{du}=0,\tag{66}$$

общее решение которого имеет вид

$$\varrho(u)=\frac{C}{u^2},\ C=\mathrm{const},\tag{67}$$

соответствующий случаю (40). Лемма 5.2 доказана.

Лемма 5.3. *Уравнение (44) не имеет интегрирующих множителей (последних множителей Якоби) вида*

$$\varrho=\varrho(u,v)=\frac{1}{u^mv^n},\ m,n\in\mathbf{R},\tag{68}$$

кроме случая $m=2,n=0$ (т.е. кроме (40)).

Доказательство леммы 5.3 для простоты проведем для уравнения (27).

Если $\varrho(u,v)$ — интегрирующий множитель, удовлетворяющий условию (68), то должно быть выполнено следующее равенство:

$$\begin{gathered}[2u^{1-m}v^{1-n}-bu^{1-m}v^{-n}]dv=\\=[u^{-m}v^{-n}-bu^{-m}v^{1-n}+u^{-m}v^{2-n}-u^{2-m}v^{-n}]du.\end{gathered}\tag{69}$$

Тогда должно тождественно выполняться следующее равенство:

$$\begin{gathered}2(1-m)u^{-m}v^{1-n}-b(1-m)u^{-m}v^{-n}=\\=-[(-n)u^{-m}v^{-n-1}-b(1-n)u^{-m}v^{-n}+(2-n)u^{-m}v^{1-n}+nu^{2-m}v^{-n-1}].\end{gathered}\tag{70}$$

Оно выполняется если и только если выполнены следующие соотношения:

$$2(1-m)=n-2,\ m-1=1-n,\ n=0.\tag{71}$$

Последняя группа соотношений выполняется лишь при $m=2,n=0$, что и доказывает лемму 5.3.

5.2 Случай $m = 2$. II

Будем интегрировать уравнение (38) с интегрирующим множителем (последним множителем Якоби) следующего вида:

$$\varrho(u) = \frac{1}{u^s},\ s = 3. \tag{72}$$

Тогда уравнение (38) примет вид

$$\begin{aligned}&\left[\frac{g}{u^3} + \frac{h-d_1}{u^2} + \frac{iv}{u^3} + \frac{i_1v^2}{u^3} + \frac{(i_2-f)v}{u^2} + \frac{i_3-e}{u}\right] dv = \\ &= \left[\frac{a}{u^3} + \frac{b}{u^2} + \frac{(c-d_1)v}{u^3} + \frac{(c_1-f)v^2}{u^3} + \frac{(c_2-e)v}{u^2} + \frac{c_3}{u}\right] du.\end{aligned} \tag{73}$$

Для интегрирования в элементарных функциях последнего тождества достаточно наложить 6 независимых соотношений:

$$g = 0,\ i = 0,\ i_1 = 0,\ h = \frac{c+d_1}{2},\ i_2 = c_1,\ i_3 = c_2. \tag{74}$$

Введем 9 параметров $\beta_1, \ldots, \beta_9$ и рассмотрим их в качестве независимых:

$$\begin{aligned}&\beta_1 = a,\ \beta_2 = b,\ \beta_3 = c,\ \beta_4 = c_1,\ \beta_5 = c_2,\\ &\beta_6 = c_3,\ \beta_7 = d_1,\ \beta_8 = e,\ \beta_9 = f.\end{aligned} \tag{75}$$

Таким образом, уравнение (38) при выполнении групп условий (74), (75) сводится к виду

$$\frac{dv}{du} = \frac{\beta_1 + \beta_2u + (\beta_3-\beta_7)v + (\beta_4-\beta_9)v^2 + (\beta_5-\beta_8)uv + \beta_6u^2}{(\beta_3-\beta_7)u/2 + (\beta_4-\beta_9)uv + (\beta_5-\beta_8)u^2}, \tag{76}$$

а система (34), (35), соответственно, к виду

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{\beta_1 + \beta_2u + (\beta_3-\beta_7)v + (\beta_4-\beta_9)v^2 + (\beta_5-\beta_8)uv + \beta_6u^2}{\beta_7 + \beta_8u + \beta_9v}, \tag{77}$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{(\beta_3-\beta_7)u/2 + (\beta_4-\beta_9)uv + (\beta_5-\beta_8)u^2}{\beta_7 + \beta_8u + \beta_9v}, \tag{78}$$

после чего уравнение (76) интегрируется через конечную комбинацию элементарных функций.

Действительно, интегрируя тождество (73), получаем следующее соотношение:

$$\begin{aligned}&d\left[\frac{(\beta_5-\beta_8)v}{u}\right] + d\left[\frac{(\beta_4-\beta_9)v^2}{2u^2}\right] + d\left[\frac{(\beta_3-\beta_7)v}{2u^2}\right] + d\left[\frac{\beta_1}{2u^2}\right] + d\left[\frac{\beta_2}{u}\right] - \\ &- d[\beta_6 \ln|u|] = 0,\end{aligned} \tag{79}$$

которое для начала позволяет получить следующее инвариантное соотношение:

$$\begin{aligned}&\frac{(\beta_5-\beta_8)uv + (\beta_4-\beta_9)v^2/2 + (\beta_3-\beta_7)v/2 + \beta_1/2 + \beta_2u}{u^2} - \\ &- \beta_6 \ln|u| = C_1 = \text{const},\end{aligned} \tag{80}$$

а затем в координатах (x, y, z) — первый интеграл в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&\frac{(\beta_5-\beta_8)yz+(\beta_4-\beta_9)z^2/2+(\beta_3-\beta_7)zx/2+\beta_1x^2/2+\beta_2yx}{y^2}-\\
&-\beta_6\ln\left|\frac{y}{x}\right|=C_1=\mathrm{const}.
\end{aligned} \tag{81}
$$

Таким образом, можно сделать вывод об интегрируемости в элементарных функциях следующей, вообще говоря, неконсервативной системы третьего порядка, зависящей от 9 параметров:

$$
\begin{aligned}
\frac{dz}{dx}&=\frac{\beta_1x+\beta_2y+\beta_3z+\beta_4z^2/x+\beta_5zy/x+\beta_6y^2/x}{\beta_7x+\beta_8y+\beta_9z},\\
\frac{dy}{dx}&=\frac{(\beta_3+\beta_7)y/2+\beta_4zy/x+\beta_5y^2/x}{\beta_7x+\beta_8y+\beta_9z}.
\end{aligned} \tag{82}
$$

Следствие 5.2. *Следующая система третьего порядка*

$$
\begin{aligned}
&\dot\alpha=\beta_7\sin\alpha+\beta_8z_1+\beta_9z_2,\\
&\dot z_2=\beta_1\sin\alpha\cos\alpha+\beta_2z_1\cos\alpha+\beta_3z_2\cos\alpha+\\
&+\beta_4z_2^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\beta_5z_1z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\beta_6z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\\
&\dot z_1=((\beta_3+\beta_7)/2)z_1\cos\alpha+\beta_4z_1z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\beta_5z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},
\end{aligned} \tag{83}
$$

зависящая от 9 параметров $\beta_1,\ldots,\beta_9$, рассмотренная на множестве

$$
\{\alpha\in\mathbf{R}^1:\ 0<\alpha<\pi\}\times\mathbf{R}^2\{z_1,z_2\}, \tag{84}
$$

обладает, вообще говоря, трансцендентным первым интегралом, выражающимся через элементарные функции:

$$
\begin{aligned}
&\frac{(\beta_5-\beta_8)z_1z_2+(\beta_4-\beta_9)z_2^2/2+((\beta_3-\beta_7)/2)z_2\sin\alpha+(\beta_1/2)\sin^2\alpha+\beta_2z_1\sin\alpha}{z_1^2}-\\
&-\beta_6\ln\left|\frac{z_1}{\sin\alpha}\right|=C_1=const.
\end{aligned} \tag{85}
$$

Для нахождения дополнительного первого интеграла неавтономной системы (82) используется найденный первый интеграл (81), выражающийся через конечную комбинацию элементарных функций.

5.3 Случай $m = 3$

Будем интегрировать уравнение (38) с интегрирующим множителем (последним множителем Якоби) следующего вида:

$$
\varrho(u)=\frac{1}{u^s},\ s=4. \tag{86}
$$

Тогда уравнение (38) примет вид

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{g}{u^4}+\frac{h-d_1}{u^3}+\frac{iv}{u^4}+\frac{i_1v^2}{u^4}+\frac{(i_2-f)v}{u^3}+\frac{i_3-e}{u^2}\right]dv=\\
&=\left[\frac{a}{u^4}+\frac{b}{u^3}+\frac{(c-d_1)v}{u^4}+\frac{(c_1-f)v^2}{u^4}+\frac{(c_2-e)v}{u^3}+\frac{c_3}{u^2}\right]du.
\end{aligned} \tag{87}
$$

Для интегрирования в элементарных функциях последнего тождества достаточно наложить 6 независимых соотношений:

$$g = 0,\ i = 0,\ i_1 = 0,\ h = \frac{c + 2d_1}{3},\ i_2 = \frac{2c_1 + f}{3},\ i_3 = \frac{c_2 + e}{2}. \tag{88}$$

Введем 9 параметров $\beta_1, \ldots, \beta_9$ и рассмотрим их в качестве независимых:

$$\begin{aligned} &\beta_1 = a,\ \beta_2 = b,\ \beta_3 = c,\ \beta_4 = c_1,\ \beta_5 = c_2,\\ &\beta_6 = c_3,\ \beta_7 = d_1,\ \beta_8 = e,\ \beta_9 = f. \end{aligned} \tag{89}$$

Таким образом, уравнение (38) при выполнении групп условий (88), (89) сводится к виду

$$\frac{dv}{du} = \frac{\beta_1 + \beta_2 u + \beta_6 u^2 + (\beta_3 - \beta_7)v + (\beta_4 - \beta_9)v^2 + (\beta_5 - \beta_8)uv}{(\beta_3 - \beta_7)u/3 + 2(\beta_4 - \beta_9)uv/3 + (\beta_5 - \beta_8)u^2/2}, \tag{90}$$

а система (34), (35), соответственно, к виду

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{\beta_1 + \beta_2 u + \beta_6 u^2 + (\beta_3 - \beta_7)v + (\beta_4 - \beta_9)v^2 + (\beta_5 - \beta_8)uv}{\beta_7 + \beta_8 u + \beta_9 v}, \tag{91}$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{(\beta_3 - \beta_7)u/3 + 2(\beta_4 - \beta_9)uv/3 + (\beta_5 - \beta_8)u^2/2}{\beta_7 + \beta_8 u + \beta_9 v}, \tag{92}$$

после чего уравнение (90) интегрируется через конечную комбинацию элементарных функций.

Действительно, интегрируя тождество (87), получаем следующее соотношение:

$$\begin{aligned} &d\left[\frac{(\beta_3 - \beta_7)v}{3u^3}\right] + d\left[\frac{(\beta_4 - \beta_9)v^2}{3u^3}\right] + d\left[\frac{(\beta_5 - \beta_8)v}{2u^2}\right] + d\left[\frac{\beta_1}{3u^3}\right] + d\left[\frac{\beta_2}{2u^2}\right] + \\ &+ d\left[\frac{\beta_6}{u}\right] = 0, \end{aligned} \tag{93}$$

которое для начала позволяет получить следующее инвариантное соотношение:

$$\begin{aligned} &\frac{((\beta_3 - \beta_7)/3)v + ((\beta_4 - \beta_9)/3)v^2 + ((\beta_5 - \beta_8)/2)uv + \beta_1/3 + \beta_2 u/2 + \beta_6 u^2}{u^3} = \\ &= C_1 = \text{const}, \end{aligned} \tag{94}$$

а затем в координатах (x, y, z) — первый интеграл в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\frac{((\beta_3 - \beta_7)/3)zx^2 + ((\beta_4 - \beta_9)/3)z^2x + ((\beta_5 - \beta_8)/2)yzx + \beta_1 x^3/3 + \beta_2 yx^2/2 + \beta_6 y^2 x}{y^3} = \\ &= C_1 = \text{const}. \end{aligned} \tag{95}$$

Таким образом, можно сделать вывод об интегрируемости в элементарных функциях следующей, вообще говоря, неконсервативной системы третьего порядка, зависящей от 9 параметров:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + \beta_4 z^2/x + \beta_5 zy/x + \beta_6 y^2/x}{\beta_7 x + \beta_8 y + \beta_9 z},\\ \frac{dy}{dx} &= \frac{(\beta_3 + 2\beta_7)y/3 + ((2\beta_4 + \beta_9)/3)zy/x + ((\beta_5 + \beta_8)/2)y^2/x}{\beta_7 x + \beta_8 y + \beta_9 z}. \end{aligned} \tag{96}$$

Следствие 5.3. *Следующая система третьего порядка*

$$
\begin{aligned}
&\dot\alpha = \beta_7 \sin\alpha + \beta_8 z_1 + \beta_9 z_2,\\
&\dot z_2 = \beta_1 \sin\alpha\cos\alpha + \beta_2 z_1\cos\alpha + \beta_3 z_2\cos\alpha +\\
&+\beta_4 z_2^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \beta_5 z_1 z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \beta_6 z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\\
&\dot z_1 = ((\beta_3+2\beta_7)/3) z_1\cos\alpha + ((2\beta_4+\beta_9)/3) z_1 z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + ((\beta_5+\beta_8)/2) z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},
\end{aligned}
\tag{97}
$$

зависящая от 9 параметров $\beta_1,\ldots,\beta_9$, *рассмотренная на множестве*

$$
\{\alpha\in\mathbf{R}^1:\ 0<\alpha<\pi\}\times\mathbf{R}^2\{z_1,z_2\},
\tag{98}
$$

обладает, вообще говоря, трансцендентным первым интегралом, выражающимся через элементарные функции:

$$
\frac{P_3(z_2,z_1,\sin\alpha)}{z_1^3} = C_1 = const,
\tag{99}
$$

где

$$
\begin{gathered}
P_3(z_2,z_1,\sin\alpha) =\\
= ((\beta_3-\beta_7)/3) z_2\sin^2\alpha + ((\beta_4-\beta_9)/3) z_2^2\sin\alpha + ((\beta_5-\beta_8)/2) z_1 z_2\sin\alpha +\\
+(\beta_1/3)\sin^3\alpha + (\beta_2/2) z_1\sin^2\alpha + \beta_6 z_1^2\sin\alpha
\end{gathered}
$$

— однородный полином степени 3 по совокупности переменных $(z_2,z_1,\sin\alpha)$.

Для нахождения дополнительного первого интеграла неавтономной системы (96) используется найденный первый интеграл (95), выражающийся через конечную комбинацию элементарных функций.

6 Некоторые случаи наличия трансцендентного первого интеграла

Будем интегрировать уравнение (38) с интегрирующим множителем (последним множителем Якоби) следующего вида:

$$
\varrho(u) = \frac{1}{u^s},\ s>1,\ s\neq 2, s\neq 3.
\tag{100}
$$

Тогда уравнение (38) примет вид

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{g}{u^s} + \frac{h-d_1}{u^{s-1}} + \frac{iv}{u^s} + \frac{i_1 v^2}{u^s} + \frac{(i_2-f)v}{u^{s-1}} + \frac{i_3-e}{u^{s-2}}\right] dv =\\
&= \left[\frac{a}{u^s} + \frac{b}{u^{s-1}} + \frac{(c-d_1)v}{u^s} + \frac{(c_1-f)v^2}{u^s} + \frac{(c_2-e)v}{u^{s-1}} + \frac{c_3}{u^{s-2}}\right] du.
\end{aligned}
\tag{101}
$$

Для интегрирования в элементарных функциях последнего тождества достаточно наложить 6 независимых соотношений:

$$
g=0,\ i=0,\ i_1=0,\ h=\frac{c+(s-2)d_1}{s-1},\ i_2=\frac{2c_1+(s-3)f}{s-1},\ i_3=\frac{c_2+(s-3)e}{s-2}.
\tag{102}
$$

Введем 9 параметров $\beta_1, \ldots, \beta_9$ и рассмотрим их в качестве независимых:

$$\begin{gathered}\beta_1 = a,\ \beta_2 = b,\ \beta_3 = c,\ \beta_4 = c_1,\ \beta_5 = c_2,\\ \beta_6 = c_3,\ \beta_7 = d_1,\ \beta_8 = e,\ \beta_9 = f.\end{gathered} \tag{103}$$

Таким образом, уравнение (38) при выполнении групп условий (102), (103) сводится к виду

$$\frac{dv}{du} = \frac{\beta_1 + \beta_2 u + \beta_6 u^2 + (\beta_3 - \beta_7)v + (\beta_4 - \beta_9)v^2 + (\beta_5 - \beta_8)uv}{(\beta_3 - \beta_7)u/(s-1) + 2(\beta_4 - \beta_9)uv/(s-1) + (\beta_5 - \beta_8)u^2/(s-2)}, \tag{104}$$

а система (34), (35), соответственно, к виду

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{\beta_1 + \beta_2 u + \beta_6 u^2 + (\beta_3 - \beta_7)v + (\beta_4 - \beta_9)v^2 + (\beta_5 - \beta_8)uv}{\beta_7 + \beta_8 u + \beta_9 v}, \tag{105}$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{(\beta_3 - \beta_7)u/(s-1) + 2(\beta_4 - \beta_9)uv/(s-1) + (\beta_5 - \beta_8)u^2/(s-2)}{\beta_7 + \beta_8 u + \beta_9 v}, \tag{106}$$

после чего уравнение (104) интегрируется через конечную комбинацию элементарных функций.

Действительно, интегрируя тождество (101), получаем следующее соотношение:

$$\begin{gathered}d\left[\frac{(\beta_3 - \beta_7)v}{(s-1)u^{s-1}}\right] + d\left[\frac{(\beta_4 - \beta_9)v^2}{(s-1)u^{s-1}}\right] + d\left[\frac{(\beta_5 - \beta_8)v}{(s-2)u^{s-2}}\right] + \\ + d\left[\frac{\beta_1}{(s-1)u^{s-1}}\right] + d\left[\frac{\beta_2}{(s-2)u^{s-2}}\right] + d\left[\frac{\beta_6}{(s-3)u^{s-3}}\right] = 0,\end{gathered} \tag{107}$$

которое для начала позволяет получить следующее инвариантное соотношение:

$$\frac{\frac{\beta_3-\beta_7}{s-1}v + \frac{\beta_4-\beta_9}{s-1}v^2 + \frac{\beta_5-\beta_8}{s-2}uv + \frac{\beta_1}{s-1} + \frac{\beta_2}{s-2}u + \frac{\beta_6}{s-3}u^2}{u^{s-1}} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{108}$$

а затем в координатах (x, y, z) — первый интеграл в следующем виде:

$$\begin{gathered}\frac{\frac{\beta_3-\beta_7}{s-1}zx^{s-2} + \frac{\beta_4-\beta_9}{s-1}z^2x^{s-3} + \frac{\beta_5-\beta_8}{s-2}yzx^{s-3} + \frac{\beta_1}{s-1}x^{s-1} + \frac{\beta_2}{s-2}yx^{s-2} + \frac{\beta_6}{s-3}y^2x^{s-3}}{y^{s-1}} = \\ = C_1 = \mathrm{const}.\end{gathered} \tag{109}$$

Таким образом, можно сделать вывод об интегрируемости в элементарных функциях следующей, вообще говоря, неконсервативной системы третьего порядка, зависящей от 9 параметров:

$$\begin{gathered}\frac{dz}{dx} = \frac{\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + \beta_4 z^2/x + \beta_5 zy/x + \beta_6 y^2/x}{\beta_7 x + \beta_8 y + \beta_9 z},\\ \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\beta_3+(s-2)\beta_7}{s-1}y + \frac{2\beta_4+(s-3)\beta_9}{s-1}zy/x + \frac{\beta_5+(s-3)\beta_8}{s-2}y^2/x}{\beta_7 x + \beta_8 y + \beta_9 z}.\end{gathered} \tag{110}$$

Следствие 6.1. *Следующая система третьего порядка*

$$
\begin{aligned}
&\dot{\alpha} = \beta_7 \sin\alpha + \beta_8 z_1 + \beta_9 z_2,\\
&\dot{z}_2 = \beta_1 \sin\alpha\cos\alpha + \beta_2 z_1 \cos\alpha + \beta_3 z_2 \cos\alpha +\\
&\quad + \beta_4 z_2^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \beta_5 z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \beta_6 z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\\
&\dot{z}_1 = \frac{\beta_3 + (s-2)\beta_7}{s-1} z_1 \cos\alpha + \frac{2\beta_4 + (s-3)\beta_9}{s-1} z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\beta_5 + (s-3)\beta_8}{s-2} z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},
\end{aligned}
\tag{111}
$$

зависящая от 9 параметров $\beta_1, \ldots, \beta_9$, *рассмотренная на множестве*

$$
\{\alpha \in \mathbf{R}^1 : \ 0 < \alpha < \pi\} \times \mathbf{R}^2\{z_1, z_2\},
\tag{112}
$$

обладает, вообще говоря, трансцендентным первым интегралом, выражающимся через элементарные функции:

$$
\frac{P_{s-1}(z_2, z_1, \sin\alpha)}{z_1^{s-1}} = C_1 = const,
\tag{113}
$$

где

$$
\begin{gathered}
P_{s-1}(z_2, z_1, \sin\alpha) =\\
= \frac{\beta_3 - \beta_7}{s-1} z_2 \sin^{s-2}\alpha + \frac{\beta_4 - \beta_9}{s-1} z_2^2 \sin^{s-3}\alpha + \frac{\beta_5 - \beta_8}{s-2} z_1 z_2 \sin^{s-3}\alpha +\\
+ \frac{\beta_1}{s-1} \sin^{s-1}\alpha + \frac{\beta_2}{s-2} z_1 \sin^{s-2}\alpha + \frac{\beta_6}{s-3} z_1^2 \sin^{s-3}\alpha
\end{gathered}
$$

— однородная функция степени $s-1$ *по совокупности переменных* $(z_2, z_1, \sin\alpha)$.

Для нахождения дополнительного первого интеграла неавтономной системы (110) используется найденный первый интеграл (109), выражающийся через конечную комбинацию элементарных функций.

7 Заключение

Рассматриваемые в данной работе динамические системы относятся к системам с переменной диссипацией с нулевым средним по имеющейся периодической координате. Более того, такие системы часто обладают полным списком первых интегралов, выражающихся через элементарные функции.

Итак, было приведено несколько случаев полной интегрируемости в динамике пространственного ($3D-$) движения тела в неконсервативном поле. При этом мы имели дело с тремя, на первый взгляд, независимыми свойствами:

1) выделенный выше класс систем (1) с отмеченными симметриями;

2) обладание этим классом систем переменной диссипацией с нулевым средним (по переменной α), что позволяет их рассматривать как "почти" консервативные системы;

3) в некоторых (пусть и достаточно маломерных) случаях обладание ими полным набором, вообще говоря, трансцендентных (с точки зрения комплексного анализа) первых интегралов.

Метод приведения исходных систем уравнений с правыми частями, содержащими полиномы от тригонометрических функций, к системам с полиномиальными правыми частями позволяет искать (или же доказывать их отсутствие) первые интегралы для систем более общего вида, а не только тех, которые обладают указанными симметриями (см. также [35]).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12–01–00020–а).

Список литературы

[1] Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНИТИ, 1985. — 304 с.

[2] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1972. — 331 с.

[3] Георгиевский Д.В., Шамолин М.В. Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$ // Доклады РАН. — 2001. — Т. 380. — № 1. — С. 47–50.

[4] Георгиевский Д.В., Шамолин М.В. Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$ // Доклады РАН. — 2002. — Т. 383. — № 5. — С. 635–637.

[5] Георгиевский Д.В., Шамолин М.В. Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$ // Вестн. Моск. ун–та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2003. — № 5. — С. 37–41.

[6] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979. — 760 с.

[7] Козлов В.В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // УМН. — 1983. — Т. 38. — № 1 — С. 3–67.

[8] Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. — М.–Л.: ОГИЗ, 1947.

[9] Самсонов В.А., Шамолин М.В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. — 1989. — № 3. — С. 51–54.

[10] Трофимов В.В., Шамолин М.В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фунд. и прикл. мат. — 2010. — Т. 16. — Вып. 4. — С. 3–229.

[11] Чаплыгин С.А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // В кн. Полн. собр. соч. Т. 1. Л.: Изд–во АН СССР, 1933. — С. 133–135.

[12] Чаплыгин С.А. Избранные труды. — М.: Наука, 1976. — 495 с.

[13] Шамолин М.В. К задаче о движении тела в среде с сопротивлением // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. — 1992. — № 1. — С. 52–58.

[14] Шамолин М.В. Об интегрируемом случае в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Известия РАН. МТТ. — 1997, № 2, с. 65–68.

[15] Шамолин М.В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. — 1998, Т. 53, вып. 3, с. 209–210.

[16] Шамолин М.В. Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Доклады РАН. — 1999. — Т. 364. — № 5. — С. 627–629.

[17] Шамолин М.В. Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде // Доклады РАН. — 2000. — Т. 375. — № 3. — С. 343–346.

[18] Шамолин М.В. Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathrm{so}(4) \times \mathbb{R}^4$ // Успехи мат. наук. — Т. 60. — Вып. 6, 2005. — С. 233–234.

[19] Шамолин М.В. Случай полной интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете вращательных производных момента сил по угловой скорости // Доклады РАН. — 2005. — Т. 403. — № 4. — С. 482–485.

[20] Шамолин М.В. Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании // Прикл. мат. и мех. — 2005. — Т. 69, вып. 6. — С. 1003–1010.

[21] Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. — М.: Изд–во "Экзамен", 2007. — 352 с.

[22] Шамолин М.В. Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы // Успехи мат. наук. — Т. 62. — Вып. 5, 2007. — С. 169–170.

[23] Шамолин М.В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фунд. и прикл. мат. — 2008. — Т. 14. — Вып. 3. — С. 3–237.

[24] Шамолин М.В. Новые интегрируемые случаи в динамике тела, взаимодействующего со средой, при учете зависимости момента силы сопротивления от угловой скорости // Прикл. мат. и мех. — 2008. — Т. 72, вып. 2. — С. 273–287.

[25] Шамолин М.В. Классификация случаев полной интегрируемости в динамике симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле // Современная математика и ее приложения. Т. 65. Математическая физика, комбинаторика и оптимальное управление. — 2009. — С. 132–142.

[26] Шамолин М.В. Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле // Доклады РАН, 2009. Т. 425. № 3. С. 338–342.

[27] Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемости в пространственной динамике твердого тела // Доклады РАН, 2010. Т. 431. № 3. С. 339–343.

[28] Шамолин М.В. Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле // Успехи мат. наук. — Т. 65. — Вып. 1, 2010. — С. 189–190.

[29] Шамолин М.В. Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле // Доклады РАН, 2011. Т. 437. № 2. С. 190–193.

[30] Шамолин М.В. Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // Доклады РАН, 2011. Т. 440. № 2. С. 187–190.

[31] Шамолин М.В. Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // Доклады РАН, 2012. Т. 444. № 5. С. 506–509.

[32] Шамолин М.В. Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования // Доклады РАН, 2012. Т. 442. № 4. С. 479–481.

[33] Шамолин М.В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения твердого тела в сопротивляющейся среде при учете линейного демпфирования // Вестн. Моск. ун–та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2012. — № 4. — С. 44–47.

[34] Шамолин М.В. Сопоставление случаев полной интегрируемости в динамике двумерного, трехмерного и четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле // Современная математика и ее приложения. Т. 76. Геометрия и механика. — 2012. — С. 84–99.

[35] Шамолин М.В. Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил / Итоги науки и техники. Сер. «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». Т. 125. М.: ВИНИТИ, 2013. С. 5–254.

[36] Shamolin M.V., Dynamical Pendulum-Like Nonconservative Systems, In: Applied Non-Linear Dynamical Systems, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Vol. 93, 2014, pp. 503–525.