УДК 531.01+531.552 ***механика***

Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде

М. В. Шамолин

1. В работах [1,2] была показана полная интегрируемость плоской задачи о движении твердого тела в сопротивляющейся среде в условиях струйного обтекания, когда у системы динамических уравнений существует один первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного, имеющей существенно особые точки) функцией квазискоростей. Тогда предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластинки.

Позднее [3,4] плоская задача была обобщена на пространственный (трехмерный) случай, при этом у системы динамических уравнений существует полный набор первых интегралов: один - аналитический, один – мероморфный и один – трансцендентный. Здесь предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского (двумерного) диска.

Часто структура динамических уравнений движения сохраняется при переносе динамических свойств на случаи большей размерности. Например, в настоящее время [5,6] развивается теория движения четырехмерного (или даже n-мерного) твердого тела. Авторам последних работ удалось показать гамильтоновость уравнений движения многомерного твердого тела около неподвижной точки. Настоящая статья посвящена изучению движения так называемого четырехмерного твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой по законам «струйного обтекания» и впервые представляет результаты по изучению данного вопроса.

В работе предполагается что все взаимодействие (четырехмерного) твердого тела со средой сосредоточено на той части (трехмерной) поверхности тела, которая имеет форму (трехмерного) шара. При этом вектор угловой скорости движения такого тела шестимерен, а скорость центра масс – четырехмерна.

2. Постановка задачи и уравнения на $so(4)$**.** Пусть четырехмерное твердое тело движется в сопротивляющейся среде, заполняющей четырехмерную область евклидового пространства, и все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части (трехмерной) поверхности тела, которая имеет форму трехмерного диска D^3. Расстояние от точки N приложения силы сопротивления до центра D диска является функцией лишь одного параметра – угла атаки α, который измеряется между скоростью $\vec{v}$ точки D и срединным перпендикуляром к диску, опущенным из центра C масс тела, в четырехмерном пространстве (ср. с [2,4]).

Сила сопротивления ортогональна в четырехмерном пространстве к диску D^3, и ее величина имеет вид $S = s_1(\alpha)v^2$, где s_1 - неотрицательный коэффициент сопротивления.

Свяжем с телом систему координат $Dx_1x_2x_3x_4$, ось Dx_1 которой совпадает с осью CD, а оси Dx_2, Dx_3, Dx_4 лежат в гиперплоскости диска.

Если оператор инерции в системе $Dx_1x_2x_3x_4$ имеет диагональный вид $diag\{I_1, I_2, I_3, I_4\}$, Ω - «матрица угловой скорости» твердого тела, $\Omega \in so(4)$, то та часть уравнений движения четырехмерного твердого тела, которая отвечает группе $so(4)$, имеет следующий вид [5-7]:

$$\Omega^{\bullet}\Lambda + \Lambda\Omega^{\bullet} + [\Omega, \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = \mathrm{M} \tag{1}$$

где $\Lambda = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}(-I_1 + I_2 + I_3 + I_4)$, …, $\lambda_4 = \frac{1}{2}(I_1 + I_2 + I_3 - I_4)$, M - момент «внешних сил», действующих на тело в R^4, спроектированный на «естественные» координаты в $so(4)$, $[\ ]$ - коммутатор в $so(4)$. Матрицу $\Omega \in so(4)$ удобно представлять в следующих естественных координатах:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_3 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ - компоненты «угловой скорости» в проекциях на естественные координаты в $so(4)$.

Коэффициент сопротивления s_1 удобно представлять в виде $s_1(\alpha) = s(\alpha) sign \cos\alpha$. Если $(0, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N})$ - координаты точки N в системе $Dx_1x_2x_3x_4$, $\{-S, 0, 0, 0\}$ - координаты вектора силы сопротивления в той же системе, то при вычислении момента силы сопротивления необходимо построить отображение

$$R^4 \times R^4 \to so(4) \tag{3}$$

переводящее пару векторов из R^4 в некоторый элемент из группы $so(4)$.

В проекциях на координаты в группе $so(4)$ момент силы сопротивления имеет следующий вид:

$$(0, 0, x_{4N}S, 0, -x_{3N}S, x_{2N}S) \in R^6 \cong \mathrm{M} \in so(4) \tag{4}$$

Здесь необходимо учесть, что если $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2)$ - сферические координаты в R^4, то $x_{2N} = R(\alpha)\cos\beta_1$, $x_{3N} = R(\alpha)\sin\beta_1\cos\beta_2$, $x_{4N} = R(\alpha)\sin\beta_1\sin\beta_2$.

С учетом всего можно получить уравнения движения в рассмотренном поле силы сопротивления:

$$(\lambda_4 + \lambda_3)\omega_1^\bullet + (\lambda_3 - \lambda_4)(\omega_3\omega_5 + \omega_2\omega_4) = 0 \tag{5}$$

$$(\lambda_2 + \lambda_4)\omega_2^\bullet + (\lambda_2 - \lambda_4)(\omega_3\omega_6 - \omega_1\omega_4) = 0 \tag{6}$$

$$(\lambda_4 + \lambda_1)\omega_3^\bullet + (\lambda_4 - \lambda_1)(\omega_2\omega_6 + \omega_1\omega_5) = x_{4N}S \tag{7}$$

$$(\lambda_3 + \lambda_2)\omega_4^\bullet + (\lambda_2 - \lambda_3)(\omega_5\omega_6 + \omega_1\omega_2) = 0 \tag{8}$$

$$(\lambda_1 + \lambda_3)\omega_5^\bullet + (\lambda_3 - \lambda_1)(\omega_4\omega_6 - \omega_1\omega_3) = -x_{3N}S \tag{9}$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\omega_6^\bullet + (\lambda_1 - \lambda_2)(\omega_4\omega_5 + \omega_2\omega_3) = x_{2N}S \tag{10}$$

3. Динамика на R^4. По аналогии с трехмерным случаем можно вывести формулы, аналогичные формулам Эйлера и Ривальса; т. е. скорости и ускорения любых двух точек A и B четырехмерного твердого тела в любой системе координат связаны следующими соотношениями:

$$v_B = v_A + \Omega AB, \; w_B = w_A + \Omega^2 AB + \mathrm{E}AB \tag{11}$$

где $\Omega \in so(4)$, $\mathrm{E} = \Omega^\bullet \in so(4)$. Матрица E называется «матрицей ускорения».

С помощью формул (11) можно получить уравнения движения центра масс четырехмерного твердого тела на R^4.

4. Движение в сопротивляющейся среде под действием сервосвязи (ср. с [1,4]). Рассмотрим такой класс движений тела, при котором во все время выполнено условие

$$v = const \qquad (12)$$

При этом предположим, что на тело действует некоторая (следящая) сила тяги, обеспечивающая выполнение условия (12) и являющаяся реакцией данной сервосвязи (ср. с двумерным и трехмерным случаями [1-4]).

Определенным выбором величины тяги вдоль прямой CD выполнение условия (12) может быть достигнуто [1,2].

5. Случай динамически симметричного твердого тела. Пусть по аналогии с трехмерным случаем выполнены равенства:

$$I_2 = I_3 = I_4 \qquad (13)$$

В таком случае существуют три циклических первых интеграла у уравнений (5)-(10):

$$\omega_1 = \omega_1^0, \omega_2 = \omega_2^0, \omega_4 = \omega_4^0$$

Рассмотрим для простоты движения на нулевых уровнях:

$$\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_4^0 = 0 \qquad (14)$$

Для описания движения тела используется пара динамических функций $(R(\alpha), s(\alpha))$, информация о которых носит качественный характер. По аналогии с «маломерными» случаями без ограничения общности [1-4] можно считать, что

$$R(\alpha) = A\sin\alpha,\ A > 0,\ s(\alpha) = B\cos\alpha,\ B > 0$$

В результате всего этого уравнения на «части» $so(4)$ примут следующий вид (здесь $n_0^2 = \dfrac{AB}{2I_2}$):

$$\omega_3^\bullet = n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 \qquad (15)$$

$$\omega_5^\bullet = -n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 \qquad (16)$$

$$\omega_6^\bullet = n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha\cos\beta_1 \qquad (17)$$

Если ввести естественную замену угловых скоростей по формулам

$$z_1 = \omega_3\cos\beta_2 + \omega_5\sin\beta_2 \qquad (18)$$

$$z_2 = -\omega_3\sin\beta_2\cos\beta_1 + \omega_5\cos\beta_2\cos\beta_1 + \omega_6\sin\beta_1 \qquad (19)$$

$$z_3 = \omega_3\sin\beta_2\sin\beta_1 - \omega_5\cos\beta_2\sin\beta_1 + \omega_6\cos\beta_1 \qquad (20)$$

то «совместные» уравнения движения на $so(4)\times R^4$ (после учета четырех условий (12) и (14)) примут симметричный вид:

$$\begin{cases} \alpha^{\bullet} = -z_3 + \sigma n_0^2 v \sin\alpha \\ z_3^{\bullet} = n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha - (z_1^2 + z_2^2)\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \\ z_2^{\bullet} = z_2 z_3 \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + z_1^2 \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} \\ z_1^{\bullet} = z_1 z_3 \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1 z_2 \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} \\ \beta_1^{\bullet} = z_2 \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \end{cases} \tag{21}$$

$$\beta_2^{\bullet} = -z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1} \tag{22}$$

У системы (21), (22) шестого порядка существует независимая подсистема пятого порядка (21). Для полного интегрирования данной системы необходимо, вообще говоря, знать пять независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных

$$z_1, z_2 \to z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, z_* = \frac{z_2}{z_1} \tag{23}$$

система (21), (22) приводится к следующему виду:

$$\begin{cases} \alpha^{\bullet} = -z_3 + \sigma n_0^2 v \sin\alpha \\ z_3^{\bullet} = n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha - z^2 \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \\ z^{\bullet} = z z_3 \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \end{cases} \tag{24}$$

$$\begin{cases} z_*^{\bullet} = \sqrt{1 + z_*^2}\, z \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} \\ \beta_1^{\bullet} = \dfrac{z z_*}{\sqrt{1 + z_*^2}}\dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta_1} \end{cases} \tag{25}$$

$$\beta_2^{\bullet} = -z_1(z, z_*)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1} \tag{26}$$

Видно, что система пятого порядка «распалась» на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (24) – третьего, а система (25) (конечно, после замены времени) – второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (24) – (26) достаточно указать два независимых интеграла системы (24), один – системы (25) и дополнительный интеграл, «привязывающий» уравнение (26).

Система (24) появляется в динамике трехмерного твердого тела [4]. Она обладает двумя трансцендентными интегралами:

$$\frac{z^2 + z_3^2 - \sigma n_0^2 v z_3 \sin\alpha + n_0^2 v^2 \sin^2\alpha}{z \sin\alpha} = C_1 = const \tag{27}$$

$$G\left(\frac{z}{\sin\alpha}, \frac{z_3}{\sin\alpha}, \sin\alpha\right) = C_2 = const \tag{28}$$

Система (25) имеет первый интеграл в виде

$$\frac{\sqrt{1 + z_*^2}}{\sin\alpha} = C_3 = const \tag{29}$$

и, в свою очередь, дополнительный первый интеграл имеет вид

$$\pm\frac{\cos\beta_1}{\sqrt{C_3^2 - 1}} = \sin\{C_3(\beta_2 + C_4)\}, C_4 = const \tag{30}$$

6. Ранее рассматривались лишь такие движения четырехмерного тела, когда $\mathrm{M} \equiv 0$. Данная работа открывает новое направление, развиваемое автором, в исследовании уравнений движения твердого тела на $so(4) \times R^4$ ($\mathrm{M} \neq 0$).

Методика же интегрирования рассматриваемых динамических систем почти всегда может быть распространена и на пространство $so(n) \times R^n$ произвольного динамически симметричного n-мерного твердого тела.

Институт механики
Московского Государственного
Университета им. М. В. Ломоносова

ЛИТЕРАТУРА

1. Самсонов В. А., Шамолин М. В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. - 1989. - № 3. – С. 51-54.
2. Самсонов В. А., Шамолин М. В. Модельная задача о движении тела в среде со струйным обтеканием. Научн. отчет Института механики МГУ № 3969. – М.: Изд-во Ин-та механики МГУ, 1990. – 80 с.
3. Шамолин М.В. Об интегрируемом случае в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Известия РАН. МТТ. – 1997. - № 2. - С. 65-68.
4. Шамолин М.В. Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Доклады РАН. - 1999. - Т. 364. - № 5. - С. 627-629.
5. Богоявленский О. И. Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера // ДАН СССР. – 1986. – Т. 287. - № 5. – С. 1105-1108.
6. Богоявленский О. И. Динамика твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью // ДАН СССР. – 1983. – Т. 272. - № 6. – С. 1364-1367.
7. Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Геометрия скобок Пуассона и методы интегрирования по Лиувиллю систем на симметрических пространствах // Современные проблемы математики. Новейшие достижения. М.: ВИНИТИ, 1986. – Т. 29. – С. 3-80 (Итоги науки и техники).

УДК 531.01+531.552+517.925 ***механика***

Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде

М. В. Шамолин

Ранее была показана полная интегрируемость плоской задачи о движении твердого тела в сопротивляющейся среде в условиях струйного обтекания, когда у системы динамических уравнений существует один первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного, имеющей существенно особые точки) функцией квазискоростей. Тогда предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластинки.

Позднее плоская задача была обобщена на пространственный (трехмерный) случай, при этом у системы динамических уравнений существует полный набор первых интегралов: один - аналитический, один – мероморфный и один – трансцендентный. Здесь предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского (двумерного) диска.

В работе предполагается что все взаимодействие (четырехмерного) твердого тела со средой сосредоточено на той части (трехмерной) поверхности тела, которая имеет форму (трехмерного) шара. При этом вектор угловой скорости движения такого тела шестимерен, а скорость центра масс – четырехмерна.

Maxim V. Shamolin,

Integrability in terms of Jacobi in the problem of a motion of a 4D-body in a resisting medium