ОПТИМИЗАЦИЯ РАЗМЕЩЕНИЯ НЕСКОЛЬКИХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ НА РАКЕТЕ-НОСИТЕЛЕ

Комаров П.А.
НИИ механики МГУ им. Ломоносова М.В.
г. Москва, Мичуринский пр., д.1, kommail76@gmail.com
Шамолин М.В.
НИИ механики МГУ им. Ломоносова М.В.
г. Москва, Мичуринский пр., д.1, shamolin@imec.msu.ru

Задача размещения космических аппаратов (КА) возникает, когда сформированы группы КА, допускающие совместный запуск и необходимо определить, достаточен ли объем грузового отсека (ГО) ракеты-носителя для осуществления запуска.

Единственным гарантированным методом решения задач размещения является метод полного перебора.

Поскольку требуется учитывать пространственную геометрию объектов сложность проблемы и компьютерное время, необходимое для решения, значительно возрастает. Требуется перебирать не просто различные сочетания КА, но еще и различные их положения относительно друг друга.

Чтобы проиллюстрировать нетривиальность задачи упаковки геометрических объектов укажем результаты Эриха Фридмана, полученные в 1998 году [1]. Фридман рассматривал комбинацию из n кубов единичного объема, которые требуется упаковать в наименьший объем. Он показал, что для всех значений $n < 34$ оптимальным решением является тривиальная укладка, а при n = 9, …, 14, 28, ..., 33 упаковка может быть улучшена за счет не параллельного расположения кубов.

Рассмотрим задачу упаковки КА в контейнере под обтекателем с учетом геометрии КА. Будем считать, что декартова система координат *Oxyz* находится в центре меньшего сечения конуса, описывающего пространство ГО (см. рис.1).

В качестве параметров, описывающих геометрию усеченного конуса, выберем радиус его меньшего сечения *R*, расстояние между двумя параллельными сечениями *h* и угол φ между образующей и осью симметрии.

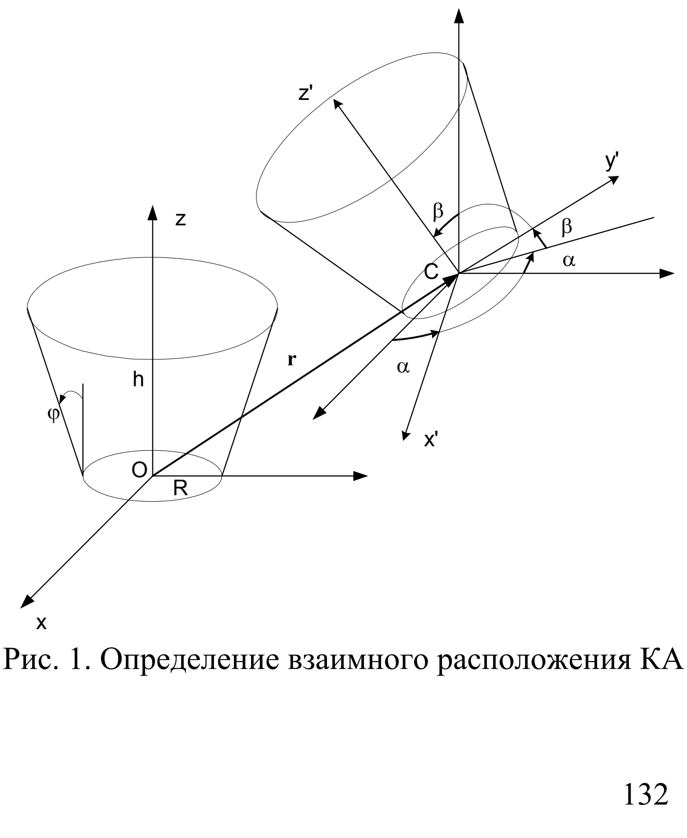

Рис. 1. Определение взаимного расположения КА

Тогда точка с координатами (*x*, *y*, *z*) находится в пределах ГО, если выполнены условия

$$0 \le x^2 + y^2 < (R_S + z * tg\varphi_S)^2 \qquad (1)$$

$$0 < z < h_S$$

где R_s, φ_s, h_s – параметры ГО.

Положение усеченного конуса, моделирующего КА относительно системы координат *Oxyz*, зададим с помощью смещения на вектора ***r*** поворота вокруг третьей оси на угол α и поворота вокруг первой оси на угол β. Систему координат, получившуюся после переноса и поворотов, обозначим $Cx'y'z'$.

Присвоим каждому КА из группы, допускающей совместный запуск, номер p_{KA}= 1, ..., *N*. Каждому КА соответствует свой набор

$R_{pKA}, \varphi_{pKA}, h_{pKA}$.

Пусть каждый из параметров $r_x, r_y, r_z, \alpha, \beta$, задающих размещение КА, имеет конечное множество значений, тогда всем положениям, которые может занимать КА, можно присвоить уникальный номер *j*.

Обозначим через V_j множество элементов вида $\{x, y, z, p\}$, для которых справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
&0 \le x'^2 + y'^2 < (R_{pKA} + z'\varphi_{pKA})^2,\ 0 < z' < h_{pKA},\\
&x' = (x - r_x)\cos\alpha - (y - r_y)\cos\beta\sin\alpha + (z - r_z)\sin\alpha\sin\beta\\
&y' = (x - r_x)\sin\alpha + (y - r_y)\cos\beta\cos\alpha - (z - r_z)\cos\alpha\sin\beta \qquad (2)\\
&z' = (y - r_y)\sin\beta + (z - r_z)\cos\beta\\
&0 \le x^2 + y^2 < (R_s + z\,tg\varphi_s)^2,\ 0 < z < h_s,\\
&p = p_{KA}
\end{aligned}$$

то есть точка с координатами (*x*, *y*, *z*) находится и в объем ГО и в объем КА номер *p*, размещенного в соответствии с параметрами.

Таки образом задача о размещении КА в пространстве ГО формализуется как известная *задача об упаковке множеств* [2].

Пусть множество *S* из элементов $\{x, y, z, p\}$ такое, что

$$0 \le x^2 + y^2 < (R_s + z * tg\varphi_s)^2,\ 0 < z < h_s,\ 1 \le p \le N \qquad (3)$$

Требуется найти максимальное количество взаимно непересекающихся множеств V_j вида (2).

Критерий компактности упаковки КА.

Обозначим матрицу тензора инерции i-го КА записанную в осях, начинающихся в центре масс КА и параллельных осям локальной системы координат $Cx'y'z'$ через $\mathbf{J}^i$.

Запишем суммарный тензор инерции в осях $C_{\delta i}xyz$, начинающихся в общем центре масс размещенных КА и параллельных осям базовой СК *Oxyz* :

$$\mathbf{J}_\Sigma = \sum_{i=1}^{N}\left(\mathbf{S}^{1,\beta}\mathbf{S}^{3,\alpha}\right)\mathbf{J}^i\left(\mathbf{S}^{1,\beta}\mathbf{S}^{3,\alpha}\right)^T + m^i\left(\Delta^{i^T}\Delta^i\mathrm{E} - \Delta^i\Delta^{i^T}\right) \qquad (4)$$

где

$$\Delta^i = \mathbf{r}_{\delta i}^{\Sigma} - \mathbf{r}^i - \left(\mathrm{S}^{1,\beta}\mathrm{S}^{3,\alpha}\right)^T\begin{bmatrix}0 & 0 & h_{\delta i}^i\end{bmatrix}^T$$

– вектор, проведенный из центра масс *i*-го КА в центр масс всех размещенных КА,

$\mathbf{S}^{1,\beta}$, $\mathbf{S}^{3,\alpha}$ - матрицы поворотов вокруг соответствующих осей.

Найдем главные моменты инерции совокупности КА. Для этого запишем характеристическое уравнение

$$\det(\mathbf{J}_\Sigma - \lambda\mathbf{E}) = 0 \qquad (5)$$

и найдем его корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Они и будут искомыми моментами инерции.

В качестве критерия компактности размещения КА можно использовать сумму главных центральных осевых моментов инерции совокупности размещенных КА

$$J_\Sigma = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \qquad (6)$$

Отсечение подмножеств, непригодных для размещения КА .

При размещении каждого последующего КА, из пространства доступного для размещения вычитается объем, занятый ранее размещенными КА. Кроме того, будет полезно оценить конфигурацию оставшегося доступного пространства и вычесть из него области, где новый КА не поместится.

Сделать это можно при помощи морфологических операций в трехмерном пространстве.

Введем сетку по осям x, y, z. Например, условимся, что приращение координат вектора **r** может происходить только на 1 см.

Отметим нулями все позиции, которые уже заполнены предыдущими КА, остальные пригодные для размещения позиции отметим единицами.

Заметим, что центральная точка КА, имеющая в трехграннике $Cx'y'z'$ координаты $\{0, 0, h/2\}$ не может оказаться ближе, чем на

$$h_{\text{ñë}} = \min(h/2, R + h/2\,\mathrm{tg}\,\varphi) \qquad (7)$$

к любому из окружающих объектов. Поэтому необходимо вычесть из пространства доступного для размещения слой толщиной $h_{\text{ñë}}$. Для этого проведем эрозию объема контейнера структурирующим элементом с радиусом $h_{\text{ñë}}$.

На рис 2. показан результат такой операции на примере, когда в отсеке уже размещены два КА и необходимо выбрать позицию для размещения третьего КА. Видно, что количество позиций, претендующих на размещение КА, сильно сократилось.

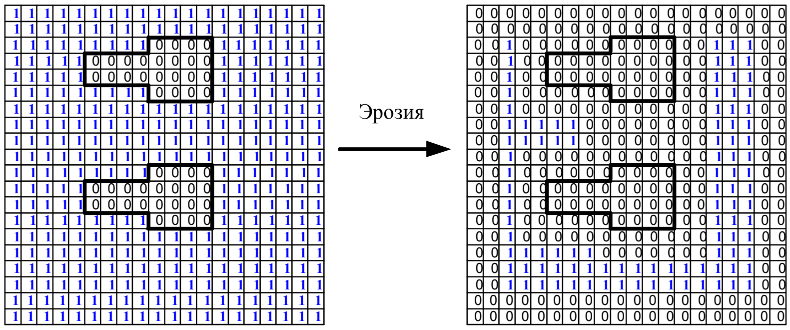

Рис.2. Эрозия со структурирующим элементом радиуса 2.

Некоторые варианты оптимального размещения

В процессе поиска возможного аналитического решения задачи размещения «малых» конгруэнтных усеченных конусов (цилиндров) в «большом» усеченном конусе (цилиндре) возникает естественная и достаточно сложная в общей постановке плоская задача о размещении малых конгруэнтных кругов в большом круге.

Предположим, что фиксированное конечное количество N одинаковых кругов фиксированного диаметра d предполагается разместить в «большом» круге диаметра D так, чтобы диаметр D был минимально возможным. Здесь ясно, что любое количество кругов фиксированного диаметра можно разместить в достаточно большом круге, но при этом главный смысл имеет именно размещение в круге сколь угодно меньшего диаметра.

Таким образом, величина D является функцией фиксированного диаметра d и количества N, т.е. $D = D(d, N)$, и эту величину необходимо минимизировать:

$$D = D(d, N) \longrightarrow \min\,. \qquad (8)$$

Без ограничения общности будем считать, что $d = 1$. Сразу же заметим, что оставшаяся (незаполненная) область для каждого фиксированного N будет изменяться как

$$W(1, N) = \pi D^2/4 - \pi d^2 N/4 = \pi(D^2(1, N) - N)/4. \qquad (9)$$

Для первых пяти N получаются симметричные картины, поскольку, во-первых, числа N достаточно малы, а, во-вторых, почти все они (за исключением числа 4) — взаимно простые.

$D(1, 1) = 1$; $D(1, 2) = 2$; $D(1, 3) \approx 2.154$; $D(1, 4) \approx 2.414$; $D(1, 5) \approx 2.701$;

$W(1, 1) = 0$; $W(1, 2) = \pi/2 \approx 1{,}572$; $W(1, 3) \approx 1{,}287$; $W(1, 4) \approx 1{,}435$; $W(1, 5) \approx 1{,}802$.

Начиная со значения $N = 6$, имеются простые делители. Поэтому оптимальное расположение не только центрально симметрично, но и осесимметрично относительно имеющихся трех осей симметрии. Незаполненная область в центре допускает вложение в нее дополнительного малого круга, что приводит к оптимальному решению задачи уже при $N = 7$.

Величина (8) принимает на данной паре одинаковые значения:

$D= D(1, 6) = D(1, 7)=3$ (10)

Оставшаяся (незаполненная) область (4) изменяется следующим образом:

$W(1, 6) = 3\pi/4 \approx 3{,}356$; $W(1, 7) = \pi/2 \approx 1{,}572$.

Явление «сохранения» (как в случае (10)) наблюдается и при переходе от $N = 18$ к $N = 19$ (рис. 3, 4).

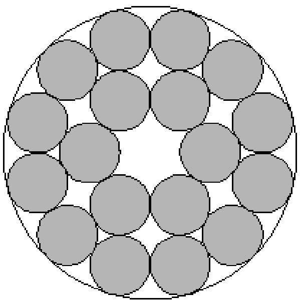

Рис. 3 ($N = 18$)

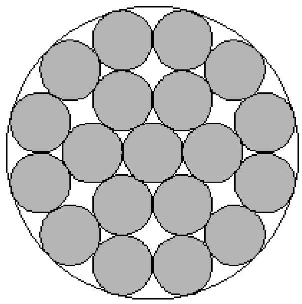

Рис. 4 ($N = 19$)

Величина (8) принимает на данной паре одинаковые значения

$D= D(1, 18) = D(1, 19) \approx 4.863$,

а оставшаяся (незаполненная) область (9) изменяется следующим образом:

$W(1, 18) \approx 4{,}436$; $W(1, 19) \approx 3{,}651$.

Такая картина повторяется и при переходе от $N = 54$ к $N = 55$.

Можно привести полный анализ (со строгими доказательствами) достаточно большого количества случаев (первые 20 случаев были получены ранее). В данной работе отметим лишь, что если при некотором N нарушается картина симметрии (т.е. начинают «пропадать» дополнительные осевые симметрии — при этом хотя бы одна осевая симметрия имеется всегда), то исходное N начинает «терять простые делители».

Список литературы

1. http://www2.stetson.edu/~efriedma/cubincub/
2. Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н.Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. Мир.1980.