Современная математика и ее приложения. Том 65 (2009). С. 132–142

УДК 517.9+531.01

КЛАССИФИКАЦИЯ СЛУЧАЕВ ПОЛНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ В ДИНАМИКЕ СИММЕТРИЧНОГО ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В НЕКОНСЕРВАТИВНОМ ПОЛЕ

© 2009 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. Данная работа представляет собой относительно законченный результат по исследованию уравнений движения динамически симметричного четырехмерного твердого тела в двух логически возможных случаях вида его тензора инерции, находящегося в неконсервативном поле сил. Вид расматриваемого поля сил заимствован из динамики реальных трехмерных твердых тел, взаимодействующих со средой.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Различные варианты движения

Исследованию случаев полной интегрируемости уравнений движения четырехмерного твердого тела посвящено огромное количество работ. Автор не претендует в данном вопросе на некое первенство, хотя при исследовании «маломерных» уравнений движения вполне конкретных (двумерных и трехмерных) твердых тел в неконсервативном поле сил пришла идея обобщить уравнения на случай движения четырехмерного твердого тела в аналогичном поле неконсервативных сил.

В результате такого обобщения получились два случая интегрируемости в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде, заполняющей четырехмерное пространство, при наличии некоторой следящей силы, позволяющей методическим образом понизить порядок общей системы динамических уравнений движения.

Более того, на взгляд автора, полученные результаты интересны с той точки зрения, что в системе присутствует (сильно) неконсервативная сила.

Ранее в [18, 20] автором была показана полная интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде в условиях струйного обтекания, когда у системы динамических уравнений существует первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного, имеющей существенно особые точки) функцией квазискоростей. Тогда предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластины.

Позднее [21, 22] плоская задача была обобщена на пространственный (трехмерный) случай, при этом у системы динамических уравнений существует полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского (двумерного) диска.

ISSN 1512–1712

В предлагаемой работе исследуются уравнения движения динамически симметричного твердого тела в двух логически возможных случаях в зависимости от расстановки главных моментов инерции. Структура таких уравнений движения в некотором смысле сохраняется при переносе на случаи большей размерности.

2. Два случая динамической симметрии четырехмерного тела

Пусть четырехмерное твердое тело Θ массы m с гладкой трехмерной границей $\partial\Theta$ движется в сопротивляющейся среде, заполняющей четырехмерную область евклидового пространства. Предположим, что оно является динамически симметричным, при этом имеются две логические возможности представления его тензора инерции: в некоторой связанной с телом системе координат $Dx_1x_2x_3x_4$ оператор инерции имеет либо вид

$$\mathrm{diag}\{I_1, I_2, I_2, I_2\}, \tag{1}$$

либо вид

$$\mathrm{diag}\{I_1, I_1, I_3, I_3\}. \tag{2}$$

Во втором случае двумерные плоскости Dx_1x_2 и Dx_3x_4 — плоскости динамической симметрии тела.

3. Физические предположения и уравнения на so(4)

Предположим, что расстояние от точки N приложения неконсервативной силы $\mathbf{S}$ до точки D является функцией лишь одного параметра — угла α: $DN = R(\alpha)$ (в случае движения в трехмерном пространстве это — угол атаки [20, 22]). В случае (1) этот угол измеряется между скоростью $\mathbf{v}_D$ точки D и осью Dx_1. В случае (2) смысл угла будет понятен из уравнений.

Неконсервативная сила (сопротивления) $\mathbf{S}$ имеет величину

$$S = s(\alpha)\,\mathrm{sgn}\cos\alpha \cdot v^2, \quad |\mathbf{v}_D| = v,$$

где s — некоторая функция, характеризующая в системе как рассеяние, так и подкачку энергии [18, 20].

Для получения явного вида динамической части уравнений движения определим функции R и S, используя при этом информацию о свойствах движения трехмерных тел, следующим образом [20] (при этом используется также известный аналитический результат С. А. Чаплыгина):

$$R = R(\alpha) = A\sin\alpha, \qquad S = S_v(\alpha) = Bv^2\cos\alpha; \quad A, B > 0.$$

Если Ω — тензор угловой скорости четырехмерного твердого тела, $\Omega \in \mathrm{so}(4)$, то та часть уравнений движения, которая отвечает алгебре $\mathrm{so}(4)$, имеет следующий вид [17, 19]:

$$\dot\Omega\Lambda + \Lambda\dot\Omega + [\Omega,\ \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M, \tag{3}$$

где

$$\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\},$$
$$\lambda_1 = \frac{(-I_1 + I_2 + I_3 + I_4)}{2}, \ldots,\ \lambda_4 = \frac{(I_1 + I_2 + I_3 - I_4)}{2},$$

M — момент внешних сил, действующих на тело в $\mathbb{R}^4$, спроектированный на естественные координаты в алгебре $\mathrm{so}(4)$, $[\ ]$ — коммутатор в $\mathrm{so}(4)$. Кососимметрическую матрицу $\Omega \in \mathrm{so}(4)$ будем представлять в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_3 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ω_5, ω_6 — компоненты тензора угловой скорости в проекциях на координаты в алгебре $\mathrm{so}(4)$.

При этом, очевидно, выполнены следующие равенства:

$$\lambda_i - \lambda_j = I_j - I_i$$

для любых $i, j = 1, \ldots, 4$.

При вычислении момента внешней силы необходимо построить отображение

$$\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathrm{so}(4),$$

переводящее пару векторов из $\mathbb{R}^4$ в некоторый элемент из алгебры $\mathrm{so}(4)$.

4. Динамика в $\mathbb{R}^4$

Что касается уравнения движения центра масс C четырехмерного твердого тела, то оно представится в виде

$$m\mathbf{w}_C = \mathbf{F}, \tag{4}$$

где по многомерной формуле Ривальса

$$\mathbf{w}_C = \mathbf{w}_D + \Omega^2\mathbf{DC} + E\mathbf{DC}, \qquad \mathbf{w}_D = \mathbf{v}_D + \Omega\mathbf{v}_D, \quad E = \dot{\Omega},$$

$\mathbf{F}$ — внешняя сила, действующая на тело (в нашем случае $\mathbf{F} = \mathbf{S}$), E — тензор углового ускорения.

5. Обобщенная задача о движении тела под действием следящей силы (ср. с [18, 21])

Несколько расширим задачу. Предположим, что по прямой Dx_1 (в случае (1)) или в плоскости Dx_1x_2 (в случае (2)) действует некоторая следящая сила $\mathbf{T}$, линия действия которой проходит через центр масс C. Введение данной силы используется для рассмотрения интересующих нас классов движений, в результате чего порядок динамической системы может быть понижен.

6. Случай (1)

Подразумевая, что на тело действует следящая сила $\mathbf{T}$, рассмотрим такой класс движений тела, при котором выполнено условие

$$v = \mathrm{const} \tag{5}$$

при всех t.

Вполне определенным выбором величины следящей силы выполнение условия (5) может быть достигнуто [20].

Если $(0, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N})$ — координаты точки N в системе $Dx_1x_2x_3x_4$, $\{-S, 0, 0, 0\}$ — координаты вектора силы сопротивления в той же системе, то для поиска момента силы строится вспомогательная матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & x_{3N} & x_{4N} \\ -S & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

которая позволяет получить в проекциях на координаты в алгебре $\mathrm{so}(4)$ момент силы сопротивления:

$$\{0, 0, x_{4N}S, 0, -x_{3N}S, x_{2N}S\} \in \mathbb{R}^6 \cong M \in \mathrm{so}(4).$$

Здесь необходимо учесть, что если $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2)$ — сферические координаты в $\mathbb{R}^4$, то

$$x_{2N} = R(\alpha)\cos\beta_1, \qquad x_{3N} = R(\alpha)\sin\beta_1\cos\beta_2, \qquad x_{4N} = R(\alpha)\sin\beta_1\sin\beta_2.$$

С учетом всего можно расписать уравнение (3) в виде

$$\begin{aligned}
&(\lambda_4 + \lambda_3)\dot{\omega}_1 + (\lambda_3 - \lambda_4)(\omega_3\omega_5 + \omega_2\omega_4) = 0, \\
&(\lambda_2 + \lambda_4)\dot{\omega}_2 + (\lambda_2 - \lambda_4)(\omega_3\omega_6 - \omega_1\omega_4) = 0, \\
&(\lambda_4 + \lambda_1)\dot{\omega}_3 + (\lambda_4 - \lambda_1)(\omega_2\omega_6 + \omega_1\omega_5) = x_{4N}S, \\
&(\lambda_3 + \lambda_2)\dot{\omega}_4 + (\lambda_2 - \lambda_3)(\omega_5\omega_6 + \omega_1\omega_2) = 0, \\
&(\lambda_1 + \lambda_3)\dot{\omega}_5 + (\lambda_3 - \lambda_1)(\omega_4\omega_6 - \omega_1\omega_3) = -x_{3N}S, \\
&(\lambda_1 + \lambda_2)\dot{\omega}_6 + (\lambda_1 - \lambda_2)(\omega_4\omega_5 + \omega_2\omega_3) = x_{2N}S.
\end{aligned} \tag{6}$$

Очевидно, что в случае (1) существуют три циклических первых интеграла у уравнений (6):

$$\omega_1 = \omega_1^0, \quad \omega_2 = \omega_2^0, \quad \omega_4 = \omega_4^0. \tag{7}$$

Рассмотрим для простоты движения на нулевых уровнях:

$$\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_4^0 = 0.$$

В результате этого оставшиеся уравнения на алгебре so(4) примут следующий вид (здесь $n_0^2 = AB/2I_2$):

$$\begin{aligned} \dot\omega_3 &= n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2, \\ \dot\omega_5 &= -n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2, \\ \dot\omega_6 &= n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha\cos\beta_1. \end{aligned}$$

Если ввести замену угловых скоростей по формулам

$$\begin{aligned} z_1 &= \omega_3\cos\beta_2 + \omega_5\sin\beta_2, \\ z_2 &= -\omega_3\sin\beta_2\cos\beta_1 + \omega_5\cos\beta_2\cos\beta_1 + \omega_6\sin\beta_1, \\ z_3 &= \omega_3\sin\beta_2\sin\beta_1 - \omega_5\cos\beta_2\sin\beta_1 + \omega_6\cos\beta_1, \end{aligned}$$

то «совместные» уравнения движения на касательном расслоении $T\mathbb{S}^3$ трехмерной сферы (после учета четырех условий (5) и (7), которые помогают снизить порядок общей системы динамических уравнений движения десятого порядка до шестого порядка) примут симметричный вид ($\sigma = DC$):

$$\begin{gathered} \dot\alpha = -z_3 + \sigma n_0^2 v\sin\alpha, \\ \dot z_3 = n_0^2 v^2\sin\alpha\cos\alpha - (z_1^2+z_2^2)\operatorname{ctg}\alpha, \\ \dot z_2 = z_2 z_3\operatorname{ctg}\alpha + z_1^2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta_1, \\ \dot z_1 = z_1 z_3\operatorname{ctg}\alpha - z_1 z_2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta_1, \\ \dot\beta_1 = z_2\operatorname{ctg}\alpha, \end{gathered} \tag{8}$$

$$\dot\beta_2 = -z_1\operatorname{ctg}\alpha\csc\beta_1. \tag{9}$$

У системы (8), (9) шестого порядка существует независимая подсистема пятого порядка (8). Для полного интегрирования данной системы необходимо, вообще говоря, знать пять независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$z_1, z_2 \to z = \sqrt{z_1^2+z_2^2}, z_* = \frac{z_2}{z_1}$$

система (8), (9) распадается следующим образом:

$$\begin{gathered} \dot\alpha = -z_3 + \sigma n_0^2 v\sin\alpha, \\ \dot z_3 = n_0^2 v^2\sin\alpha\cos\alpha - z^2\operatorname{ctg}\alpha, \\ \dot z = z z_3\operatorname{ctg}\alpha, \end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered} \dot z_* = \sqrt{1+z_*^2}\, z\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta_1, \\ \dot\beta_1 = \frac{z z_*}{\sqrt{1+z_*^2}}\cos\alpha\csc\beta_1, \end{gathered} \tag{11}$$

$$\dot\beta_2 = -z_1(z, z_*)\operatorname{ctg}\alpha\csc\beta_1. \tag{12}$$

Видно, что система (8) распалась на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (10) — третьего, а система (11) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (10)–(12) достаточно указать два независимых интеграла системы (10), один — системы (11) и дополнительный интеграл, «привязывающий» уравнение (12).

При этом заметим, что систему (10) можно рассматривать на касательном расслоении $T\mathbb{S}^2$ двумерной сферы.

Система (10) появляется в динамике трехмерного твердого тела [20, 21]. Она обладает двумя трансцендентными интегралами:

$$\frac{z^2+z_3^2-\sigma n_0^2 v z_3\sin\alpha+n_0^2v^2\sin^2\alpha}{z\sin\alpha}=C_1=\text{const},$$

$$G\left(\frac{z}{\sin\alpha},\frac{z_3}{\sin\alpha},\sin\alpha\right)=C_2=\text{const}\,.$$

Действительно, поскольку рассматриваемая система обладает переменной диссипацией и является аналитической, для нее удается в явном виде найти два других дополнительных интеграла. Выполнено тождество

$$u_1=\frac{1}{2}\{C_1\pm\mathcal{G}\},$$

где

$$\mathcal{G}=\sqrt{C_1^2-4[u_2^2-\sigma n_0^2 v u_2+n_0^2v^2]},\quad u_1=z_1\tau, u_2=z_2\tau,\quad \tau=\sin\alpha$$

(как видно, для поиска дополнительных первых интегралов используется полученный выше первый интеграл).

Итак, квадратура для поиска искомого интеграла, связывающего величины u_2 и τ, выглядит как

$$\int\frac{d\tau}{\tau}=\int\frac{(\sigma n_0^2 v-u_2)du_2}{2[u_2^2-\sigma n_0^2 v u_2+n_0^2v^2]-\dfrac{C_1}{2}(C_1\pm\mathcal{G})}.$$

Если

$$w_1=u_2-\frac{\sigma n_0^2 v}{2},$$

то правая часть последнего равенства примет следующий вид:

$$\int\frac{\left(\dfrac{\sigma n_0^2 v}{2}-w_1\right)dw_1}{2\left[w_1^2-\dfrac{n_0^2v^2(\sigma^2n_0^2-4)}{4}\right]-\dfrac{C_1}{2}(C_1\pm\mathcal{G})}.$$

Последний интеграл разбивается на части:

$$\frac{\sigma n_0^2 v}{2}\int\limits_{(1)}-\int\limits_{(2)},$$

где

$$\int\limits_{(1)}=\int\frac{dw_1}{\mathcal{G}_1},\qquad \int\limits_{(2)}=\int\frac{\frac{1}{2}dw_1^2}{\mathcal{G}_1},$$

$$\mathcal{G}_1=2\left[w_1^2-\frac{n_0^2v^2(\sigma^2n_0^2-4)}{4}\right]-\frac{C_1}{2}(C_1\pm\mathcal{G}).$$

Если ввести обозначения

$$a=\frac{n_0^2v^2(\sigma^2n_0^2-4)}{4},\quad x_1=w_1^2,\quad y_1^2=C_1^2-4(x_1-a),$$

то выполнено равенство

$$\int\limits_{(2)}=\frac{1}{2}\ln|y_1+C_1|+\text{const}\,.$$

Далее,

$$\int\limits_{(1)}=\pm\int\frac{dy_1}{(y_1+C_1)\sqrt{C_1^2-y_1^2+4a}}.$$

Пусть теперь для определенности $C_1^2 + 4a \geqslant 0$. Тогда

$$\int\limits_{(1)} = \pm \frac{1}{n_0^2 v^2 \sqrt{4 - \sigma^2 n_0^2}} \arcsin \frac{C_1 y_1 + C_1^2 + n_0^2 v^2 (\sigma^2 n_0^2 - 4)}{(y_1 + C_1)\sqrt{C_1^2 + n_0^2 v^2 (\sigma^2 n_0^2 - 4)}} + \mathrm{const},$$

если $\sigma n_0 < 2$,

$$\int\limits_{(1)} = \mp \frac{1}{C_1 (y_1 + C_1)} \sqrt{C_1^2 - y_1^2} + \mathrm{const},$$

если $\sigma n_0 = 2$,

$$\mp \int\limits_{(1)} = -\frac{1}{2 n_0^2 v^2 \sqrt{\sigma^2 n_0^2 - 4}} \ln \left| \frac{n_0 v \sqrt{\sigma^2 n_0^2 - 4} + \mathcal{G}_1}{y_1 + C_1} + \frac{C_1}{n_0 v \sqrt{\sigma^2 n_0^2 - 4}} \right| +$$
$$+ \frac{1}{2 n_0^2 v^2 \sqrt{\sigma^2 n_0^2 - 4}} \ln \left| \frac{n_0 v \sqrt{\sigma^2 n_0^2 - 4} - \mathcal{G}_1}{y_1 + C_1} + \frac{C_1}{n_0 v \sqrt{\sigma^2 n_0^2 - 4}} \right| + \mathrm{const},$$

если $\sigma n_0 > 2$.

Видно, что, таким образом, дополнительный первый интеграл исследуемой системы, который является трансцендентной функцией фазовых переменных, найден через конечную комбинацию элементарных функций.

Система (11) имеет первый интеграл в виде

$$\frac{\sqrt{1 + z_*^2}}{\sin \beta_1} = C_3 = \mathrm{const},$$

и, в свою очередь, дополнительный первый интеграл имеет вид

$$\pm \frac{\cos \beta_1}{\sqrt{C_3^2 - 1}} = \sin\{C_3(\beta_2 + C_4)\}, \quad C_4 = \mathrm{const}\,.$$

Необходимо также заметить тот факт, что в приведенных системах в знаменателях содержатся функции $\sin\alpha$ и $\sin\beta_1$, несущие информацию лишь о том, что координаты $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2)$ являются сферическими, и при $\sin\alpha = 0$ и $\sin\beta_1 = 0$ они (кинематически) вырождаются.

7. Случай (2)

Неконсервативная сила (сопротивления) $\mathbf{S} = \{S_1, S_2, 0, 0\}$ и координаты точки ее приложения $N = (0, 0, x_{3N}, x_{4N})$ в системе $Dx_1x_2x_3x_4$ определяются следующим образом:

$$S_1 = S \sin\gamma, \qquad S_2 = -S\cos\gamma, \quad \gamma = \mathrm{const},$$

$$x_{3N} = R\cos\beta_1, \qquad x_{4N} = R\sin\beta_1$$

(при этом γ — угол, измеряемый в плоскости Dx_1x_2, и β_1 — угол, измеряемый в плоскости Dx_3x_4).

Таким образом, для нахождения момента силы строится вспомогательная матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & x_{3N} & x_{4N} \\ S_1 & S_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если прямая CD лежит в плоскости Dx_1x_2 и вектор $\mathbf{DC}$ определяет положение центра масс:

$$\mathbf{DC} = \{\sigma\sin\gamma, -\sigma\cos\gamma, 0, 0\},$$

то вектор скорости $\mathbf{v}_D$ точки D можно представить в виде

$$\mathbf{v}_D = \{v\cos\alpha\sin\beta_2, v\cos\alpha\cos\beta_2, v\sin\alpha\cos\beta_1, v\sin\alpha\sin\beta_1\}, \quad |\,\mathbf{v}_D\,| = v,$$

где β_2 — угол, измеряемый в плоскости Dx_1x_2.

С учетом этого можно получить уравнения движения в рассмотренном поле внешней силы, переписав соответствующим образом уравнение (3):

$$
\begin{aligned}
&(\lambda_4+\lambda_3)\dot\omega_1+(\lambda_3-\lambda_4)(\omega_3\omega_5+\omega_2\omega_4)=0,\\
&(\lambda_2+\lambda_4)\dot\omega_2+(\lambda_2-\lambda_4)(\omega_3\omega_6-\omega_1\omega_4)=x_{4N}S_2,\\
&(\lambda_4+\lambda_1)\dot\omega_3+(\lambda_4-\lambda_1)(\omega_2\omega_6+\omega_1\omega_5)=-x_{4N}S_1,\\
&(\lambda_3+\lambda_2)\dot\omega_4+(\lambda_2-\lambda_3)(\omega_5\omega_6+\omega_1\omega_2)=-x_{3N}S_2,\\
&(\lambda_1+\lambda_3)\dot\omega_5+(\lambda_3-\lambda_1)(\omega_4\omega_6-\omega_1\omega_3)=x_{3N}S_1,\\
&(\lambda_1+\lambda_2)\dot\omega_6+(\lambda_1-\lambda_2)(\omega_4\omega_5+\omega_2\omega_3)=0,
\end{aligned}
\tag{13}
$$

где

$$\{0,x_{4N}S_2,-x_{4N}S_1,-x_{3N}S_2,x_{3N}S_1,0\}\in\mathbb{R}^6\cong M\in\mathrm{so}(4)$$

— момент силы сопротивления.

Очевидно, что система (13) допускает наличие двух циклических интегралов:

$$\omega_1=\omega_1^0=\mathrm{const},\qquad \omega_6=\omega_6^0=\mathrm{const}\,. \tag{14}$$

Будем рассматривать динамику системы на нулевых уровнях интегралов (14):

$$\omega_1^0=\omega_6^0=0.$$

Тогда оставшиеся уравнения на алгебре $\mathrm{so}(4)$ перепишутся как

$$
\begin{aligned}
\dot\omega_2&=-n_0^2v^2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\cos\gamma,\\
\dot\omega_3&=-n_0^2v^2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\sin\gamma,\\
\dot\omega_4&=n_0^2v^2\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta_1\cos\gamma,\\
\dot\omega_5&=n_0^2v^2\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta_1\sin\gamma,
\end{aligned}
$$

где $n_0^2=AB/(I_1+I_3)$.

По-прежнему подразумеваем, что на тело действует следящая сила $\mathbf{T}$, и рассмотрим такой класс движений тела, при котором выполнены условия (неинтегрируемые связи)

$$v=\mathrm{const},\qquad \beta_2=\mathrm{const} \tag{15}$$

при всех t.

Для этого следящую силу достаточно выбрать из тех условий, при которых первые два уравнения векторного уравнения (4) выполнялись бы тождественно.

Это соответствует тому, что результирующая внешняя сила $\mathbf{S}+\mathbf{T}$, действующая на тело, будет обеспечивать выполнение равенств (15), которые становятся инвариантными соотношениями. Тем самым порядок независимой системы восьмого порядка вновь снижается до шести.

Итак, выбирая соответствующим образом величину следящей силы, первые два уравнения векторного уравнения (4) можно удовлетворить тождественно, при этом, в принципе, могут выполняться инвариантные соотношения (15).

Поскольку выполнены следующие равенства:

$$\Omega\mathbf{v}_D=v\begin{pmatrix}\omega_5\sin\alpha\cos\beta_1-\omega_3\sin\alpha\sin\beta_1\\ -\omega_4\sin\alpha\cos\beta_1+\omega_2\sin\alpha\sin\beta_1\\ -\omega_5\cos\alpha\sin\beta_2+\omega_4\cos\alpha\cos\beta_2\\ \omega_3\cos\alpha\sin\beta_2-\omega_2\cos\alpha\cos\beta_2\end{pmatrix},$$

$$E\mathbf{DC}=\begin{pmatrix}0\\0\\-\sigma\dot\omega_5\sin\gamma-\sigma\dot\omega_4\cos\gamma\\ \sigma\dot\omega_3\sin\gamma+\sigma\dot\omega_2\cos\gamma\end{pmatrix},$$

$$\Omega^2\mathbf{DC} = \begin{pmatrix} -\sigma\omega_5^2\sin\gamma - \sigma\omega_4\omega_5\cos\gamma - \sigma\omega_3^2\sin\gamma - \sigma\omega_2\omega_3\cos\gamma \\ \sigma\omega_4\omega_5\sin\gamma + \sigma\omega_4^2\cos\gamma + \sigma\omega_2\omega_3\sin\gamma + \sigma\omega_2^2\cos\gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

то два последних скалярных уравнения векторного уравнения (4) примут вид

$$\begin{gathered} v\dot{\alpha}\cos\alpha\cos\beta_1 - v\dot{\beta}_1\sin\alpha\sin\beta_1 - \\ -\omega_5 v\cos\alpha\sin\beta_2 + \omega_4 v\cos\alpha\cos\beta_2 - \sigma\dot{\omega}_5\sin\gamma - \sigma\dot{\omega}_4\cos\gamma = 0, \end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered} v\dot{\alpha}\cos\alpha\sin\beta_1 + v\dot{\beta}_1\sin\alpha\cos\beta_1 + \\ +\omega_3 v\cos\alpha\sin\beta_2 - \omega_2 v\cos\alpha\cos\beta_2 + \sigma\dot{\omega}_3\sin\gamma + \sigma\dot{\omega}_2\cos\gamma = 0. \end{gathered} \tag{17}$$

Уравнения (16), (17) дополняют оставшиеся четыре уравнения на so(4) до замкнутой динамической системы шестого порядка.

В результате замены угловых скоростей по формулам

$$\begin{aligned} z_1 &= \omega_3\cos\beta_1 + \omega_5\sin\beta_1, & z_2 &= \omega_3\sin\beta_1 - \omega_5\cos\beta_1, \\ z_3 &= \omega_2\cos\beta_1 + \omega_4\sin\beta_1, & z_4 &= \omega_2\sin\beta_1 - \omega_4\cos\beta_1, \\ w_1 &= -z_1\sin\beta_2 + z_3\cos\beta_2, & w_2 &= z_3\sin\beta_2 + z_1\cos\beta_2, \\ w_3 &= z_2\sin\beta_2 - z_4\cos\beta_2, & w_4 &= z_4\sin\beta_2 + z_2\cos\beta_2 \end{aligned}$$

исследуемая система шестого порядка приводится к виду:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -w_3 + \sigma n_0^2 v\sin\alpha, \\ \dot{\beta}_1 &= w_1\operatorname{ctg}\alpha, \\ \dot{w}_1 &= w_3 w_1\operatorname{ctg}\alpha, \\ \dot{w}_2 &= -w_4 w_1\operatorname{ctg}\alpha, \\ \dot{w}_3 &= -n_0^2 v^2\sin\alpha\cos\alpha(\sin\gamma\sin\beta_2 - \cos\gamma\cos\beta_2) - w_1^2\operatorname{ctg}\alpha, \\ \dot{w}_4 &= -n_0^2 v^2\sin\alpha\cos\alpha(\cos\gamma\sin\beta_2 + \sin\gamma\cos\beta_2) + w_1 w_2\operatorname{ctg}\alpha. \end{aligned} \tag{18}$$

Иными словами, у системы шестого порядка (18) появляется независимая подсистема третьего порядка

$$\begin{gathered} \dot{\alpha} = -w_3 + \sigma n_0^2 v\sin\alpha, \\ \dot{w}_3 = n_0^2 v^2\sin\alpha\cos\alpha\cos(\gamma+\beta_2) - w_1^2\operatorname{ctg}\alpha, \\ \dot{w}_1 = w_3 w_1\operatorname{ctg}\alpha, \end{gathered} \tag{19}$$

а также могут быть выделены система второго порядка

$$\dot{w}_4 = -n_0^2 v^2\sin\alpha\cos\alpha\sin(\gamma+\beta_2) + w_1 w_2\operatorname{ctg}\alpha, \qquad \dot{w}_2 = -w_4 w_1\operatorname{ctg}\alpha \tag{20}$$

и уравнение

$$\dot{\beta}_1 = w_1\operatorname{ctg}\alpha. \tag{21}$$

Как было показано ранее, система (19), (21) обладает тремя, вообще говоря, независимыми первыми интегралами следующего вида:

$$\begin{gathered} \Phi_1(w_1, w_3, \sin\alpha) = \\ = \frac{w_1^2 + w_3^2 - \sigma n_0^2 v w_3\sin\alpha + n_0^2 v^2\cos(\gamma+\beta_2)\sin^2\alpha}{w_1\sin\alpha} = C_1 = \mathrm{const}, \end{gathered} \tag{22}$$

$$\Phi_2(w_1, w_3, \sin\alpha) = C_2 = \mathrm{const}, \tag{23}$$

$$\Phi_3(w_1, w_3, \sin\alpha, \beta_1) = C_3 = \mathrm{const}. \tag{24}$$

Все три указанных первых интеграла являются трансцендентными функциями своих фазовых переменных (с точки зрения комплексного анализа, имеющими после формального их продолжения в комплексную область существенно особые точки), выражающимися через элементарные функции.

В силу указанных редукций, в рассматриваемой системе шестого порядка для полного ее интегрирования достаточно указать еще один первый интеграл с независимыми интегралами (22)–(24).

После замены переменных

$$w_* = w_3 \sin(\gamma + \beta_2) + w_4 \cos(\gamma + \beta_2), \qquad w_{**} = w_1 \sin(\gamma + \beta_2) - w_2 \cos(\gamma + \beta_2)$$

система (20) может быть приведена к виду

$$\frac{dw_*}{d\beta_1} = -w_{**}, \qquad \frac{dw_{**}}{d\beta_1} = w_*,$$

который предполагает наличие аналитического первого интеграла

$$w_*^2 + w_{**}^2 = C_4 = \mathrm{const}\,.$$

Итак, исследуемая динамическая система вполне интегрируема в классе, вообще говоря, трансцендентных функций.

8. Заключение

Ранее авторами в основном рассматривались лишь такие движения четырехмерного тела, когда $M \equiv 0$ (или имеется ненулевой момент консервативной силы, см., например, работы О. И. Богоявленского [2, 3], А. П. Веселова [4, 5], С. В. Манакова [16] и многих других авторов (нет возможности упомянуть всех)). Данная работа открывает направление, развиваемое автором, в исследовании уравнений движения твердого тела на $\mathrm{so}(4) \times \mathbb{R}^4$ при наличии момента неконсервативной внешней силы (см. также [1, 6–15, 23–42]).

Методика интегрирования рассматриваемых динамических систем часто может быть распространена и на пространство $\mathrm{so}(n) \times \mathbb{R}^n$ произвольного динамически симметричного n-мерного твердого тела (при данных модельных предположениях).

Благодарности. Автор выражает искреннюю благодарность профессору А. В. Михалеву за обсуждение результатов и ценные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 08–01–00231-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агафонов С. А., Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Некоторые актуальные задачи геометрии и механики// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — *23*. — 34 с.
2. *Богоявленский О. И.* Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера// Докл. АН СССР. — 1986. — *287*, № 5. — С. 1105–1108.
3. *Богоявленский О. И.* Динамика твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью// Докл. АН СССР. — 1983. — *272*, № 6. — С. 1364–1367.
4. *Веселов А. П.* Уравнение Ландау—Лифшица и интегрируемые системы классической механики// Докл. АН СССР. — 1983. — *270*, № 5. — С. 1094–1097.
5. *Веселов А. П.* Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на $\mathrm{so}(4)$// Докл. АН СССР. — 1983. — *270*, № 6. — С. 1298–1300.
6. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* О кинематике твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». Фундам. и прикл. мат. — 2001. — *7*, № 1. — 315 с.
7. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2001. — *380*, № 1. — С. 47–50.
8. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2002. — *383*, № 5. — С. 635–637.

9. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — No. 5. — С. 37–41.
10. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Валерий Владимирович Трофимов// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — *23.* — С. 5–6.
11. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* О кинематике твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — *23.* — С. 24–25.
12. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — *23.* — 30 с.
13. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в n-мерном пространстве// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — *23.* — 31 с.
14. *Георгиевский Д. В., Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрия и механика: задачи, подходы, методы// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». Фундам. и прикл. мат. — 2001. — *7*, № 1. — 301 с.
15. *Георгиевский Д. В., Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрия и механика: задачи, подходы, и методы// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — **23**. — 16 с.
16. *Манаков С. В.* Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела// Функц. анализ и его прил. — 1976. — *10*, № 4. — С. 93–94.
17. *Новиков С. П., Шмельцер И.* Периодические решения уравнения Кирхгофа свободного движения твердого тела и идеальной жидкости и расширенная теория Люстерника—Шнирельмана—Морса (ЛМШ). I// Функц. анализ и его прил. — 1981. — *15*, № 3. — С. 54–66.
18. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. — 1989. — *3*. — С. 51–54.
19. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Геометрия скобок Пуассона и методы интегрирования по Лиувиллю систем на симметрических пространствах// Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. ВИНИТИ. Москва. — 1986. — *29*. — С. 3–80.
20. *Шамолин М. В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. — М.: Экзамен, 2007.
21. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — *364*, № 5. — С. 627–629.
22. *Шамолин М. В.* Об интегрируемом случае в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Изв. РАН. МТТ. — 1997. — *2*. — С. 65–68.
23. *Шамолин М. В.* Задача о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде и один случай интегрируемости// Тезисы 3-ей Межд. конф. «Дифференциальные уравнения и приложения», Ст.-Петербург–2000. — 198 с.
24. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби задачи о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Тез. докл. Межд. конф. по дифф. уравнениям и дин. системам. Суздаль, 21–26.08.2000. — Владимир: Влад. гос. унив., 2000. — С. 196–197.
25. *Шамолин М. В.* Сопоставление некоторых интегрируемых случаев из двумерной, трехмерной и четырехмерной динамики твердого тела, взаимодействующего со средой// Тез. докл. V Крымской Межд. Мат. школы «Метод функции Ляпунова и его приложения» (МФЛ—2000). Крым, Алушта, 05–13.09.2000. — Симферополь, 2000. — 169 с.
26. *Шамолин М. В.* Об одном случае интегрируемости по Якоби в динамике четырехмерного твердого тела, взаимодействующего со средой// Тез. докл. Межд. конф. по дифферен. и интегр. уравнениям. Одесса, 12–14.09.2000. — Одесса: Изд-во «АстроПринт», 2000. — С. 294–295.
27. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — *375*, № 3. — С. 343–346.
28. *Шамолин М. В.* Интегрируемость задачи о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». Фундам. и прикл. мат. — 2001. — *7*, № 1. — 309 с.
29. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые случаи в динамике четырехмерного твердого тела, взаимодействующего со средой// Тез. конф. «Моделирование и исследование устойчивости систем» 22–25.5.2001. — Киев, 2001. — 344 с.

30. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике двумерного, трехмерного и четырехмерного твердого тела, взаимодействующего со средой// Анн. докл. VIII Всеросс. съезда по теорет. и прикл. механ. Пермь, 23–29.08.2001. — Екатеринбург: УрО РАН, 2001. — С. 599–600.
31. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые случаи в динамике двухмерного, трехмерного и четырехмерного твердого тела, взаимодействующего со средой// Тез. докл. Межд. конф. по дифф. уравнениям и дин. системам. Суздаль, 01–06.07.2002. — Владимир: Влад. гос. ун-т., 2002. — С. 142–144.
32. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае в динамике на $\mathrm{so}(4)\times\mathbb{R}^4$// Тез. докл. Всеросс. конф. «Дифференциальные уравнения и их приложения» (СамДиф–2005), Самара, 27 июня–2 июля 2005 г. — Самара, Изд-во «Универс-групп», 2005. — С. 97–98.
33. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathrm{so}(4)\times\mathbb{R}^n$// Успехи мат. наук. — 2005. — *60*, № 6. — С. 233–234.
34. *Шамолин М. В.* О случае полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела// Тез. докл. межд. конф. по дифф. уравн. и дин. сист. Владимир, 10–15.07.2006. — Владимир: Влад. гос. ун-т, 2006. — С. 226–228.
35. *Шамолин М. В.* Интегрируемость задачи о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — *23*. — 21 с.
36. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые случаи в динамике четырехмерного твердого тела, взаимодействующего со средой// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — *23*. — 27 с.
37. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости движения четырехмерного твердого тела—маятника, находящегося в потоке набегающей среды// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — *23*. — 37 с.
38. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле сил// Тез. докл. междун. конгр. «Нелинейный динамический анализ–2007», Санкт-Петербург, 4–8 июня 2007 г. — Санкт-Петербург: СПб. гос. ун-т, 2007. — 178 с.
39. *Шамолин М. В.* Случаи полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле сил// Тез. докл. Междун. конф. «Анализ и особенности», посвящ. 70-летию В. И. Арнольда, Москва, 20–24 авг. 2007 г. — М: МИАН, 2007. — С. 110–112.
40. *Shamolin M. V.* Methods of Analysis of Dynamics of a 2D– 3D– or 4D–rigid Body With a Medium// Abstr. Short Commun. Post. Sess. Of ICM'2002, Beijing, 2002, August 20–28. — Beijing, China: Higher Education Press, 2002. — 268 c.
41. *Shamolin M. V.* 4D rigid body and some cases of integrability// Abstracts of ICIAM07, Zurich, Switzerland, June 16–20, 2007, Zurich: ETH, 2007. — 311 c.
42. *Shamolin M. V.* The cases of integrability in $2D$-, $3D$- and $4D$-rigid body// Abstr. of Short Commun. and Post. of Int. Conf. «Dynamical Methods and Mathematical Modelling», Valladolid, Spane, Sept. 18–22, 2007. — Valladolid: ETSII, 2007. — 31 c.

М. В. Шамолин
Московский Государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
Институт механики, Москва, Россия
E-mail: `shamolin@imec.msu.ru`