Современная математика и ее приложения. Том 65 (2009). С. 122–131

УДК 517.925+531.01+531.552

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ В ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЯХ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ КОМПЛЕКСНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2009 г. **Ю. М. ОКУНЕВ, М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. Работа посвящена поиску случаев интегрируемости некоторого класса комплексных линейных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Замены переменных в комплексных уравнениях

Как известно, неавтономное уравнение с вещественными коэффициентами

$$\ddot{y} + p(t)\dot{y} + q(t)y = 0, \tag{1}$$

где $p(t)$, $q(t)$ — гладкие вещественные функции времени, заданные на некотором числовом интервале D, заменой

$$y(t) = u(t)z(t) \tag{2}$$

можно привести к виду

$$\ddot{z} + f(t)z = 0, \tag{3}$$

где

$$f(t) = q(t) - \frac{p^2(t)}{4} - \frac{\dot{p}(t)}{2}; \tag{4}$$

при этом функцию $u(t)$ достаточно выбрать в виде

$$u(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t} p(\xi)\,d\xi\right), \quad u(t_0) = 1. \tag{5}$$

Несложно показать, что и в случае, когда $p(t)$, $q(t)$ — аналитические комплекснозначные функции, то описанный выше прием также справедлив (см. также [1, 2, 4, 5, 12, 20, 24–26]).

Рассмотрим следующее уравнение, возникающее в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой [27–29] (см. также [10, 11, 15, 16]):

$$\ddot{y} + 2[\delta - i\nu p\exp(\varepsilon t)]\dot{y} - [\nu^2 p^2\exp(2\varepsilon t) - 1 + 2i\delta\nu p\exp(\varepsilon t)]y = \varepsilon[i\nu p\exp(\varepsilon t)]y, \tag{6}$$

где $y(t)$ — искомая комплекснозначная функция вещественного аргумента (времени t), δ, ν, p, ε — вещественные параметры, i — мнимая единица.

Если выбрать аналитическую замену (2), (5) неизвестной функции так, что

$$u(t) = \exp\left(\frac{i\nu p}{\varepsilon}\exp(t\varepsilon) - \delta t\right), \quad u(0) = \exp\left(\frac{i\nu p}{\varepsilon}\right), \tag{7}$$

то уравнение (6) приведется к виду, аналогичному (3):

$$\ddot{z} + (1+\delta^2)z = 0, \tag{8}$$

и оно легко интегрируется.

2. Уравнение более общего вида

Рассмотрим теперь случай более общего комплексного уравнения, появляющегося при изучении движения в среде твердых тел сложной формы [27–29]:

$$\ddot{y} + [(c_2-c_1)v(t) - \left(2-\frac{J_2}{J_1}\right)\omega_{s2}i]\dot{y} +$$
$$+\left[[k-(c_2-c_1)c_1]v^2(t) - \left(1-\frac{J_2}{J_1}\right)\omega_{s2}^2 - \left(1-\frac{J_2}{J_1}\right)\omega_{s2}(c_2-c_1)v(t)i\right]y = 0, \tag{9}$$

где k, c_1, c_2, J_1, J_2, ω_{s2} — положительные постоянные, а вещественная функция времени $v = v(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{v} = -c_1v^2, \tag{10}$$

которое легко интегрируется:

$$v(t) = \frac{v_0}{1+c_1v_0t}, \quad v_0 = v(0). \tag{11}$$

Сначала исследуем уравнение (9) при следующем упрощающем условии:

$$\frac{J_2}{J_1} = 0, \tag{12}$$

при этом оно примет вид

$$\ddot{y} + [(c_2-c_1)v(t) - 2\omega_{s2}i]\dot{y} +$$
$$+[[k-(c_2-c_1)c_1]v^2(t) - \omega_{s2}^2 - \omega_{s2}(c_2-c_1)v(t)i]y = 0. \tag{13}$$

3. Интегрирование упрощенного уравнения

Используя замену (2), (5), где

$$u(t) = (1+c_1v_0t)^{(c_1-c_2)/(2c_1)}\exp(i\omega_{s2}t), \quad u(0) = 1, \tag{14}$$

получаем, что уравнение (13) приводится к виду (3), где

$$f(t) = v^2(t)\left[k-(c_2-c_1)c_1 - \frac{1}{4}(c_1-c_2)^2\right] - \frac{1}{2}(c_2-c_1)\dot{v}(t). \tag{15}$$

Используя равенство (11), заключаем, что после проведенной замены уравнение (13) эквивалентно следующему:

$$(1+c_1v_0t)^2\ddot{z} + v_0^2\left[k - \frac{1}{4}(c_2^2-c_1^2)\right]z = 0. \tag{16}$$

Сделаем далее замену независимого переменного (времени t) таким образом, чтобы оператор дифференцирования в уравнении (16) преобразовывался следующим образом:

$$(\,^{\cdot}\,) = \frac{d}{dt} = v(t)\frac{d}{d\tau} = v(t)(\,'\,). \tag{17}$$

Тогда

$$d\tau = v(t)dt, \quad v(t) > 0. \tag{18}$$

Более того,
$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[v(t)\frac{d}{d\tau}\right] = \dot{v}(t)\frac{d}{d\tau} + v^2(t)\frac{d^2}{d\tau^2} = -c_1v^2(t)\frac{d}{d\tau} + v^2(t)\frac{d^2}{d\tau^2}, \tag{19}$$
в силу формул (11), (18).

Тогда уравнение (16) перейдет на любом конечном промежутке независимого переменного в следующее линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:
$$z'' - c_1z' + z\left[k - \frac{1}{4}(c_2^2 - c_1^2)\right] = 0, \tag{20}$$
при этом искомая функция, вообще говоря, комплекснозначная находится следующим образом (см. также [21, 22, 36–38, 41]).

1) $k < c_2^2/4$.

Тогда соответствующие собственные числа находятся из равенств
$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\Big(c_1 \pm \sqrt{c_2^2 - 4k}\Big). \tag{21}$$

При этом общее решение уравнения (20) принимает вид
$$z(\tau) = A_1\exp(\lambda_1\tau) + A_2\exp(\lambda_2\tau), \tag{22}$$
где $A_1, A_2 \in \mathbb{C}$.

2) $k = c_2^2/4$.

Тогда соответствующее кратное собственное число находится из равенства
$$\lambda = \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}c_1, \tag{23}$$
при этом общее решение уравнения (20) принимает вид
$$z(\tau) = (A_1 + A_2\tau)\exp(\lambda\tau), \tag{24}$$
где $A_1, A_2 \in \mathbb{C}$.

3) $k > c_2^2/4$.

Тогда соответствующие собственные числа находятся из равенств
$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\Big(c_1 \pm i\sqrt{4k - c_2^2}\Big); \tag{25}$$
при этом общее решение уравнения (20) принимает вид
$$z(\tau) = \exp\left(\frac{c_1}{2}\tau\right)\left\{A_1\cos\left[\frac{1}{2}\sqrt{4k - c_2^2}\tau\right] + A_2\sin\left[\frac{1}{2}\sqrt{4k - c_2^2}\tau\right]\right\}, \tag{26}$$
где $A_1, A_2 \in \mathbb{C}$.

Для возврата к исходной независимой переменной (времени t) заметим, что, в силу (17), (18), две независимые переменные можно выбрать зависимыми следующим образом:
$$t = \frac{\exp(c_1\tau) - 1}{c_1v_0}, \qquad \tau = \frac{1}{c_1}\ln(1 + c_1v_0t), \quad t = 0 \Leftrightarrow \tau = 0. \tag{27}$$

Теперь можно выписать общее решение уравнения (13), пользуясь тремя случаями **1)–3)**.

1) Если
$$z(t) = A_1(1 + c_1v_0t)^{d_1} + A_2(1 + c_1v_0t)^{d_2}, \tag{28}$$
где
$$d_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{c_1}\sqrt{c_2^2 - 4k}\right) > 0, \qquad d_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{c_1}\sqrt{c_2^2 - 4k}\right), \tag{29}$$
то окончательно
$$y(t) = [A_1(1 + c_1v_0t)^{e_1} + A_2(1 + c_1v_0t)^{e_2}]\exp(i\omega_{s2}t), \tag{30}$$
где $A_1,\ A_2 \in \mathbb{C}$, а также
$$e_1 = \frac{2c_1 - c_2 + \sqrt{c_2^2 - 4k}}{2c_1}, \qquad e_2 = \frac{2c_1 - c_2 - \sqrt{c_2^2 - 4k}}{2c_1}. \tag{31}$$

2) В данном случае после некоторых преобразований имеем искомое решение уравнения (13):

$$y(t) = (1 + c_1 v_0 t)^{(2c_1 - c_2)/(2c_1)} \left[A_1 + A_2 \frac{1}{c_1} \ln(1 + c_1 v_0 t)\right] \exp(i\omega_{s2} t), \tag{32}$$

где $A_1,\ A_2 \in \mathbb{C}$.

3) После несложных преобразований имеем общее решение уравнения (13) в виде

$$y(t) = (1 + c_1 v_0 t)^{(2c_1 - c_2)/(2c_1)} [A_1 \cos \Omega_1(t) + A_2 \sin \Omega_1(t)] \exp(i\omega_{s2} t), \tag{33}$$

где $A_1, A_2 \in \mathbb{C}$, а также

$$\Omega_1(t) = \frac{1}{2c_1} \sqrt{4k - c_2^2} \ln(1 + c_1 v_0 t). \tag{34}$$

4. Постановка задачи для уравнения более общего вида

Перепишем теперь комплексное уравнение (9) в следующем виде:

$$\ddot{y} + [(c_2 - c_1)v(t) - \left(2 - \frac{J_2}{J_1}\right)\omega_{s2} i]\dot{y} +$$

$$+ \left[[k - (c_2 - c_1)c_1]v^2(t) - \left(1 - \frac{J_2}{J_1}\right)\omega_{s2}^2 - \left(1 - \frac{J_2}{J_1}\right)\omega_{s2}(c_2 - c_1)v(t) i\right] y = 0, \tag{35}$$

где k, c_1, c_2, J_1, J_2, ω_{s2} — положительные постоянные, а вещественная функция времени $v = v(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{v} = -c_1 v^2; \tag{36}$$

при этом, как указано выше, оно легко интегрируется:

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + c_1 v_0 t}, \quad v_0 = v(0). \tag{37}$$

Будем исследовать уравнение (35) при достаточно общем условии

$$\frac{J_2}{J_1} > 0. \tag{38}$$

5. Приведенное уравнение и соответствующая неавтономная комплексная гамильтонова система

Используя естественные замены, приведем уравнение (35) к виду

$$w'' + \frac{1}{c_1^2}\left[k - \frac{c_2^2}{4} + b_1(c_2 - c_1)\frac{1}{v_0} e^{\tau} - \frac{b_1^2}{v_0^2}\ e^{2\tau}\right] = 0, \tag{39}$$

где

$$(\ ^{\cdot}\ ) = \frac{d}{dt} = v(t)\frac{d}{d\tau_1} = v(t) c_1 \frac{d}{d\tau} = v(t) c_1 (\ ^{\prime}\ ), \tag{40}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = -c_1 \dot{v}(t) \frac{d}{d\tau} + c_1^2 v^2(t) \frac{d^2}{d\tau^2}, \tag{41}$$

$$b_1 = \frac{1}{2}\frac{J_2}{J_1}\omega_{s2} i, \qquad c_1 \tau_1 = \ln(1 + c_1 v_0 t) = \tau. \tag{42}$$

Видно, что введенный параметр b_1 становится чисто мнимым.

Уравнение (39) эквивалентно следующей комплексной линейной неавтономной гамильтоновой системе с одной степенью свободы:

$$\tilde{w}' = -\frac{\partial H(\tilde{w}, w, \tau)}{\partial w}, \qquad w' = \frac{\partial H(\tilde{w}, w, \tau)}{\partial \tilde{w}} \tag{43}$$

с гамильтонианом

$$H(\tilde{w}, w, \tau) = \frac{\tilde{w}^2}{2} + \left[\frac{k}{c_1^2} - \frac{c_2^2}{4c_1^2} + \varepsilon \frac{c_2 - c_1}{c_1}\ e^{\tau} - \varepsilon^2\ e^{2\tau}\right] \frac{w^2}{2}, \tag{44}$$

где

$$\varepsilon = \frac{b_1}{c_1 v_0}. \tag{45}$$

Таким образом, рассматриваем линейную комплексную гамильтонову систему с чисто мнимым параметром ε.

6. Полный интеграл и уравнение Якоби

Для интегрирования системы (43) достаточно найти ее полный интеграл (см. также [3, 6, 7, 9, 13, 14, 19, 23, 30, 32–34, 39, 47, 48]):

$$S = S(\tau, w, \tilde{\alpha}),$$

где $\tilde{\alpha}$ — произвольная комплексная постоянная, как решение уравнения Гамильтона—Якоби

$$\frac{\partial S(\tau, w, \tilde{\alpha})}{\partial \tau} + H\left(\tilde{w}, \frac{\partial S(\tau, w, \tilde{\alpha})}{\partial w}, \tau\right) = 0. \tag{46}$$

Функцию $S = S(\tau, w, \tilde{\alpha})$ будем искать в виде

$$S = S(\tau, w, \tilde{\alpha}) = S_0(\tau, \tilde{\alpha}) \frac{w^2}{2}, \tag{47}$$

при этом уравнение в частных производных (46) преобразуется к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению Риккати (см. также [17, 18, 40, 42–46]):

$$\frac{dS_0(\tau, \tilde{\alpha})}{d\tau} + S_0^2(\tau, \tilde{\alpha}) + \left[\frac{k}{c_1^2} - \frac{c_2^2}{4c_1^2} + \varepsilon \frac{c_2 - c_1}{c_1}\ e^{\tau} - \varepsilon^2\ e^{2\tau}\right] = 0. \tag{48}$$

7. Нахождение частных решений уравнения Риккати

Уравнение (48) является уравнением Риккати, и его общее решение, вообще говоря, не выражается через конечную комбинацию элементарных функций [7, 8, 30, 31, 39].

Но, как известно, если найти хотя бы одно его частное решение, то можно выписать и его общее решение.

Сначала для простоты будем искать его частное решение в виде

$$S_0 = \alpha + \beta e^{\tau}. \tag{49}$$

Тогда коэффициенты α и β определяются из трех, вообще говоря, несовместных комплексных алгебраических уравнений

$$\beta^2 = \varepsilon^2, \quad \alpha^2 = -\frac{k'}{c_1^2}\left(k' = k - \frac{c_2^2}{4}\right), \quad \beta + 2\alpha\beta + \frac{c_2 - c_1}{c_1}\varepsilon = 0. \tag{50}$$

Три уравнения (50) совместны, по крайней мере, при следующем условии на коэффициент k:

A) $k = c_1(c_2 - c_1)$.
B) $k = 0$.

Случаи A) и B) соответственно характеризуются наличием у уравнения (48) следующих частных решений:

$$S_{01} = \left(\frac{c_2}{2c_1} - 1\right) - \varepsilon e^{\tau}, \tag{51}$$

$$S_{02} = -\frac{c_2}{2c_1} + \varepsilon e^{\tau}. \tag{52}$$

8. Нахождение полного интеграла гамильтоновой системы в случае А)

При выполнении условия А) уравнение (48) примет следующий вид (комплексную постоянную $\tilde{\alpha}$ на время в данной записи опустим):

$$\frac{dS_0(\tau)}{d\tau} + S_0^2(\tau) + \left[-\left(1 - \frac{c_2}{2c_1}\right)^2 + \varepsilon \frac{c_2 - c_1}{c_1} e^{\tau} - \varepsilon^2 \ e^{2\tau} \right] = 0. \tag{53}$$

Теперь общее решение уравнения (53) будем искать в виде

$$S_0 = S_{01} + z. \tag{54}$$

Действительно, это удобно, поскольку в случае (54) уравнение (53) преобразуется к уравнению Бернулли

$$z' + 2S_{01}z + z^2 = 0, \tag{55}$$

которое, в свою очередь, легко сводится к линейному неоднородному уравнению

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{z}\right) - 2S_{01}\left(\frac{1}{z}\right) - 1 = 0. \tag{56}$$

Решение уравнения (56) представляется в следующем виде:

$$\left(\frac{1}{z}\right) = \exp\left\{ \left(-2 + \frac{c_2}{c_1} \right)\tau - 2\varepsilon \exp\{\tau\} \right\} \cdot \left[\int\limits_0^{\tau} \exp\left\{ \left(2 - \frac{c_2}{c_1}\right)\xi + 2\varepsilon \exp\{\xi\} \right\} d\xi + \tilde{\alpha} \right], \tag{57}$$

где $\tilde{\alpha}$ — произвольная комплексная постоянная.

«Обращая» равенство (57), имеем

$$z = \frac{\exp\left\{ \left(2 - \dfrac{c_2}{c_1}\right)\tau + 2\varepsilon \exp\{\tau\} \right\}}{\tilde{\alpha} + \displaystyle\int_0^{\tau} \exp\left\{ \left(2 - \dfrac{c_2}{c_1}\right)\xi + 2\varepsilon \exp\{\xi\} \right\} d\xi}. \tag{58}$$

Таким образом, общее решение уравнения (53) имеет вид

$$S_0(\tau, \tilde{\alpha}) = \left(\frac{c_2}{2c_1} - 1\right) - \varepsilon e^{\tau} + \frac{\Phi_1(\tau)}{\tilde{\alpha} + \displaystyle\int_0^{\tau} \Phi_1(\xi) d\xi}, \tag{59}$$

где

$$\Phi_1(\tau) = \exp\left\{ \left(2 - \frac{c_2}{c_1}\right)\tau + 2\varepsilon \exp\{\tau\} \right\}. \tag{60}$$

Итак, в случае А) найден полный интеграл гамильтоновой системы (43), (44), соответствующей уравнению (39).

Теперь, как известно, интегралы гамильтоновой системы (43), (44), если известен полный интеграл (47), могут быть найдены из следующих равенств:

$$\frac{\partial S(\tau, w, \tilde{\alpha})}{\partial w} = \tilde{w}, \qquad \frac{\partial S(\tau, w, \tilde{\alpha})}{\partial \tilde{\alpha}} = -\tilde{\beta}' = \text{const}, \tag{61}$$

где второе из уравнений (61) наиболее важно:

$$\frac{\partial S_0(\tau, \tilde{\alpha})}{\partial \tilde{\alpha}} \frac{w^2}{2} = -\frac{\Phi_1(\tau)}{\left[\tilde{\alpha} + \displaystyle\int_0^{\tau} \Phi_1(\xi) d\xi\right]^2} \frac{w^2}{2} = -\frac{\tilde{\beta}_1}{2} = \text{const}\,. \tag{62}$$

Соотношение (62) и позволяет найти зависимость решения приведенного уравнения (39) от независимой переменной τ, а также от двух произвольных комплексных постоянных $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ в случае А):

$$w(\tau) = \tilde{\beta}\left[\exp\left\{ \left(\frac{c_2}{2c_1} - 1\right)\tau - \varepsilon \exp\{\tau\} \right\} \right] \cdot \left[\tilde{\alpha} + \int\limits_0^{\tau} \Phi_1(\xi) d\xi \right], \tag{63}$$

где, по-прежнему,

$$\Phi_1(\tau) = \exp\left\{\left(2 - \frac{c_2}{c_1}\right)\tau + 2\varepsilon \exp\{\tau\}\right\}.$$

9. Нахождение полного интеграла гамильтоновой системы в случае B)

При выполнении условия B) уравнение (48) примет следующий вид (комплексную постоянную $\tilde{\alpha}$ на время в данной записи опустим):

$$\frac{dS_0(\tau)}{d\tau} + S_0^2(\tau) + \left[-\frac{c_2^2}{4c_1^2} + \varepsilon\frac{c_2 - c_1}{c_1}e^{\tau} - \varepsilon^2\ e^{2\tau}\right] = 0. \tag{64}$$

Теперь общее решение уравнения (64) будем искать в виде

$$S_0 = S_{02} + z. \tag{65}$$

Действительно, это удобно, поскольку в случае (65) уравнение (53) преобразуется к уравнению Бернулли

$$z' + 2S_{02}z + z^2 = 0, \tag{66}$$

которое, в свою очередь, легко сводится к линейному неоднородному уравнению

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{z}\right) - 2S_{02}\left(\frac{1}{z}\right) - 1 = 0. \tag{67}$$

Решение уравнения (67) представляется в виде

$$\left(\frac{1}{z}\right) = \exp\left\{-\frac{c_2}{c_1}\tau + 2\varepsilon\exp\{\tau\}\right\}\cdot\left[\int\limits_0^{\tau}\exp\left\{\frac{c_2}{c_1}\xi - 2\varepsilon\exp\{\xi\}\right\}d\xi + \tilde{\alpha}\right], \tag{68}$$

где $\tilde{\alpha}$ — произвольная комплексная постоянная.

«Обращая» равенство (68), имеем

$$z = \frac{\exp\left\{\dfrac{c_2}{c_1}\tau - 2\varepsilon\exp\{\tau\}\right\}}{\tilde{\alpha} + \displaystyle\int_0^{\tau}\exp\left\{\dfrac{c_2}{c_1}\xi - 2\varepsilon\exp\{\xi\}\right\}d\xi}. \tag{69}$$

Таким образом, общее решение уравнения (64) имеет вид

$$S_0(\tau, \tilde{\alpha}) = -\frac{c_2}{2c_1} + \varepsilon e^{\tau} + \frac{\Phi_2(\tau)}{\tilde{\alpha} + \displaystyle\int_0^{\tau}\Phi_2(\xi)d\xi}, \tag{70}$$

где

$$\Phi_2(\tau) = \exp\left\{\frac{c_2}{c_1}\tau - 2\varepsilon\exp\{\tau\}\right\}. \tag{71}$$

Итак, в случае B) найден полный интеграл гамильтоновой системы (43), (44), соответствующей уравнению (39).

Теперь, как известно, интегралы гамильтоновой системы (43), (44), если известен полный интеграл (47), могут быть найдены из следующих равенств:

$$\frac{\partial S(\tau, w, \tilde{\alpha})}{\partial w} = \tilde{w}, \qquad \frac{\partial S(\tau, w, \tilde{\alpha})}{\partial\tilde{\alpha}} = -\tilde{\beta}' = \mathrm{const}, \tag{72}$$

где второе из уравнений (72) наиболее важно:

$$\frac{\partial S_0(\tau, \tilde{\alpha})}{\partial\tilde{\alpha}}\frac{w^2}{2} = -\frac{\Phi_2(\tau)}{\left[\tilde{\alpha} + \displaystyle\int_0^{\tau}\Phi_2(\xi)d\xi\right]^2}\frac{w^2}{2} = -\frac{\tilde{\beta}_2}{2} = \mathrm{const}\,. \tag{73}$$

Соотношение (73) и позволяет найти зависимость решения приведенного уравнения (39) от независимой переменной τ, а также от двух произвольных комплексных постоянных $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ в случае B):

$$w(\tau) = \tilde{\beta}\Big[\exp\Big\{-\frac{c_2}{2c_1}\tau + \varepsilon\exp\{\tau\}\Big\}\Big]\cdot\Big[\tilde{\alpha} + \int\limits_0^\tau \Phi_2(\xi)d\xi\Big], \tag{74}$$

где, по-прежнему,

$$\Phi_2(\tau) = \exp\left\{\frac{c_2}{c_1}\tau - 2\varepsilon\exp\{\tau\}\right\}.$$

Тем самым, решение исходного уравнения (35) в случаях A), B) может быть найдено из формул (72) после приведения вспомогательных переменных w, τ к исходным y и t.

10. Приведение к исходным переменным

Вернемся к исходным переменным и перепишем найденные решения комплексных дифференциальных уравнений.

Искомое решение уравнения (35) будет выражаться формулой

$$y(t) = w(t)u_1(t)u_2(t), \tag{75}$$

где

$$u_1(t) = (1 + c_1v_0t)^{(c_1-c_2)/(2c_1)}\cdot\exp\left\{\left(1 - \frac{J_2}{2J_1}\right)\omega_{s2}it\right\}, \tag{76}$$

$$u_2(t) = \exp\left\{\frac{\tau}{2}\right\} = (1 + c_1v_0)^{1/2}. \tag{77}$$

Тогда получим некоторый промежуточный результат:

$$y(t) = w(t)\left[(1 + c_1v_0t)^{(2c_1-c_2)/(2c_1)}\cdot\exp\left\{\left(1 - \frac{J_2}{2J_1}\right)\omega_{s2}it\right\}\right]. \tag{78}$$

Напомнив, что справедливо представление независимого переменного

$$e^\tau = 1 + c_1v_0t, \tag{79}$$

для случаев A) и B) соответственно имеем:

$$w(t) = \tilde{\beta}(1 + c_1v_0t)^{(c_2-2c_1)/(2c_1)}\cdot\exp\{-\varepsilon(1 + c_1v_0t)\}\cdot\left[\tilde{\alpha} + \int\limits_0^t \Psi_1(\xi)d\xi\right], \tag{80}$$

где

$$\Psi_1(t) = (1 + c_1v_0t)^{(2c_1-c_2)/(c_1)}\exp\{2\varepsilon(1 + c_1v_0t)\},$$

а также

$$w(t) = \tilde{\beta}(1 + c_1v_0t)^{(-c_2)/(2c_1)}\cdot\exp\{\varepsilon(1 + c_1v_0t)\}\cdot\left[\tilde{\alpha} + \int\limits_0^t \Psi_2(\xi)d\xi\right], \tag{81}$$

где

$$\Psi_2(t) = (1 + c_1v_0t)^{(c_2)/(c_1)}\exp\{-2\varepsilon(1 + c_1v_0t)\}.$$

Таким образом, переходя к первоначальным обозначениям, учитывая, что

$$\varepsilon = \frac{b_1}{c_1v_0} = \frac{1}{2}\frac{J_2}{J_1}\frac{\omega_{s2}i}{c_1v_0}, \tag{82}$$

можно окончательно записать для случаев A) и B) соответственно:

$$y(t) = \tilde{\beta}\exp\left\{\left(1 - \frac{J_2}{J_1}\right)\omega_{s2}it\right\}\cdot\left[\tilde{\alpha} + \int\limits_0^t \Psi_1(\xi)d\xi\right], \tag{83}$$

$$y(t) = \tilde{\beta}(1 + c_1 v_0 t)^{(c_1 - c_2)/(c_1)} \cdot \exp\{\omega_{s2} it\} \cdot \left[\tilde{\alpha} + \int\limits_0^t \Psi_2(\xi) d\xi\right]. \tag{84}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 08-01-00231-a).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андронов А. А.* Собрание трудов. — М.: Изд-во АН СССР, 1956.
2. *Андронов А. А., Понтрягин Л. С.* Грубые системы// Докл. АН СССР. — 1937. — *14*, № 5. — С. 247–250.
3. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. — М.: Наука, 1981. — 568 с.
4. *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. — М.: Наука, 1966.
5. *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1967. — 467 с.
6. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1989. — 472 с.
7. *Бендиксон И.* О кривых определяемых дифференциальными уравнениями// Успехи мат. наук. — 1941. — *9*.
8. *Борисенок И. Т., Локшин Б. Я., Привалов В. А.* О динамике полета осесимметричных вращающихся тел в воздушной среде// Изв. АН СССР. МТТ. — 1984. — *2*. — С. 35–42.
9. *Брюно А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1979. — 253 с.
10. *Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В.* Динамика продольного и бокового движения. — М.: Машиностроение, 1969. — 349 с.
11. *Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В.* Динамика самолета. Пространственное движение. — М.: Машиностроение, 1988. — 320 с.
12. *Годбийон К.* Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. — М.: Мир, 1973. — 188 с.
13. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. — М.-Л.: Гостехиздат, 1950. — 436 с.
14. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. — М.-Л.: Гостехиздат, 1953. — 288 с.
15. *Гуревич М. И.* Теория струй идеальной жидкости. — М.: Наука, 1979. — 322 с.
16. *Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Изв. РАН. МЖГ. — 1995. — *3*. — С. 23–27.
17. *Жуковский Н. Е.* О падении легких, продолговатых тел, вращающихся вокруг своей продольной оси// П.с.с. — *5*. — С. 72–80, 100–115.
18. *Жуковский Н. Е.* О парении птиц// П.с.с. — *5*. — С. 49–59.
19. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Успехи мат. наук. — 1983. — *38*, № 1. — С. 3–67.
20. *Левшец С.* Геометрическая теория дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1961. — 387 с.
21. *Локшин Б. Я., Привалов В. А., Самсонов В. А.* Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. — М.: МГУ, 1986. — 86 с.
22. *Локшин Б. Я., Привалов В. А.,Самсонов В. А.* Введение в задачу о движении точки и тела в сопротивляющейся среде. — М.: МГУ, 1992. — 76 с.
23. *Локшин Б. Я., Окунев Ю. М., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Некоторые интегрируемые случаи пространственных колебаний твердого тела в сопротивляющейся среде// Тез. докл. XXI научн. чтений по космонавтике (Москва, 28–31.01.1997). — М.: ИИЕТ РАН, 1997. — С. 82–83.
24. *Манин Ю. И.* Алгебраические аспекты нелинейных дифференциальных уравнений// Итоги науки и техн. Вып. 11. Соврем. пробл. мат. — М.: ВИНИТИ, 1978. — С. 5–112.
25. *Миллер У.* Симметрия и разделение переменных. — М.: Мир, 1981. — 342 с.
26. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.-Л.: Гостехиздат, 1949. — 550 с.
27. *Окунев Ю. М., Садовничий В. А.* Модельные динамические системы одной задачи внешней баллистики и их аналитические решения// Проблемы современной механики/ Под ред. чл.-кор. РАН С. С. Григоряна. — М.: МГУ. — 1998. — С. 28–46.

28. *Окунев Ю. М., Привалов В. А., Самсонов В. А.* Некоторые задачи о движении тела в сопротивляющейся среде// Тр. Всес. конф. «Нелинейные явления». — М.: Наука, 1991. — С. 140–144.
29. *Окунев Ю. М., Садовничий В. А., Самсонов В. А., Черный Г. Г.* Комплекс моделирования задач динамики полета// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1996. — *6*, С. 66–75.
30. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. — М.-Л.: ОГИЗ, 1947.
31. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. — 1989. — *3*. — С. 51–54.
32. *Суслов Г. К.* Теоретическая механика. — М.: Гостехиздат, 1946. — 654 с.
33. *Татаринов Я. В.* Лекции по классической динамике. — М.: МГУ, 1984. — 296 с.
34. *Уиттекер Е. Т.* Аналитическая динамика. — М.: ОНТИ, 1937. — 500 с.
35. *Чаплыгин С. А.* Избранные труды. — М.: Наука, 1976. — 495 с.
36. *Шамолин М. В.* Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента// Прикл. мат. и мех. — 1993. — *57*, Вып. 4. — С. 40–49.
37. *Шамолин М. В.* Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1996. — *4*. — С. 57–69.
38. *Шамолин М. В.* Пространственные топографические системы Пуанкаре и системы сравнения// Успехи мат. наук. — 1997. — *52*, № 3. — С. 177–178.
39. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Успехи мат. наук. — 1998, *53*, № 3. — С. 209–210.
40. *Шамолин М. В.* О предельных множествах дифференциальных уравнений около сингулярных особых точек// Успехи мат. наук. — 2000. — *55*, № 3. — С. 187–188.
41. *Шамолин М. В.* Модельная задача о движении тела в сопротивляющейся среде с учетом зависимости момента силы сопротивления от угловой скорости. Научный отчет Ин-та механики МГУ № 4818. — М.: МГУ, 2006. — 44 с.
42. *Шамолин М. В.* Интегрируемость сильно неконсервативных систем в трансцендентных элементарных функциях// Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». — Соврем. мат. Фундам. направл. — 2007. — *23*. — 40 с.
43. *Шамолин М. В.* Полная интегрируемость уравнений движения пространственного маятника в потоке среды при учете вращательных производных момента силы ее воздействия// Изв. РАН. МТТ. — 2007. — *3*. — С. 187–192.
44. *Шамолин М. В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. — М.: Изд-во «Экзамен», 2007. — 352 с.
45. *Шамолин М. В.* Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. Издание 2-е, переработанное и дополненное. — М.: Изд–во «Экзамен», 2007. — 320 с.
46. *Эрроусмит Д., Плейс К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. — М.: Мир, 1986. — 243 с.
47. *Shamolin M. V., Shebarshov D. V.* LaGrange Tori and Equation of Hamilton–Jacobi, In: Book of Abstracts of Conference PDE Prague'98 (Praha, August 10–16, 1998; Partial Differential Equations: theory and numerical solutions); Charles University, Praha, Czech Rep., 1998. — 88 c.
48. *Shamolin M. V.*, New integrable cases and families of portraits in the plane and spatial dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2003. — *114*, № 1. — С. 919–975.

Ю. М. Окунев
Московский Государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
Институт механики, Москва, Россия

М. В. Шамолин
Московский Государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
Институт механики, Москва, Россия
E-mail: `shamolin@imec.msu.ru`