

ОПЕРАТОРЫ УСРЕДНЕНИЯ И РЕАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГИДРОМЕХАНИКИ

© 2009 г. **Р. Р. АЙДАГУЛОВ, М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. Обсуждаются псевдодифференциальные операторы, входящие в реальные уравнения механики сплошных сред.

В механике сплошных сред принято описывать эволюцию среды с помощью дифференциальных уравнений (как правило, в частных производных). В [1] показано, как, исходя только из естественных принципов, получить замкнутую систему уравнений эволюции среды. При этом автоматически получаются основные межфазные силы и замыкание уравнений с точностью до некоторых параметров. Последние являются функциями от некоторых характеристик течения типа коэффициента вязкости в зависимости от температуры и могут быть интерпретированы как замыкающие соотношения.

Авторы на базе этих принципов строили замкнутые модели сред. Однако здесь (как далее отмечено в работе) самым слабым и нефизическим принципом является принцип возможности описания эволюции среды как решения дифференциальных уравнений. В [1] авторы отказались от отдельных уравнений сохранения импульсов и энергии по каждой фазе, сохранив только общие (суммарные) для всех фаз законы сохранения. Однако в диссипативных средах приходится отказываться и от общих законов сохранения импульсов и энергии.

Соответственно, в описании движения (однофазной) жидкости неизбежным остается только закон сохранения массы:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} I = 0, \quad (1)$$

где I — импульс-вектор (поток массы) среды. Скорость среды определяется как отношение импульса к плотности:

$$v = \frac{I}{\rho}.$$

Импульс (рассчитанный на единицу объема) среды есть не что иное, как поток массы.

Импульс и энергия диссипативной среды локально не сохраняются, происходит постоянный обмен импульсами и энергией между соседними слоями жидкости и на границе течения жидкости с материалом границы. В [2,10] показано, что уравнения, описывающие эволюцию среды, являются псевдодифференциальными и выражаются (в изотропной среде) через следующие операторы:

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + v^1 \frac{\partial}{\partial x} + v^2 \frac{\partial}{\partial y} + v^3 \frac{\partial}{\partial z}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

При этом *псевдодифференциальность* уравнений (не содержащих произвольных интегродифференциальных выражений и в дальнейшем записываемых коротко: ПДУ) вытекает из того, что уравнения эволюции должны быть инвариантны относительно группы трансляций (сдвигов) в пространстве-времени. Эта группа содержится как подгруппа в группе Галилея, относительно которой уравнения должны быть инвариантными. Группа Галилея содержит также произвольные повороты системы координат, вследствие чего получается, что в выражениях нет дифференцирований в произвольном направлении, кроме конвективных производных D и оператора Лапласа Δ . При этом дифференциальные операции — взятие дивергенции (над компонентами скоростей), переводящие объекты из векторов в скаляры, выражаются через операции, примененные к плотности $D\rho$.

То, что в выражениях дифференцирования по направлению скорости присутствует также дифференцирование по времени, связано с возможностью инвариантного перехода к другой инерциальной системе отсчёта. Вообще-то такого рода заключения всегда получаются при применении к линейным (квазилинейным) операторам.

Классифицировать сильно нелинейные операторы не представляется возможным, поскольку имеются возможности типа дифференцирования (возможно, дробного) одного параметра вдоль направления градиента другого параметра и т.д. Однако надо иметь в виду, что градиент является ковектором, и дифференцирование вдоль ковектора инвариантно относительно поворотов (при этом считаем заданным евклидову метрику, сопоставляющую ковекторам векторы), но не инвариантно относительно масштабирования. Таким образом, такие операторы, будучи инвариантными относительно группы преобразований Галилея (включающей повороты), не инвариантны относительно более широкой группы, необходимой для того, чтобы быть физически оправданными.

В механике обычно рассматриваются только квазилинейные операторы. Когда имеются нелинейные члены, то они как бы входят в «линейный» по дифференцированию оператор в качестве других параметров, которые не дифференцируются. Все это аналогично тому, что среда, выведенная из равновесного состояния, локально быстро приводится в равновесное состояние, и потому в каждой точке и в каждый момент времени она рассматривается как находящаяся в равновесном состоянии, характеризующаяся массой, импульсом и энергией, отнесёнными к единице объёма.

Уравнения сохранения без учёта отсутствия равновесия между соседними слоями дают *уравнения Эйлера*. Учёт обмена импульсами и энергией между соседними областями в первом приближении относительно нарушенного равновесия (так называемое квазиравновесие) приводит к квазилинейным системам уравнений относительно этих параметров. Соответственно, и мы будем ограничиваться в дальнейшем только квазилинейными операторами.

Опыт общения с некоторыми учеными показывает, что они часто затрудняются воспринимать понятия псевдодифференциального оператора без простых аналогий. Эти аналогии лучше проводить с матрицами конечного порядка. Это еще следует делать и потому, что при численном решении задач любой оператор часто аппроксимируется матричным.

Псевдодифференциальный оператор представляет собой произвольную функцию от дифференциального оператора, и действие такого оператора на функции вычисляется так же, как действие произвольной функции от некоторой матрицы, представляющей как аналогию дифференциальный оператор. Заметим, что для полинома или произвольной функции от матрицы собственные векторы те же, что и для исходной матрицы. Соответственно, произвольные функции от матрицы представляют собой не произвольные матрицы, а только те, которые коммутируют с исходной матрицей.

При вычислении действия матрицы $f(A)$, являющейся некоторой функцией матрицы — аналога линейного дифференциального оператора A , на вектор-столбец (аналог функции) мы разлагаем этот вектор в линейную комбинацию собственных векторов:

$$\chi = \sum_{\omega} \omega \chi_{\omega}$$

(χ_{ω} — собственный вектор оператора A с собственным значением ω) и вычисляем результат:

$$f(A)\chi = \sum_{\omega} f(\omega)\chi_{\omega}.$$

Функция, применённая к собственному значению справа, представляет собой символ (или амплитуду) оператора $f(A)$. Только в случае псевдодифференциальных операторов лучше записывать так:

$$f(A)\chi = \sum_{\omega, i} f(\omega)\chi_{i\omega},$$

т.е. при вычислении действия используются преобразования Фурье. В этом есть и свои преимущества, когда символ однородного сопряжённого оператора получается комплексным сопряжением символа исходного оператора, и такая запись согласуется с принятой записью в квантовой механике.

Преобразование Фурье функции $f(x)$ можно представить как нахождение амплитуд в представлении в виде суммы волн следующего вида:

$$f(x) = \int F(k) \exp(ik, x) dk,$$

при этом функция амплитуды $F(k)$ получается из исходной функции как преобразование Фурье:

$$F(k) = (2\pi)^{-n} \int f(x) \exp(-ik, x) dx,$$

где n — размерность пространства переменных x и k .

Операторам, используемым в механике, можно также сопоставить их амплитуду $a(k)$ (называемую обычно *символом оператора* [11]), так что действие этого оператора A на функцию $f(x)$ вычисляется умножением амплитуды функции на амплитуду оператора, что соответствует свёртке функции с некоторой обобщённой функцией (точнее с *гиперфункцией Сато* [8, 12]).

Переходя к символам псевдодифференциальных операторов (ПДО) [11], получаем, что система уравнений эволюции определяется волнами (представляющими собственные векторы псевдодифференциальных операторов), распространяемыми по среде. Применяя только принципы, изложенные в [1], систему уравнений определяют уже не с точностью до параметров, а с точностью до дисперсионных соотношений волн, которые могут зависеть ещё от других параметров течения. Соответственно, экспериментальное «измерение» (определение) уравнений сводится к более трудоёмкому измерению дисперсионных соотношений и их зависимости от параметров. Большое значение имеет также порядок ПДО, определяемый как

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(k)|}{\ln |k|}.$$

Данное соотношение определяет тип оператора и грубо указывает на то, сколько нужно задать дополнительно граничных условий. В дальнейшем встретятся только операторы с отрицательным порядком, не требующие задания дополнительных граничных условий.

Перечислим теперь основные используемые в механике операторы и вычислим их амплитуды, начиная с простейших.

1. Дифференцирование вдоль траектории или конвективная производная:

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x}$$

(здесь x — трёхмерный вектор, время t одномерно).

Амплитудой этого оператора является величина

$$ik_0 + iv_1 k_1 + iv_2 k_2 + iv_3 k_3.$$

2. Сдвиг T_s функции на вектор s :

$$T_s : f(x) \rightarrow f(x - s).$$

Ему соответствует амплитуда

$$\exp(-ik, s).$$

В механике чаще встречаются сдвиги вдоль траектории, когда

$$s = \tau(1, v_1, v_2, v_3).$$

3. Усреднения по сфере радиуса R :

$$M_R(f(x)) = \frac{1}{\omega_{n-1} \mathbb{R}^{n-1}} \int_{|x-y|=R} f(y) dy.$$

Рассмотрим отдельно размерности $n = 1, 2, 3$. В случае $n = 1$ сфера, по которой проводится интегрирование, нульмерна, и усреднение сводится к величине

$$M_R = \frac{f(x + R) + f(x - R)}{2},$$

а амплитуда оператора равна амплитуде полусуммы сдвигов:

$$\frac{1}{2}(\exp(ikR) + \exp(-ikR)) = \cos(kR).$$

Вычисляя объём сферы в n -мерном пространстве [4]

$$\omega_{n-1} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},$$

получаем амплитуду оператора усреднения M_R как усреднение амплитуд сдвига $\exp(-ik, s)$ по сфере $|s| = R$:

$$P_{\vartheta}(Rk), \quad k = \sqrt{k_1^2 + \dots + k_n^2},$$

где

$$\vartheta = \frac{n-2}{2}, \quad P_{\vartheta}(s) = 2^{\vartheta} \Gamma(\vartheta + 1) s^{-\vartheta} J_{\vartheta}(s).$$

Так как для полуцелых индексов функция Бесселя выражается через элементарные функции, для нечётных значений n получается более простой вид, а именно, при $n = 2$ имеем функцию Бесселя

$$J_0(Rk),$$

а при $n = 3$ — величину

$$\frac{\sin(Rk)}{Rk}.$$

Основными операторами механики являются операторы обмена вида

$$A = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(R, t) (T_{\tau} M_R - 1) dt dR, \quad (2)$$

где T_{τ} — оператор сдвига на τ вдоль траектории с символом $\exp(-\tau D)$.

Используемые в механике операторы такого типа являются дифференциальными в том смысле, что постоянные функции они переводят в тождественный нуль, т.е. выполняется равенство

$$A[\text{const}] = 0.$$

По мнению авторов, и в термине ПДО стоило бы ограничиться только такими «дифференциальными» операторами свёртки.

За счёт того, что скорость в операторе D является переменной, такие операторы становятся нелинейными операторами. Во многих задачах механики можно использовать упрощённый оператор сдвига (например, когда в операторе D скорость равна нулю или какой-либо известной постоянной величине, что делает оператор линейным). При вычислении же интегралов для точки x скорость в операторе D считаем одинаковой и равной $v(x)$ во всех сдвинутых точках, что приводит к квазилинейности данного оператора.

На самом деле любой разумный дифференциальный оператор можно представить в виде (2), и существует взаимно однозначное соответствие между операторами типа $F(\Delta, D)$ и функциями $f(R, t)$, которые можно назвать *функциями релаксации (реологии)*. Однако здесь такая функция, в отличие от используемой в теории упругости, зависит не только от запаздывания по времени t , но и от так называемого «пространственного запаздывания».

В стационарных задачах оператор сводится к частному случаю вида (2), когда он представляется без временного запаздывания:

$$A = \int_0^{\infty} g(R) (M_R - 1) dR, \quad g(R) = \int f(R, \tau) d\tau, \quad f(R, \tau) = g(R) \delta(\tau). \quad (3)$$

В этом случае линейный оператор A выражается как некоторая функция от оператора Лапласа и представляет неньютонову вязкость. При наличии явной зависимости от «времени запаздывания» τ проявляются эффекты вязкоупругости.

Нелинейность оператора сдвига

$$T_\tau = \exp(-i\tau D)$$

вносит в этот оператор и эффекты пластичности. При этом переход от режима «упругости» к режиму «вязкого течения» может проявляться как непрерывным образом, так и скачкообразно. Последнее может случиться, когда скорость v , входящая в оператор D , переходит из «дозвукового» в «сверхзвуковой» режим относительно некоторой малой скорости ползучести.

В дальнейшем размерность пространства считаем равной 3 (т.е. $n = 3$) и усреднения проводим по двумерным сферам радиуса R . Символ оператора усреднения по сдвинутой сфере имеет вид

$$T_\tau M_R = \exp \left\{ i\tau (k_0 + v_1 k_1 + v_2 k_2 + v_3 k_3) \frac{\sin(kR)}{kR} \right\}, \quad k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}.$$

Попробуем теперь определить вид уравнений движения жидкости. Как в теории вязкой жидкости (Навье—Стокса), уравнения движения запишем в виде

$$DI = -\frac{\partial p}{\partial x} + F + AI + \frac{\partial B\rho}{\partial x}, \quad (4)$$

$$D\varepsilon = R + C\varepsilon. \quad (5)$$

Здесь $I = \rho v$ — импульс, первые два члена в правой части (4) — известные функции (градиент давления и внешняя сила), A, C — операторы обмена типа (2), B — оператор, характеризующий реакцию на сжатие, R — известная функция, включающая работу вязких сил и тепловыделение в точке.

Операторы A, B, C можно определить экспериментально, наблюдая три типа волн. Для определения оператора A необходимо наблюдать и определить спектральные свойства волны трения (или поперечных волн). Под этим мы понимаем волнообразные решения, зависящие только от двух координат — времени t и одной пространственной координаты x , когда все компоненты импульса тождественно равны нулю, за исключением одной, перпендикулярной оси x , которую обозначим через v . Учитывая, что

$$\operatorname{div} I = 0 = \operatorname{div} \frac{I}{\rho},$$

и предполагая равенство нулю внешней силы в направлении скорости v , получаем упрощённое уравнение типа (4):

$$\frac{\partial v}{\partial t} = Av, \quad D = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Это позволяет определить вид линейного оператора A по результатам измерения дисперсионных соотношений таких волн. Такая возможность имеется при условии, что оператор A не зависит от оператора D , совпадающего в данном случае с оператором $\partial/\partial t$. В случае наличия такой зависимости придётся изучить эти дисперсионные соотношения при известных меняющихся со временем внешних силах, что существенно усложняет задачу восстановления системы уравнений по результатам измерений. Без измерения с меняющимися внешними силами задача восстановления системы уравнений не выполнима.

Имеется много уравнений, приводящих к одним дисперсионным соотношениям, однако все они приведут к одному однозначному решению. Поэтому авторы придерживаются точки зрения, когда первичными считаются дисперсионные соотношения волн, а не сами уравнения. Соответственно, и сплошная среда определяется своими волнами, которые могут по ней распространяться. Особенно это касается многофазных сред, когда среда не определяется наличием или отсутствием дополнительных компонент, а определяется тем, создают ли новые компоненты новые волны в среде. Когда новые волны создаются, то среда определяется тем, какие это волны, т.е. правильнее говорить «многоволновая» среда, чем «многофазная».

Аналогично определяется оператор C по волнам «температуры». Оператор B определяется после «измерения» оператора A по продольным волнам, являющимся волнами «сжатия». В [2, 10] приведены некоторые соображения о виде оператора B . При выражении через плотность они приводят к следующему виду:

$$B\rho = \operatorname{const} \cdot \Delta^{-3/4} D^{3/2} \ln \rho.$$

Здесь мы будем интересоваться исключительно видом оператора A . По аналогии с теорией теплопроводности можно заключить, что оператор C должен иметь такой же вид, что и оператор A , только с новым параметром вместо коэффициента обмена между импульсами слоёв. Это действительно так в случае газа, когда энергия и импульс переносятся одинаковыми разрозненными молекулами.

Эксперименты по измерению волн можно проводить и численно. С этой целью авторы моделировали движение порядка миллиона ($N = 2^{20}$) молекул, взаимодействующих по заданному потенциалу типа Леннарда—Джонса. Точнее, молекулы расположены между двумя стенками, расстояние между которыми по перпендикулярному направлению (по оси x) равно s . Для уменьшения эффектов влияния границ считаем, что имеется бесконечно много молекул, но они расположены с периодом a по направлениям оси y и z . Соответственно, N — количество молекул в фундаментальной области.

При разделении распространения волны по оси x примерно на 100 этапов на один этап остается примерно 10000 молекул. Учитывая, что температурная (среднеквадратичная) скорость молекул — величина порядка скорости звука V_T , дисперсия скоростей 10000 молекул равна $V_T/100$, что примерно в 10 раз меньше усреднённой скорости среды на волне, распространяющейся по среде (при соответствующем возмущении среды).

При вычислениях возникает много трудностей: требуется знать с достаточной точностью плотность, чтобы система молекул не отделилась от стенок в ходе эволюции, требуется задать шаг по времени достаточно маленьким даже при интегрировании методом Рунге—Кутты 4-го порядка из-за больших значений градиента потенциалов взаимодействия на этапе отталкивания. Когда шаги счёта недостаточно малы, появляется искусственный тепловой поток в основном от стенки, дополнительно искажающий волновой характер эволюции осреднённых величин.

Таким способом действительно можно изучать спектральные свойства волн сжатия. Однако при изучении спектральных свойств волн трения и температурной волны возникают дополнительные трудности. Обозначим комплексную скорость через

$$c(k) = c(\omega) = \frac{\omega}{k}, \quad \omega = \omega(k), \quad k = k(\omega).$$

У этих волн отношение

$$\frac{\operatorname{Re}(c(\omega))}{\operatorname{Im}(c(\omega))}$$

порядка 1, что приводит к убыванию амплитуды примерно в $e^{2\pi} \approx 535$ раз за единицу длины волны. Соответственно, вид волны становится неволнообразным. Для волн сжатия этот параметр порядка 100 и более, что позволяет нам общаться через звуковые волны на достаточном расстоянии, и, в частности, китам в воде на расстоянии сотни километров с помощью низкочастотных волн.

Можно построить мысленный эксперимент по определению скорости волны

$$c(L), \quad L = \frac{2\pi}{k}$$

для больших длин волны L .

Все это надо рассматривать в системе молекул, имеющих характерную среднеквадратичную (температурную) скорость молекул v_T , характерное расстояние между молекулами

$$l_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

(n — количество молекул в единице объёма) и характерную длину l . Последняя величина определяется из условия достижения минимума потенциала взаимодействия между двумя молекулами

$$U(l) = U_{\min} < 0$$

(это расстояние, на котором сила взаимодействия равна нулю). При фиксированном потенциале взаимодействия и длине волны, удовлетворяющей условиям

$$L \gg l, \quad L \gg l_0$$

(т.е. она намного больше микромасштабов), получаем, что величина

$$c(L) = v_T c_0 \left(\frac{l}{l_0}, \frac{l}{L}, \frac{l_0}{L} \right) = v_T c_0 \left(\frac{l}{l_0}, 0, 0 \right)$$

не зависит от длины волны.

Для волны сжатия эта предельная скорость отлична от нуля и позволяет определить оператор B из предположения постоянства комплексной скорости для волны сжатия.

Резкое падение (до нуля) комплексной скорости волны $c(L)$ при переходе длины волны из микромасштаба в макромасштаб для волн трения и температуры делает необходимым изучение того, как она (комплексная) скорость стремится к нулю. Именно в этих масштабах сосредоточиваются обмен импульсами и теплообмен между соседними областями.

Начнём с рассмотрения вопроса, как обмениваются импульсами две молекулы, имеющие начальные скорости v_1, v_2 , на достаточном удалении, когда можно пренебречь силами взаимодействия. Переходя к системе координат, связанной с центром тяжести взаимодействующих молекул, сводим задачу к соударению молекул с импульсами \mathbf{p} и $-\mathbf{p}$, параллельных направлению оси x . Траектории молекул остаются в фиксированной плоскости xy , а сила взаимодействия параллельно направлению $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Импульс первой молекулы после взаимодействия и удаления получается по формуле

$$|\mathbf{p}|(c_1(b, |\mathbf{p}|)\mathbf{i} + c_2(b, |\mathbf{p}|)\mathbf{j}),$$

где \mathbf{i}, \mathbf{j} — единичные векторы по оси x и y ,

$$b = \frac{|(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{p}|}{|\mathbf{p}|}$$

— минимальное расстояние, на которое разлетелись бы молекулы при отсутствии силы взаимодействия.

Учитывая, что вероятность разлёта молекул в разные стороны на одно и то же расстояние одинакова, получаем, что среднее изменение импульса есть

$$-2a\mathbf{p} = a(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1).$$

Усредняя по всем скоростям соударений, можно считать, что коэффициент a зависит только от потенциала взаимодействия и представляет собой *коэффициент обмена импульсами*.

Рассматривая теперь взаимодействие первой молекулы со всеми молекулами на расстоянии R , получим, что вместо импульса второй молекулы нам достаточно поставить средний импульс всех молекул из этой сферы. При этом количество молекул растёт пропорционально квадрату R , но и количество взаимодействующих молекул (пролетающих вблизи первой молекулы) убывает пропорционально квадрату R , что приводит к такой же замене с тем же коэффициентом. Аналогично, если первую молекулу заменить системой близко находящихся молекул, то вместо импульса первой молекулы надо брать суммарный импульс этих молекул. Если допустить, что «вторые» молекулы до подлёта к первой взаимодействуют ещё и с «третьими», то это всё равно не скажется на изменении импульса первой молекулы (молекул), т.е.

$$a(\mathbf{p}_2 + a(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2) - \mathbf{p}_1) + a(\mathbf{p}_3 - a(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2) - \mathbf{p}_1) = a(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) + a(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1).$$

Молекулы в среде движутся хаотически, но их распределение подчиняется диффузионному закону: скорости распределяются по закону Максвелла, смещения (y_1, y_2, y_3) за время τ от первоначального положения распределяются по подобному закону:

$$\frac{1}{(\pi\tau\vartheta)^{3/2}} \exp \left\{ \frac{-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2}{\tau\vartheta} \right\}.$$

Это верно и для жидкостей, и для твёрдых тел. С помощью компьютерного моделирования можно убедиться, что эти законы, первоначально полученные из состояния равновесия, устанавливаются через несколько единиц времени и связаны с отношением среднего расстояния между молекулами к среднеквадратичной скорости молекул. Вышеуказанная величина ϑ представляется в виде

$$\vartheta = v_T l_0 \vartheta_0 \left(\frac{l}{l_0} \right)$$

и имеет размерность кинетической вязкости.

Соответственно, амплитуда обмена из (2) имеет вид

$$f(R, \tau) = \frac{4R^2}{(\tau\vartheta)^{3/2}\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{R^2}{\tau\vartheta}\right\}.$$

Однако при таком подходе обмен импульсами между молекулами учитывается многократно. Если учесть обмен импульсами только один раз или учесть последующие обмены с некоторым уменьшением (при каждом следующем — в s раз), то в выражении экспоненты появится дополнительное слагаемое

$$\exp\left\{-\frac{R^2}{\tau\vartheta} - b\tau\right\}.$$

Попытка учесть это более правильно, исходя из уравнений Больцмана, предпринята в [2, 10]. Однако для реальных газов уравнения Больцмана не совсем подходят.

Например, вероятность пролёта молекулы на расстоянии $1,5l$ в 4 раза больше, чем на расстоянии $0,75l$. По Больцману в первом случае молекулы разлетаются без взаимодействия, а во втором происходит некоторый обмен импульсами и энергией. В действительности при взаимодействии по некоторому потенциалу при большой скорости соударения в первом случае молекулы разойдутся приблизившись (соответственно, обменявшись импульсами), но без соударения. При меньшей же скорости молекулы могут разойтись после соударения, как и во втором случае, оттолкнувшись друг от друга. Но в предположении, что распределение молекул по скоростям всюду максвелловское, а смещение молекул происходит по вышеуказанному закону с немного изменёнными параметрами, можно более строго обосновать вышеприведённые эвристические соображения о виде оператора A :

$$a \int_0^\infty \frac{\exp(-b\tau)}{(\pi\tau\vartheta)^{3/2}} d\tau \int \exp\left\{\frac{-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2}{\tau\vartheta}\right\} (I(t - \tau, x - y - \tau v) - I(t, x)) dy, \quad (6)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, $dy = dy_1 dy_2 dy_3$. При этом символ оператора имеет вид

$$A(k, \omega) = 4\pi a \int_0^\infty \frac{\exp(-b\tau)}{(\pi k^2 \tau \vartheta)^{3/2}} d\tau \int_0^\infty \exp\left\{\frac{-r^2}{\tau \vartheta k^2}\right\} \left(\exp(-i\tau\omega) \frac{\sin r}{r} - 1\right) r^2 dr,$$

где $i\omega$ — символ оператора D .

На самом деле в последнем случае даже не требуется максвелловость распределения скоростей. При любом блуждании без преимущественного направления (все направления движения в следующий момент равновероятны) и независимости распределения длины шага от данного направления мы приходим к вероятности нахождения молекулы на расстоянии R через время τ , выражающейся формулой

$$\exp\left\{-\frac{R^2}{\tau\vartheta}\right\}.$$

Это позволяет применять закон типа (6) и для случайных движений — хаотических движений в турбулентном течении. В зависимости от параметров в выражении (6) характерное время запаздывания

$$T_0 = \frac{1}{b}$$

связано с характерным масштабом длины R_0 формулой

$$R_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\vartheta T_0}.$$

Когда отношение

$$\frac{T_0}{t_*}, \quad t_* = \frac{\|I\|}{\left\|\frac{\partial I}{\partial t}\right\|}$$

(t_* — характерное время изменения импульсов) пренебрежимо мало, то оператор в (6) будет выражаться величиной отклонения среднего по сфере от единицы. Соответственно, при малых значениях R_0/r (r — характерный размер задачи) символ оператора будет иметь приближённый вид:

$$a \left\{ \frac{\sin kR_0}{kR_0} - 1 \right\} \sim \frac{aR_0^2}{6}(-k^2) + \frac{aR_0^4}{120}k^4;$$

при этом первый член соответствует вязкости Навье—Стокса, второй — вязкости Барнета и т.д.

Однако при замене оператора разложением символа оператора для малых k или длинных волн мы увеличиваем порядок, нарушаем тип основного оператора и будем вынуждены задать дополнительные граничные условия. Тем не менее, как видно из вычислений, приведённых ниже, такое приближение (Навье—Стокса) работает для стационарных некапиллярных течений.

Более общий, чем в (6), вид реологических функций от двух аргументов, являющихся коэффициентами для обмена импульсами (энергией), получается, когда функция из (2) имеет следующий вид:

$$f(R, t) = f_1(R) \exp \left\{ -\frac{R^2}{\tau \vartheta} \right\} f_2(t).$$

Первая функция даёт поправку по пространственной координате, вторая — уточняет релаксационные характеристики среды.

Псевдодифференциальные уравнения в механике появлялись и раньше. В Новосибирской и Ленинградской школах такого рода уравнения появлялись под видом нелокальных уравнений гидромеханики без зависимости от оператора D , связанного с наследственностью [9]. На самом деле из выводов нелокальных уравнений из уравнений Больцмана [2, 10] получается, что даже в случае газа лучше пренебречь нелокальностью по пространству, чем свойством релаксации по времени. Для газа характерный размер изменения интегральных ядер получается порядка длины свободного пробега молекул, что существенно меньше характерных размеров задач.

Характерное время запаздывания $T_0 = 1/b$ при скоростях, близких к скорости звука, может быть сравнимым со временем изменения параметров потока. Для жидкостей, по мнению авторов, эта величина — порядка размеров растекаемой капли и измеряется величинами от нескольких микрон до нескольких миллиметров. При этом в случае турбулентного течения, когда размеры вихрей доходят до размеров диаметра канала, характерное расстояние R_0 доходит до размеров диаметра.

Здесь мы рассматриваем эту величину постоянной и изучаем только ламинарные течения Пуазейля. Характерное время запаздывания измеряется от долей секунды до суток. Для твёрдых тел, по мнению авторов, расстояние R_0 такого же порядка, что и для жидкостей, т.е. величина порядка размеров зёрен, в то время как время T_0 измеряется от долей месяца до десятков лет.

В Московских школах учёные концентрировались на зависимости от наследственности [6] исключительно для твёрдых тел. Была даже попытка объяснить появление «нелокальности» в тензоре напряжений [7]. Однако последняя работа не совсем верна. В ней принимаются два допущения, которые не выполняются. А из этих допущений при более точном выводе получается вывод, противоположный тому, что получил автор работы [7]. Более аккуратный анализ приводит к выводу, что основной причиной появления «нелокальности» в уравнениях механики является отсутствие локального равновесия в скоростях.

Когда мы рассматриваем среду более детально вблизи некоторой точки, то скорости не стабилизируются около одной величины (соответствующей скорости среды в данной точке), а, наоборот, разброс даже увеличивается. При этом «нелокальность» появляется одновременно как по времени, так и по пространству. Этот факт важен при исследовании на устойчивость течений.

В механике часто встречается ситуация, когда для описания сложной модели сплошной среды в уравнения вводят новые члены и новые параметры. При этом такой параметр, предполагаемый ранее постоянной величиной, хорошо описывает механический процесс (соответствует экспериментальным данным) при одном режиме и плохо — при других режимах, если не менять значения данного параметра на новое (при других режимах). При этом замена значений данного параметра,

в зависимости от режима процесса, есть не что иное, как замена предполагаемой постоянной величины на псевдодифференциальный оператор, а зависимость от режима есть зависимость символа оператора от волновых чисел (частоты, волнового вектора).

Сама невозможность введения параметра для широкого диапазона процесса есть следствие плохого спектрального приближения при описании самого процесса в рамках дифференциальных уравнений.

Для решений конкретных задач необходимо уметь ставить граничные условия и понимать, как отличаются «нелокальные» граничные условия от привычных. В математике рассматриваются псевдодифференциальные операторы с граничным условием без всякого физического смысла. Хотя необходимость (в физическом смысле) проявляется уже даже для обычных уравнений в частных производных при изучении разрывных решений.

На самом деле это касается и непрерывных решений, когда граница представляется как разрыв параметров течения. Например, типичное условие на границе

$$v_n = 0$$

имеет вполне конкретный смысл и означает непроницаемость неподвижной границы. В отличие от него, условие равенства нулю скорости на границе (единственное разумное для уравнений Навье—Стокса) для вязкой жидкости — вымышленное условие, а сама необходимость такого условия есть вынужденная мера, связанная с неоправданным увеличением (которое не является необходимым в рамках теории ПДО) порядка дифференциальных уравнений для описания вязкой среды.

Необоснованные граничные условия могут привести к неожиданным результатам. Например, в расчёте резонансных явлений в фильтрации в [3] из-за неверных граничных условий получаются резонансы в сотни раз большие, чем при правильных (равновесных) граничных условиях. При правильном подходе к граничным условиям, основанном на отражении волн, результаты почти не зависят от конкретного вида граничных условий.

В некотором смысле волновой подход к граничным условиям применяется и в [5]. Такой подход к псевдодифференциальным уравнениям и даже к обычным дифференциальным уравнениям связан с рассмотрением волны вблизи (в малой окрестности) границы или скачка, где могут резко меняться параметры. Когда уравнения дивергентны, скачки вычисляются, но, возможно, неоднозначно из-за нелинейности. В последнем случае ещё прибегают к отбору, отсеивая ненужные критерии роста энтропии и т.д.

Когда уравнения не дивергентны, то для возмещения недостающих законов сохранения прибегают к непрерывному резко меняющемуся решению для уравнений с введённой малой диссипацией. Этот путь оправдан, когда результат не зависит от произвольности введённого способа малого диссипативного члена. Однако это (т.е. независимость от произвольности) бывает крайне редко.

Псевдодифференциальные операторы вида (6) представляют свёртки по лучам, когда функция — интегральное ядро — не зависит от направления луча. Для определения оператора с граничным условием остается только определить, как продолжить интегрирование, достигнув границы. Самый простой способ — прекратить интегрирование, достигнув границы. Другой способ заключается в нахождении падающей волны, которая отразилась бы в направлении интегрирования, и прекращении самого интегрирования, если не существует такой волны (например, при подходе к границе с малым углом). Можно также продолжить интегрирование вдоль падающего луча, уменьшив амплитуду (интегральное ядро) во столько раз (k_0 раз), во сколько раз уменьшается отражённая волна.

Такой подход пригоден и для нелинейных псевдодифференциальных операторов. При этом граничные условия не являются атрибутом только сплошной среды, а определяются также свойствами (отражения) материала, из которого образована граница. Это позволяет объяснить эффекты шлифовки, когда кораблик с теми же границами имеет разное сопротивление в зависимости от того, хорошо отшлифована граница или нет.

Естественно, что граничные условия влияют на решение задачи. Как упоминалось выше, это сказывается в особенности при расчётах резонансов неустойчивостей. Однако для граничных условий ПДО имеется и качественное отличие, приводящее к новым эффектам. Из-за псевдодифференциальной связи между напряжениями и деформациями появляются эффекты ползучести, релаксации.

При пробегании волны напряжения вблизи трещин материала или вблизи соединения разных пластов земли появляются остаточные деформации.

Этот эффект возможен и за счёт нелинейности связи между тензорами. Однако в этом случае эффект проявляется как величина второго порядка малости. А в средах, где эти тензоры связаны с псевдодифференциальными соотношениями, этот эффект становится малостью первого порядка. А этого уже достаточно для объяснения эффектов роста трещин, разрушения за счёт накопленных остаточных деформаций около трещин или землетрясений, за счёт разрушений около соединений пластов из-за накопленных остаточных деформаций после действия приливов. Авторы собираются изложить это более подробно в отдельной работе.

В нашей задаче оператор A — дифференциальный, т.е. вместе с величиной

$$I(x, y, z, t)$$

решением является также величина

$$I(x, y, z, t) + I_0(t)$$

для произвольного вектора $I_0(t)$.

Кроме того, это требует дополнительного граничного условия к условию непроницаемости границы:

$$I_n|_{\Gamma} = 0,$$

являющегося граничным условием для уравнения

$$\operatorname{div} v = 0.$$

Соответственно, в нашей задаче можно вычислить величину $I(y)$ при условии равенства нулю скорости на границе (в общем случае решать с одним произвольным параметром, приравненным к нулю) и определить скорость скольжения на границе (неопределённый произвольный параметр) из условия обмена импульсами жидкости и неподвижной границы.

Отметим, что одним из возможных способов определения скорости скольжения в задаче Пуазейля является приравнивание к нулю обмена импульсами между жидкостью и границей. Это означает нулевое трение на границе или стопроцентное скольжение.

Такой подход, как и приравнивание к нулю скорости на границе, не состоятелен. Когда жидкость движется между двумя поверхностями, невозможно удовлетворение условию равенства нулю на обеих границах как для скорости, так и для трения о стенку одновременно.

Одним из способов определения скорости скольжения является условие того, что обмен импульсами между молекулами жидкости и границей пропорционален обмену импульсами между молекулами жидкости, находящимися на границе:

$$\iint g(|x - y|)(I(x, t) + I_0(t)) dx dy = k \int_{y \in \Gamma} g(|x - y|)(I(x, t) - I(y, t)) dx dy.$$

Здесь x пробегает объём жидкости, y — объём тела (или поверхности) границы.

Так как интеграл при члене $I_0(t)$ слева положителен, то он определяется корректно.

Здесь обмен импульсами между молекулами жидкости и молекулами границы пропорционален обмену импульсами между молекулами жидкости с некоторым коэффициентом пропорциональности. Это условие противоречит условию равенства нулю скорости жидкости на границе тела, тем не менее отличие от нуля скорости на границе пренебрежимо мало, когда размеры тела гораздо больше характерных масштабов изменения интегрального ядра, измеряемого микронами. Поэтому влияние этого условия сказывается только в капиллярных течениях.

В расчётах это условие используется следующим образом:

$$I_0 = - \frac{k_0 \int g(|x - y|) I(x) dx}{\int g(|x - y|) dx}, \quad k_0 = 1 - k,$$

с тем же k_0 , который использовался при продолжении интегрирования после отражения луча.

Рассмотрим теперь решение конкретных задач на основе полученных уравнений (6). Наиболее простыми являются решения типа Пуазейля, когда течение стационарное (нет зависимости от времени) и скорости всюду направлены параллельно оси x (и не зависят от данного направления). Все остальные параметры потока, в том числе градиент давления, не зависят от x . Полученные решения можно сравнить с точными решениями для уравнений Навье—Стокса для течений между двумя плоскостями и течения в цилиндрической трубе, когда параметры течения зависят только от одной координаты y .

Ввиду независимости параметров течения от времени и координаты x , при вычислении действия оператора A можно пользоваться его видом (3):

$$P_0 = \int g(z)(I(x) - I(x - z)) dz, \quad g(z) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int_0^{\infty} \tau^{-3/2} \exp \left\{ -\tau - \frac{z^2}{\tau} \right\} d\tau. \quad (7)$$

Здесь

$$P_0 = \frac{\Delta p}{\rho v_0 a \tau_0}$$

— безразмерный перепад давления за единицу длины.

Проинтегрировав дополнительно по первой координате и по второй несущественной (или по углу для движения в цилиндре), выражения в (7) приведём к форме интегрального уравнения для функций от одной переменной. В плоском случае только чуть меняется следующая функция:

$$g(z) = \int_0^{\infty} \exp \left\{ -\tau - \frac{z^2}{\tau} \right\} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi\tau}} \leq g(0) = 1.$$

В цилиндрическом случае имеем

$$\begin{aligned} g_1(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp \left\{ -\tau - \frac{z^2}{\tau} \right\} \frac{d\tau}{\tau} = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^z \frac{\exp \left\{ -\tau - \frac{z^2}{\tau} \right\}}{\tau} d\tau = \frac{2 \exp(-2z)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp(-2t|z|) dt}{\sqrt{t^2 + 2t}}, \end{aligned}$$

т.е. интегральное ядро имеет слабую сингулярность в нуле:

$$-\frac{2}{\pi} \ln z + \text{const}.$$

Учёт указанного вида отражения в граничных условиях сведётся к интегрированию по z с отражением в сечении с соответствующим множителем.

В дальнейших расчётах рассмотрены отражения с тремя коэффициентами 0.2, 0.5, 0.8. При этом допускаются многократные отражения для течений в тонких областях. Из выражения (7) после дискретизации расчёта интегралов (100 значений по радиусу или на половине сечения) получаем систему уравнений для вычисления распределения скорости по сечению. Из-за вышеуказанного свойства дифференциальности оператора вначале находим решение, обращающееся в нуль на границе, а далее, вычисляя обмен импульсами с границей для этого решения, находим поправку к скорости течения.

Однако есть и другая трактовка, при которой свойство дифференциальности оператора отсутствует. Для этого в равенство (7) сразу добавляем обмен импульсами с границей.

Когда вычисление интеграла по лучам доходит до границы, мы, как и раньше, продолжим интегрирование по жидкости с отражением с коэффициентом k_0 , но там же учтем обмен импульсом с границей (имеющей нулевой импульс) с коэффициентом $1 - k_0$. Такая трактовка физически соответствует обмену импульсом за счёт диффузионного движения молекул, которые теряют (обмениваются импульсами) часть импульса не только при соударении между собой, но и при отражении

от границы. При этом учёт обмена импульсом с границей распределяется между слоями жидкости с учётом удаления от границы, а не сосредотачивается только на ненулевой скорости скольжения жидкости у границы. В приведённых расчётах использован именно такой подход.

Возможен ещё один подход к граничным условиям. Обмен импульсами между слоями жидкости и границей можно считать с помощью другого интегрального ядра, интегрируя обмен импульсами для каждого слоя жидкости по границе, точнее, за область течения жидкости. Такой путь соответствует взаимодействию (типа капиллярного) между жидкостью и телом границы.

Соответственно, в конкретных случаях граничные условия могут быть уточнены так, чтобы решения лучше соответствовали эксперименту. В данной работе такой подход не рассматривается.

Одно свойство решения при малых диаметрах можно получить, даже не прибегая к вычислениям. Когда диаметр мал по сравнению с характерным размером, элементы матрицы системы уравнений стремятся к постоянной величине, т.е. матрица в пределе имеет ранг, равный 1. Соответственно, определитель матрицы стремится к нулю. Это приводит к плохой обусловленности численного решения для малых радиусов. При этом получается, что решение почти не зависит от удаления оси к границе, т.е. скорости имеют почти одинаковую величину для всех слоёв. Это свойство практически не зависит от интегрального ядра.

Для описания типа профиля одним числом вводим следующее число:

$$s = \frac{x_*}{r} a,$$

где x_* — координата (отсчитываемая от оси симметрии течения), при этом скорость равна среднерасходной скорости жидкости, r — радиус сечения, $a = \sqrt{3}$ в плоском случае и $a = \sqrt{2}$ в цилиндрическом случае. Эта величина определяется однозначно, когда профиль скоростей зависит монотонно от удаления от оси симметрии.

В случае произвольного непрерывного профиля можно взять первое (минимальное) значение для x_* . Например, для профиля скоростей, заданного формулой

$$u(x) = b - cx^d$$

с фиксированными параметрами b , c , d , число s зависит только от d . При этом

$$s = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[d]{d+1}}$$

в плоском случае и

$$s = \sqrt{2} \sqrt[d]{\frac{2}{d+2}}$$

в цилиндрическом случае.

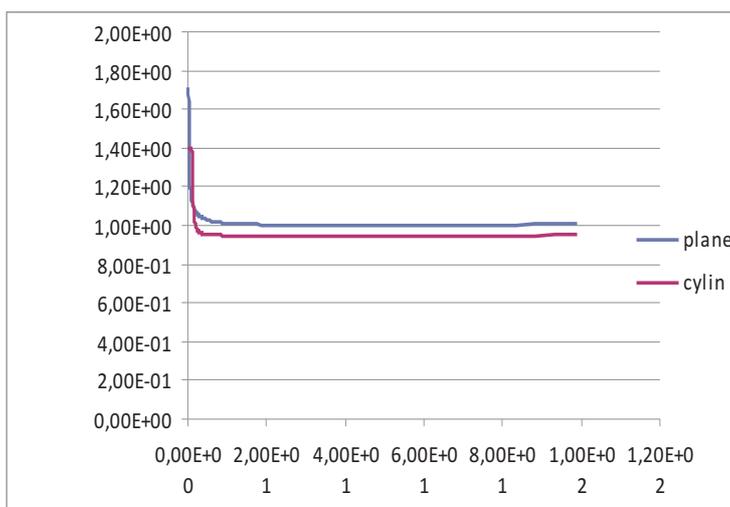
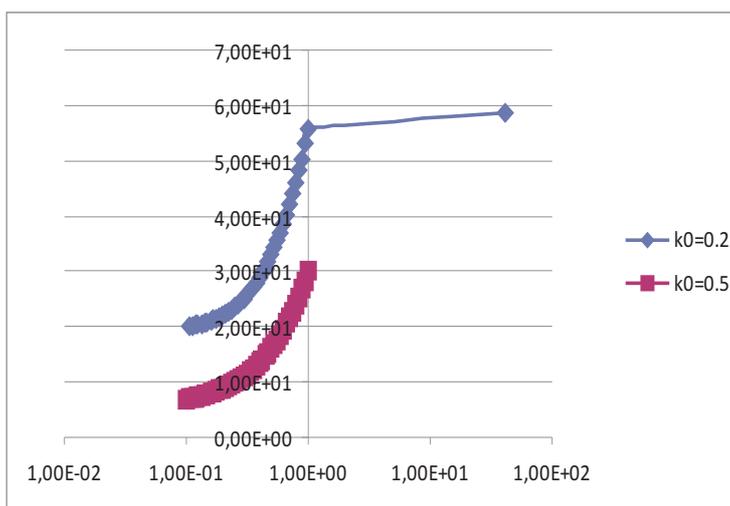
Нормировка выбрана так, чтобы для параболического профиля ($d = 2$) это число получилось равным 1. Для постоянного же профиля ($d \rightarrow \infty$) это число равно $\sqrt{3}$ в плоском случае и $\sqrt{2}$ в цилиндрическом случае.

Соответственно, рис. 1 (график зависимости числа s от радиуса) демонстрирует переход от постоянного профиля при малых r к параболическому профилю при больших r .

Как видно из рис. 1, в плоском случае эта величина стремится к 1 слева ($d > 2$) чуть лучше. В цилиндрическом случае справа ($d < 2$) — чуть хуже. На самом деле при малых значениях r среднерасходная скорость не стремится к нулю пропорционально квадрату радиуса, как в случае решений Навье—Стокса, а стремится к постоянному ненулевому значению, зависящему от геометрии и коэффициента отражения k_0 . Это демонстрирует рис. 2.

По этой причине проявляется качественная особенность течения жидкости в тонких капиллярных трубах (когда вязкость жидкости как будто падает многократно).

Последний эффект экспериментально обнаружен в радиоэлектронике при изучении возможности водяного охлаждения электронных плат с течением по микроканалам и пока не нашёл удовлетворительного объяснения. Замечено, что сопротивление падает в сотни и тысячи раз по сравнению с пуазейлевским, рассчитанным по Навье—Стоксу. Например, для указанных в графике случаев (плоский случай) при уменьшении радиуса от 100 до 0.1 скорость уменьшается не в миллион раз, а всего примерно в 500 и 1500 раз. При больших значениях r средняя скорость выходит в режим

Рис. 1. Зависимость величины s от радиуса.Рис. 2. Зависимость среднерасходной скорости от r при $r < 1$.

роста, пропорциональна квадрату радиуса и практически не зависит от коэффициента отражения. Например, сравнивая значения среднерасходной скорости для значений радиусов $r = 70,1$ и $r = 99$ (отличающихся примерно в $\sqrt{2}$ раза), получаем следующие значения: 5830 и 9050 при $k_0 = 0,2$ в плоском случае, и 5820 и 9060 при $k_0 = 0,5$.

Соответствующие значения для цилиндрического случая: 4900, 7010 ($k_0 = 0,2$) и 4920, 7040 ($k_0 = 0,5$). Это означает, что даже для достаточно больших радиусов нет точного выхода к квадратичной зависимости среднерасходной скорости от радиуса.

В то же время зависимость скорости от коэффициента отражения при таких больших r пропадает, поэтому аналог рис. 2 при больших r нельзя продемонстрировать.

На рис. 3 приведён график зависимости этой скорости от r для цилиндрического и плоского случаев.

Отличие течения от режима Навье—Стокса начинается с $r < 100$. Экспериментально обнаружено, что для течения воды отличие начинает проявляться с $r = 100$ мк. Соответственно, характерная величина, относительно которой безразмерны радиусы, есть величина порядка одного микрона.

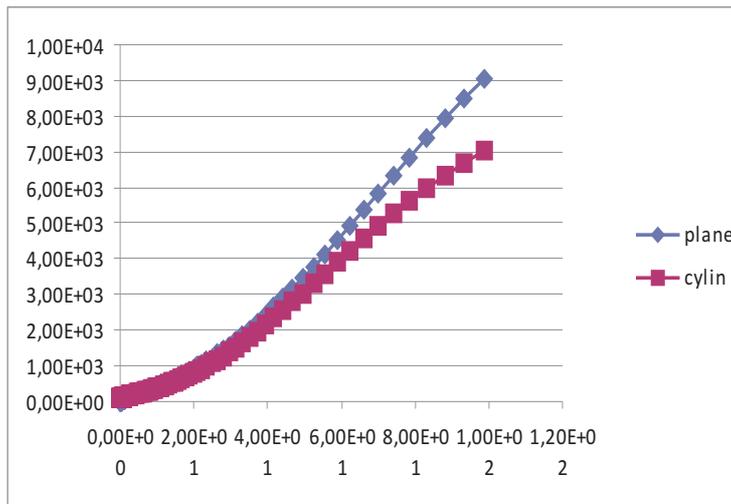
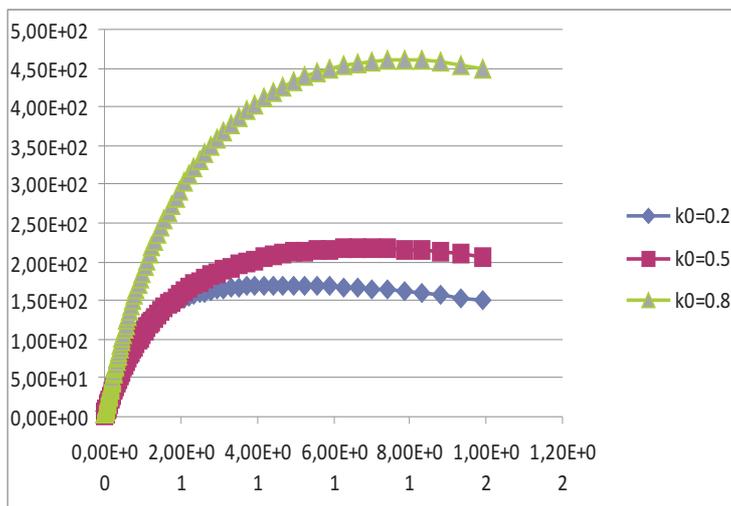
Рис. 3. Среднерасходная скорость в зависимости от r .

Рис. 4. Скорость жидкости на границе.

В стационарных течениях не проявляются эффекты запаздывания, релаксации и «памяти», которые могут быть существенными для нестационарных течений, в особенности при исследовании на устойчивость. Для жидкостей типа нефти этот характерный размер, по-видимому, существенно выше, чем для воды.

Соответственно, течение в порах пластов может существенно отличаться от течения Навье—Стокса.

На рис. 4 приведена зависимость скорости на границе при различных значениях коэффициента отражения (плоский случай).

Хотя максимальное значение скорости на границе достигается при радиусах порядка 50, отношение этой скорости к среднерасходной быстро стремится к нулю. Это показано на рис. 5.

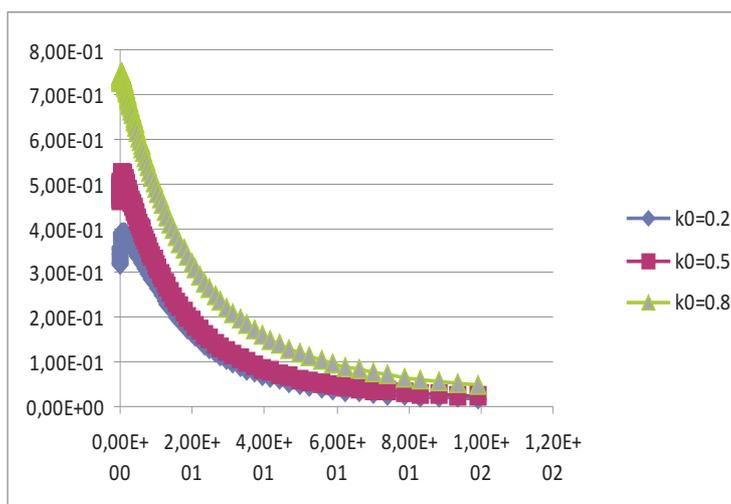


Рис. 5. Отношение скорости на границе к среднерасходной скорости жидкости.

Авторы благодарят О. Р. Ганиева за полезное обсуждение результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 08–01–00231-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Феноменологический подход к определению межфазных сил// Докл. РАН. — 2007. — 412, № 1. — С. 44–47.
2. Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Общий спектральный подход к динамике сплошной среды// Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — 23. — С. 52–70.
3. Ганиев Р. Ф., Украинский Л. Е., Ганиев О. Р. Резонансные фильтрационные потоки в пористой среде, насыщенной жидкостью// Докл. РАН. — 2007. — 412, № 1.
4. Йон Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. — М.: ИЛ, 1958.
5. Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Нелинейные волны в упругих средах. — М.: Изд-во «Московский Лицей», 1998.
6. Локшин А. А., Суворова Ю. В. Математическая теория распространения волн в средах с памятью. — М.: Изд-во МГУ, 1982.
7. Осипцов А. Н. К учету конечности объема и гидродинамического взаимодействия частиц в газозвездах// Докл. АН СССР. — 1984. — 275, № 5. — С. 1073–1076.
8. Пенроуз Роджер. Путь к реальности или законы, управляющие Вселенной. — Москва-Ижевск: Рег. и хаот. динам., 2007.
9. Рудяк В. Я. Статистическая теория диссипативных процессов в газах и жидкостях. Новосибирск: Изд-во «Наука» СО АН СССР, 1987.
10. Шамолин М. В. Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. Изд. 2-е, переработанное и дополненное. — М.: Изд-во «Экзамен», 2007. — С. 240–281.
11. Шубин М. А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. — М.: Наука, 1979.

12. *Sato M.* Theory of hyperfunctions. I, II// J. Fac. Shi. Univ. Tokyo. Sect. I. — 1959. — С. 139–193; 1960. — С. 387–437.

Р. Р. Айдагулов

Московский Государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Институт механики, Москва, Россия

М. В. Шамолин

Московский Государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Институт механики, Москва, Россия

E-mail: shamolin@imec.msu.ru