Современная математика и ее приложения. Том 65 (2009). С. 11–30

УДК 517.9+531.01

ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ТЕОРИИ МНОГОФАЗНЫХ МНОГОСКОРОСТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

© 2009 г. **Р. Р. АЙДАГУЛОВ, М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. В статье показано, что для механических систем, у которых базовое пространство имеет большую размерность, чем время (есть еще и пространственные координаты), система уравнений, определяющих эволюцию системы, должна быть гиперболической системой псевдодифференциальных уравнений.

СОДЕРЖАНИЕ

Ранее было показано [1, 15], что эволюция системы определяется представлением группы сдвигов по времени в пространстве преобразований некоторого расслоения. В данной работе показано, что для механических систем, у которых базовое пространство имеет большую размерность, чем время (есть еще и пространственные координаты), система уравнений, определяющих эволюцию системы, должна быть гиперболической системой псевдодифференциальных уравнений. Другими словами, аналогом системы обыкновенных дифференциальных уравнений теоретической механики (механики с конечным числом степеней свободы) является *система гиперболических псевдодифференциальных уравнений*.

В однофазных средах без диссипации уравнения являются квазилинейной системой дифференциальных уравнений (вследствие чистых законов сохранения). Однако и здесь не факт, что замыкающие соотношения не должны иметь псевдодифференциальную часть. По мнению авторов, уравнения состояния для сверхзвуковых (тем более гиперзвуковых) течений газа обязательно должны содержать псевдодифференциальную часть, учитывающую отсутствие «квазистационарности». Наличие вязкости среды также более адекватно описывается не уравнениями Навье—Стокса, а псевдодифференциальными операторами, выражающими тензор напряжений через другие параметры: скорости, плотности.

Для многофазных сред не достаточно законов сохранения, и на примерах показано, что нельзя пренебречь псевдодифференциальной частью.

Обсуждаются некоторые требования для систем псевдодифференциальных уравнений, описывающих многофазные среды. В отличие от предыдущих работ, здесь не строится модель на базе феноменологических постулатов, а предлагается «измерить» систему эволюционных уравнений, ставя эксперименты по распространению волн.

1. Основы механики многофазных сред

Целью этого параграфа является показ невозможности замыкания систем уравнений механики многофазных сред методами механики сплошных сред, основанных на законах сохранения без диссипации.

ISSN 1512–1712 © Ин-т кибернетики АН Грузии, 2009

Пусть P' — область изменения независимых переменных изучаемой задачи, в дальнейшем просто область для некоторой модели пространства–времени, вообще она может представлять собой базовое пространство некоторого расслоения. Пусть это пространство занято разными материалами (фазами) с номерами $i = 1, \dots, l$.

Предположим, что такие $\chi_i(x')$, $x' \in P'$, — *характеристические функции* фаз, т.е. функции, которые равны 1 или 0 в точке $x' \in P'$ в зависимости от того, занята эта точка i-ой фазой или нет. Естественно предполагается, что эти функции интегрируемы по некоторой заданной мере (Лебега) на P' и выполняются соотношения

$$\sum_i \chi_i(x') \equiv 1, \quad \chi_i(x')\chi_j(x') \equiv 0, \quad i \neq j,$$

означающие, что каждая точка P' занята одной и только одной фазой. Сами функции $\chi_i(x')$ дают полную картину размещения фаз и слишком сложны для практического изучения и для вычислений. Поэтому вводят укрупненные (усредненные) координаты $x \in P$, область изменения этих координат при этом можно считать совпадающей с P' (мы исключаем случаи довольно сложной начальной области P' с изъянами микромасштаба).

Пусть $\mu(x)$ — усредняющая мера, т.е. неотрицательная мера с компактным носителем, интеграл от которой равен 1. Обычно в качестве $\mu(x)$ принимают меру, сосредоточенную равномерно на некотором интервале времени или в шаре пространства (без времени). Эта мера определяет *линейный оператор усреднения*, сопоставляя интегрируемой функции $y'(x')$ функцию $y(x)$ по формуле

$$y(x) = \int y'(x')\mu(x - x').$$

Полученный оператор усреднения, называемый в математике *усреднением по Фридрихсу*, обладает следующими свойствами:

1) Этот оператор *сглаживает*. Например, в обычно принимаемом случае усреднения по времени или пространству усреднение интегрируемой функции будет непрерывной (по времени или пространственным переменным соответственно) функцией, а усреднение дифференцируемой функции даст дифференцируемую функцию по соответствующем переменным.

Ещё удобнее работать с бесконечно дифференцируемой неотрицательной функцией $f(x)$, интеграл от которой равен 1, и принять в качестве усредняющей меру

$$\mu(x) = f(x)dx,$$

при этом усреднённые величины станут бесконечно дифференцируемыми.

Совершая это усреднение в пространстве–времени, обычно бывает необходимо сделать безразмерными переменные, поделив стороны на их характерные размеры (возможно, разные по разным сторонам), в частности, время — на характерное время, равное отношению характерного размера к характерной скорости (например, к равновесной скорости звука).

При этом все усредненные функции также будут бесконечно дифференцируемыми.

2) Оператор усреднения *коммутирует* с оператором дифференцирования, т.е. для дифференцируемых функций выполнено равенство

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x'} y'(x') \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x} \langle y'(x') \rangle.$$

При этом в случае усреднения через бесконечно дифференцируемую функцию не требуется заботиться о том, чтобы пространственные средние совпадали со средними по границе (сфере), как в [10].

Иногда в качестве усредняющей меры бывает удобно брать *меру Гаусса*

$$\frac{1}{r_0^n} \exp\left(-\frac{\pi x^2}{2r_0^2}\right) dx,$$

носитель которой не компактен. Однако при этом, несмотря на аналитичность усредняющней функции, усредненная функция, вообще говоря, не будет аналитичной.

3) Оператор усреднения *линеен*, т.е. для любых постоянных a, b выполняется соотношение

$$\langle a y_1'(x') + b y_2'(x')\rangle = a\langle y_1'(x')\rangle + b\langle y_2'(x')\rangle.$$

4) Оператор усреднения *монотонен*, т.е. из неравенства $y'(x') \geqslant 0$ следует $y(x) \geqslant 0$.

5) Оператор усреднения *мало меняет носитель* (замыкание области, где функция отлична от нуля) функции, т.е. если V — носитель усредненной функции, то он в некотором смысле мало отличается от носителя V' первоначальной функции.

Отметим, что это свойство требует некоторой конкретизации. Если область V' сложная, например, любая область, содержащая густо расположенную решётку (при этом расстояние между соседними точками решётки не превосходит размеров носителя усредняющей меры), имеющая как угодно малый объём, то она даст после усреднения в качестве носителя все пространство. Поэтому здесь речь идет об областях, у которых отношение меры границы к мере сферы, ограничивающей шар с данным объёмом области V', не велико.

6) Оператор усреднения *не меняет интегралы по носителям*, т.е. справедливо равенство

$$\int\limits_V y\, dV = \int\limits_{V'} y'\, dV'.$$

7) Оператор усреднения *является почти проектирующим* (*проектирующими* называют линейные операторы, совпадающие со своим квадратом). Это означает, что если мы усредним уже усредненную функцию, то получим величину, практически не отличающуюся от первой:

$$\langle\langle y'(x')\rangle\rangle \approx \langle y'(x')\rangle.$$

Отметим, что если определить оператор усреднения как абстрактный оператор, удовлетворяющий перечисленным свойствам 3)–6), то получим, что он должен иметь вышеуказанный свёрточный вид.

Заметим ещё, что оператор усреднения не является *кольцевым гомоморфизмом* (т.е. усреднение произведения не соответствует произведению усредненных функций), что заставляет по-особому определить усреднение некоторых функций. Например, в качестве усредненной скорости принимается не усреднение от скорости, а отношение усредненного импульса к усредненной плотности, чтобы не нарушать законы сохранения масс и импульсов.

Имея оператор усреднения, получаем объёмные концентрации, определяемые как

$$\alpha_i(x) = \langle \chi_i(x')\rangle.$$

Из свойств усреднения получаем, что

$$\sum_i \alpha_i(x) = 1, \quad \alpha_i \geqslant 0. \tag{1}$$

Суть усреднения заключается ещё в том, чтобы производные от объёмных концентраций, делённые на характерный размер переменной, по которой считается производная (*презентативность ансамбля усреднения*) были порядка 1 или меньше, а размеры носителя или величины r_0 были пренебрежимо малыми по отношению к характерному размеру.

Учитывая, что поправки известных функций взаимодействия имеют порядок $\alpha_i^{1/3}$ (см. [10]), определим меру пространственной неоднородности (*гетерогенности*) как

$$g_V = \sum_i \alpha_i^{1/3}(1 - \alpha_i^{2/3}) \geqslant 0. \tag{2}$$

Отметим, что последнее выражение обращается в 0 только в случае, когда для одной из фаз объёмная концентрация равна 1, а все остальные равны 0.

Из непрерывности следует, что компонента, равная 0 или 1, останется такой во всех точках компоненты связности рассматриваемой области P, т.е. в этом случае среда *гомогенная*. В противном случае пространственная неоднородность g_V положительна и принимает максимальное значение, равное

$$l^{2/3} - 1,$$

когда каждая фаза занимает одинаковый объём.

Пространственная неоднородность пренебрежимо мала, если

$$g_V \ll 1. \tag{3}$$

Заметим, однако, что если все остальные характеристики фаз близки (почти не зависят от номера фаз), то эту смесь можно считать гомогенной, несмотря на существенность пространственной неоднородности. В этом случае разделение на фазы является исскуственным, и невыполнение соотношения (3) не является отрицанием гомогенности. Поэтому наряду с этой характеристикой неоднородности необходимо рассмотреть другие характеристики неоднородности, являющиеся неоднородностями среднеобъёмных или среднемассовых величин.

Среднеобъёмные величины для фаз определяются через следующие соотношения:

$$\langle y'(x')\rangle_{iV} = \langle y'(x')\chi_i(x')\rangle$$

и

$$\langle 1\rangle_{iV} = \alpha_i,$$

среднемассовые величины — как соотношения

$$\langle y'(x')\rangle_{im} = \langle y'(x')\chi_i(x')\rho'(x')\rangle$$

и

$$\langle 1\rangle_{im} = \rho_i = \langle \rho'\rangle_{iV},$$

а для всей смеси — как среднее этих величин с учетом весов фаз:

$$\langle y'(x')\rangle_V = \sum_i \langle y'(x')\chi_i(x')\rangle, \qquad \langle y'(x')\rangle_m = \frac{\sum\limits_i \langle y'(x')\rangle_{im}}{\sum\limits_i \rho_i}.$$

Гетерогенность микропараметра z определим по следующей формуле:

$$g_{zs} = 1 - \frac{\left(\sum\limits_i \langle z\rangle_{is}\right)^2}{\sum\limits_i \langle 1\rangle_{is} \sum\limits_i \left[\dfrac{\langle z\rangle_{is}^2}{\langle 1\rangle_{is}}\right]}, \quad s = V, m. \tag{4}$$

Легко показать, что гетерогенность любого параметра всегда неотрицательна и находится в интервале от 0 до 1, а именно,

$$0 \leqslant g_{is} \leqslant 1.$$

Она равна нулю тогда и только тогда, когда эта функция (параметр) постоянна (не зависит от номера фазы) или сосредоточена только в тех фазах, где она постоянна (не зависит от номера фазы). Отметим, что величина g_V отличается от других гетерогенностей.

Во-первых, это гетерогенность не объёмная, а является функцией величин $\alpha_i^{1/3}$, а, во-вторых, лучше было определить гетерогенность этих величин по следующим формулам:

$$g_{\alpha^{1/3}} = 1 - \frac{1}{\sum\limits_i \alpha_i^{1/3}} = \frac{g_V}{\sum\limits_i \alpha_i^{1/3}}.$$

Здесь мы этого не делаем из-за того, что данные величины существенно не отличаются, т.е. когда по одной из них имеется гомогенность, то это относится и к гомогенности по другой величине (здесь, конечно, исключаем случай, когда число фаз велико).

Методами механики сплошных сред для усредненных параметров получаются два уравнения сохранения, а именно, уравнения сохранения общей массы и общего импульса. Если нет межфазных переходов (взаимопревращений), то уравнения сохранения массы можно записать для каждой фазы.

Если посмотреть на эти законы сохранения повнимательнее и провести аналогию с классической механикой, то можно понять, что законы сохранения массы суть не что иное, как переобозначение производной от импульса (если быть более точным, с некоторым множителем массы), т.е. являются следствиями определений самой массы и среднемассовой скорости.

Закон сохранения общего импульса, по сути, также сводится к определению суммарных внешних (поверхностных и объёмных) сил. Других законов сохранения в данном случае не существует.

Более того, авторы считают, что методы механики сплошных сред в данном классе задач больше ничего не могут дать. Поэтому система уравнений относительно усредненных параметров в многофазной среде не может быть замкнутой.

Получение каждого нового уравнения методами механики сплошных сред (см., например, [10, 11]) сопровождается введением как минимум одного нового неизвестного. К примеру, общие законы сохранения кинетического момента и энергии при известных межфазных силах фактически являются уравнениями для определения внутреннего кинетического момента и «внутренней» энергии (новых неизвестных функций), зависящих от распределения микропараметров в кинетическом пространстве, а следовательно, ранее неизвестными функциями.

Продемонстрируем это на трёх типичных примерах гетерогенной среды. На первый взгляд кажется, что для гетерогенной среды с гомогенной объёмной неоднородностью $g_V \ll 1$ (например, ячеечной схемой [10] из-за малости объёмов включений) можно вычислить силы межфазного взаимодействия и получить замкнутую систему уравнений. Однако это не так. Типичной гетерогенной средой (со свойством $g_V \ll 1$) является *газовзвесь* с твердыми или жидкими включениями. При этом за счет большой истинной плотности включений достигается гетерогенность смеси: величины $g_{\nu m}$ (неоднородность среднемассовых скоростей) не малы.

Для простоты рассмотрим одномерный случай (когда параметры зависят только от одной пространственной координаты, однако при этом учитывается трёхмерность пространства) и покажем неустойчивость ячеечной схемы.

Имеется периодическое решение с периодом L (длина решётки). Сила, действующая на одну частицу, имеет порядок

$$f_0 = 6\pi\mu a K(\mathrm{Re})(v_1 - v_2),$$

где a — радиус частиц, μ — вязкость газа, v_1 и v_2 — скорости газа и включений соответственно, Re — число Рейнолдьса для относительного движения частиц.

Тогда при возмущении координаты одной частицы на x, возмущение силы, действующей на эту частицу, имеет порядок

$$f_0 \frac{\left(\dfrac{1}{L-x} - \dfrac{1}{L}\right)}{\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{2}{L}\right)} > \frac{f_0 x}{L\left(\dfrac{L}{a} - 2\right)}$$

(неравенство рассматривается при $x > 0$).

Следовательно, через время, оцениваемое сверху (такого же порядка) соотношением

$$t_{ud1} \approx \sqrt{\frac{mL\left(\dfrac{L}{a} - 2\right)}{f_0}} \ln\left(\frac{(L-2a)}{x_0}\right),$$

частица догонит переднюю и столкнется с ней. При этом скорость соударения имеет порядок

$$v_{ud} \approx \sqrt{\frac{f_0}{mL\left(\dfrac{L}{a} - 2\right)}}(L - 2a).$$

Соответственно, следующие соударения происходят через время порядка

$$\frac{(L-2a)}{v_{ud}}.$$

В наиболее интересной (с точки зрения теоретического осмысления) ситуации, когда массовая концентрация порядка 1, скорости порядка звуковых, размеры частиц порядка 10–100 микрон, отношение этой скорости к относительной скорости $v_1 - v_2$ оказывается порядка 1. Поэтому процессы установления распределения скоростей в кинетическом пространстве (вместе с вращениями частиц) и установления давления частиц, имеющего порядок кинетической энергии относительно среднемассовой скорости смеси, и динамическая релаксация происходят в одном масштабе времени.

Следовательно, возможен только кинетический подход к частицам с учетом их вращения, при котором размерность базового пространства увеличится на 6 (даже при движении в пространстве меньшей размерности).

Однако это не значит, что не существует псевдодифференциальной системы уравнений между осредненными значениями параметров как в следующем примере, где для двух усредненных параметров y_1 и y_2 от бесконечной системы переменных $x_i(t)$, связанных между собой конечной системой дифференциальных уравнений, при определенных условиях сходимости выполнены равенства

$$y_j = \sum_i a_{ij} x_j,$$

имеется псевдодифференциальная связь.

Типичной средой, однородной по импульсам ($g_{\nu m} \ll 1$), является *парожидкостная среда*. При этом величины $g_{\nu V}$ и g_V не малы. Однако, как сказано выше, гетерогенность только по объёмным концентрациям не играет существенной роли, а гетерогенность по скоростям играет роль, в основном, гетерогенности по импульсам. Поэтому свойства этой смеси больше похожи на свойства однородной среды с измененными параметрами.

Из-за немалости величин $g_{\nu V}$ и g_V расчёты сил взаимодействия не могут быть получены из ячеечной схемы. При известных силах система уравнений оказывается *негиперболичной*. Нарушение гиперболичности по времени на физическом уровне эквивалентно нарушению принципа причинно-следственности, запрещённому в физике.

Исправить положение, оставаясь в обычном пространстве–времени, можно только, вводя новые дифференциальные (зависящие от производных некоторых переменных) силы. В силу вышесказанного, возможно, что смесь описывается системой уравнений без расширения базового пространства, т.е. системой *квазилинейных дифференциальных уравнений*, у которых в качестве независимых переменных используются координаты из области пространства–времени.

Из достаточно общих принципов в случае несжимаемости фаз (возможно, это не играет существенной роли, однако дает замыкание системы уравнений без уравнений сохранения энергии) получено, что искомая система уравнений не имеет *дивергентного вида*. Следовательно, для него не справедливы обычно используемые расчётные схемы по *методам крупных частиц или методу Годунова*, основанные на дивергентности системы уравнений. При этом, вообще говоря, не исключается, что система уравнений может быть получена *вариационными методами*.

Однако, в силу вышесказанного, вариации должны быть в расширенном пространстве (размерность пространства при этом умножается на количество фаз). Однако в цитированных выше работах *недивергентность* системы уравнений получена в рамках сильной локальности (см. выше принцип 7)). Да и сама недивергентность вовсе не означает, что замкнутая система уравнений, описывающая парожидкостные среды, обязательно должна быть псевдодифференциальной.

В пользу этого, по-видимому, служит наблюдаемый факт: когда вода кипит в кастрюле, пар преимущественно поднимается по краям. Конечно, из-за большой теплопроводности кастрюли часть тепла отдается парожидкостной среде не только снизу (от горящего газа), но и по бокам. Однако вряд ли этого достаточно для того, чтобы объяснить, почему основная часть пузырьков поднимается по бокам, оставаясь в рамках *лишь дифференциальных уравнений*. Этот эффект напоминает *конвекцию Релея—Бенара*.

Отличительное свойство последнего примера заключается, по существу, в причине *двухфазности* поднимающегося потока. При этом относительная скорость пузырьков в несколько раз меньше

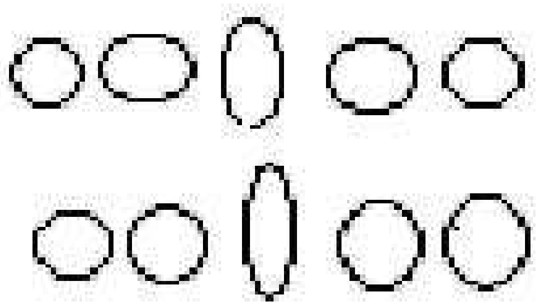

Рис. 1. Зерна в порах.

их абсолютной скорости. По-видимому, этот эффект легче объяснить в рамках *псевдодифференциальных сил*, которые некоторым образом учитывают локальную неоднородность среды. Соответственно, пар вместе с жидкостью поднимается по бокам, а жидкость опускается по центру.

Отметим, что *сила Бассе* также является псевдодифференциальной. Однако, когда объёмная концентрация пузырьков не мала, эта сила должна иметь другой псевдодифференциальный вид, и, по-видимому, она также не мала.

В общем случае на эволюцию усредненных (медленно осциллирующих) параметров сильно влияет микрораспределение значений параметров. Соответственно, как правило, для адекватного описания в данном случае приходится увеличивать размерность базового пространства.

Существенного увеличения этой размерности позволяют избежать два фактора. Первый — наличие горизонтальных процессов, когда скорости изменения некоторых микропараметров пренебрежимо малы. Тогда эти параметры будут считаться локально постоянными, т.е. в каждой точке с глобальной координатой x можно пренебречь изменением этих микропараметров. Например, в некоторых задачах фильтрации можно пренебречь изменением структуры скелета.

Второй, упрощающий, фактор — наличие вертикальных процессов, когда некоторые процессы идут настолько быстро, что всегда можно положить, что установилось некоторое равновесное распределение этих параметров. Поэтому и в данном случае пренебрегаем отличием распределения этого микропараметра от равновесного и получаем интегральные соотношения для макропараметров типа уравнения состояния.

Примером более сложной гетерогенной среды, чем вышеприведённые, является грунт, насыщенный жидкими и газообразными фазами. В этом случае имеется гетерогенность по всем параметрам. Более того, это выполнено даже тогда, когда имеется скелет с газом, в то время как в вышеуказанной парожидкостной среде имеется гомогенность по импульсам. И вот тогда бывает невозможно пренебрегать деформацией (в первую очередь микродеформацией) скелета в результате падения давления в порах.

Как видно из рис. 1, проводимость пор может существенно измениться только за счет поворота двух зерен в направлениях, противоположных друг другу. А это невозможно объяснить методами механики сплошных сред, так как при этих поворотах не меняются не только макродеформации, но даже и макропараметр, учитывающий микроповороты (как в [11]).

Можно показать, что в такой среде не существует связи между такими макропараметрами, как напряжения и деформации, даже после отказа от рассмотрения только симметричных тензоров и сред со сложными реологиями типа

$$\sigma_{ij} = f\left(\frac{d}{dt}\right)\varepsilon_{ij}. \tag{5}$$

Такие реологии *обобщают* предложенную в [11] связь с рациональной функцией t на произвольную псевдодифференциальную связь.

Обычные модели фильтрации [10], исходящие из системы дифференциальных уравнений, далеки от объяснения явлений резонансов и распространения волн в таких средах, и их нельзя подправить небольшой «деформацией» модели этой среды. Однако эта среда может быть описана в рамках системы псевдодифференциальных сил.

2. Псевдодифференциальные операторы

Рассмотрим далее гладкие функции на $\mathbb{R}^k$. Удобнее рассматривать такие функции со значениями в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Обозначим через ξ_j оператор

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j},$$

где i — мнимая единица, x_j — одна из координат в $\mathbb{R}^k$.

Рассмотрим все линейные операторы, коммутирующие с операторами дифференцирования. Так как для данного оператора $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$ функция $\exp(ix_j\xi_j)$ является собственным вектором с собственным значением ξ_j, эта функция должна быть собственным вектором и для любого другого оператора, коммутирующего с оператором дифференцирования.

Таким же образом получаем, что действие этого оператора на функцию

$$\exp\left(i\sum_j x_j\xi_j\right)$$

сводится к умножению на функцию

$$a(\xi) = a(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k),$$

которая называется *амплитудой оператора*.

Обобщением дифференциального оператора с непостоянными коэффициентами служит оператор, у которого амплитуда зависит также от переменных x_j, а обобщением квазилинейного оператора — оператор, у которого амплитуда зависит и от значений самой функции y, т.е действие оператора $\mathbf{A}$ с амплитудой $a(x, y, \xi)$ на функцию $y(x)$ сводится к обратному преобразованию Фурье от преобразования Фурье, умноженного на амплитуду:

$$\begin{gathered}\mathbf{A}y = (2\pi)^{-k}\int a(x, y(x), \xi)\exp\left(i\sum_j x_j\xi_j\right)\bar{y}(\xi)d\xi,\\ \bar{y}(\xi) = \int \exp\left(-i\sum_j x_j\xi_j\right)dx.\end{gathered}\tag{6}$$

Здесь при вычислении функции $\mathbf{A}y$ в точке x в качестве аргумента амплитуды оператора принимается значение самой функции в этой точке. Такие операторы называются *псевдодифференциальными операторами* (ПДО).

Отметим, что авторам не известно изучение *нелинейных* ПДО в математике. Некоторые обобщения линейных неоднородных ПДО (когда амплитуда величины y зависит от x) см. в [4]. У таких операторов их фаза («аргумент от экспоненты») имеет более общий вид, который в данной работе не понадобится.

Здесь мы не придерживаемся математической строгости и *явно* не обозначаем пространство функций, на котором действуют псевдодифференциальные операторы.

Отметим, что их строгое изложение на языке обобщенных функций для операторов конечного порядка естественным образом приводит к *пространствам Соболева*. Более адекватной математической структурой для ПДО является их представление в виде операторов свёртки с *гиперфункциями Сато*. Представление о последних можно найти в [13, 16, 17].

Порядком оператора по переменной x_j называется минимальное значение степени ξ_j, на которое делится амплитуда, а именно, следующее число:

$$m_j = \inf\left(\alpha : \exists C\ \forall \xi_j : \frac{|a(\xi)|}{|\xi_j^\alpha|} < C, |\xi_j| > 1\right). \tag{7}$$

Для псевдодифференциальных операторов степень оператора не обязательно является целым числом и может принимать значения $\pm\infty$. *Порядком оператора* называется следующее максимальное значение:

$$m = \max_j m_j.$$

Приведём некоторые примеры псевдодифференциальных операторов. Механикам известен *псевдодифференциальный оператор Гильберта*, появляющийся в задачах дозвукового обтекания дужек (*формула Седова*):

$$\mathbf{A}y(x) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\int \frac{y(\tau)}{x-\tau}\,d\tau = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|x-\tau|>\varepsilon}\frac{y(\tau)}{x-\tau}\,d\tau. \tag{8}$$

Этот оператор является оператором нулевого порядка с амплитудой $-i\operatorname{sign}\xi$. Так как квадрат этого оператора равен минус единице (т.е. тождественному оператору, взятому со знаком «$-$»), то он является одним из действительных операторов, играющих роль мнимой единицы в кольце операторов.

Мы уже упоминали о силе Бассе, являющейся, по сути, половинным дифференцированием разницы скоростей фаз по направлению скорости частиц с точностью до постоянного множителя. Обобщением этого оператора служат операторы дифференцирования порядка α. Мы здесь приведём интегральное представление только в следующем случае $0 \prec \alpha \prec 1$:

$$\mathbf{A}y = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\frac{dy}{d\tau}}{(t-\tau)^\alpha}\,d\tau. \tag{9}$$

Отметим, что действие ПДО сводится к свёртке с некоторой обобщённой функцией.

Так как дифференцированию не соответствует интегральное представление через обычную функцию, мы представили дифференцирование порядка α как дифференцирование первого порядка и интегрирование порядка $1-\alpha$.

Вообще, изложение теории ПДО без теории обобщенных функций или гиперфункций Сато невозможно. Здесь авторам остается только посоветовать читателю просмотреть [9] или лучший, по мнению авторов, шеститомник по этой проблеме, где основные необходимые сведения изложены в первом томе [3], а также в [8].

Отметим, что обратный оператор для линейного (даже для неоднородного) ПДО является также линейным ПДО, при этом порядок оператора по каждой переменной изменит знак.

Для ПДО конечного порядка m естественным образом определяются *операторы эллиптического типа*. Это — те операторы, для которых выполняется следующее условие:

$$\exists C > 0 : \forall \xi = (\xi_1, \ldots, \xi k) \in \mathbb{R}^k \Rightarrow |a(\xi)| > C|\xi|^m. \tag{10}$$

Понятие эллиптичности можно определить и для системы псевдодифференциальных уравнений. Из-за ненадобности для данной работы эти определения мы опускаем. Нам пока важно лишь понятие *гиперболичности системы псевдодфференциальных уравнений по одной переменной* (например, времени).

Для определения гиперболичности вначале рассмотрим понятие носителя оператора или обобщенной функции. *Носителем оператора* называется минимальное замкнутое множество такое, что для любой функции, равной нулю в некоторой окрестности этого множества, значение оператора равно нулю.

Оператор назовём *гиперболическим*, если носитель обратного оператора является подмножеством положительной полуоси.

Как видно из определения, диференциальные операторы (даже нецелого порядка) от одной переменной являются гиперболическими. Для определения (распространения) понятия гиперболичности для систем уравнений рассмотрим задачу Коши для систем псевдодифференциальных уравнений. В данной работе мы не будем рассматривать это понятие в той общности, где «начальные» условия задаются на некоторой гиперповерхности, точнее в некоторой области, ограниченной гиперповерхностью.

Ограничимся далее заданием «начальных» условий при $t < 0$. Отметим, что для систем псевдодифференциальных уравнений не достаточно задание параметров при конкретном значении времени, а необходимо, вообще говоря, задание всей «предыстории» задачи. Задача Коши для таких систем заключается в продолжении решения на некоторую окрестность гиперплоскости $t = 0$. Вообще говоря, для задач с начальными условиями больше подходят преобразования Лапласа, однако, в силу их эквивалентности в некотором классе функций, математики обычно имеют дело с *преобразованиями Фурье* [9].

Многие теоремы и предложения из [9] можно распространить и на систему псевдодифференциальных уравнений, так как при получении решения через преобразование Фурье (через сведение дифференциальных уравнений к алгебраическим) факт того, являются ли образы операторов полиномами или произвольными функциями, не важен. Однако есть и отличия, а именно, некоторые оценки, выполняющиеся *автоматически* в первом случае, в данном случае могут не выполняться.

Не стремясь к общности и математической строгости, рассмотрим решение линейной задачи и задачи Коши для системы псевдодифференциальных уравнений.

Обозначая переменные преобразования Фурье по пространственным переменным, как и ранее, через ξ, а по времени — через λ, получаем формальное решение в виде

$$y(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^k} \sum_l \int\limits_{-\infty}^{+\infty} c_l(\xi_1,\dots,\xi_k)\bar{y}_l(\xi)\exp(i[\lambda_l(\xi)t + \xi x])d\xi. \tag{11}$$

Здесь $\lambda_l(\xi)$ — корни характеристического уравнения

$$\det a(\lambda,\xi) = 0 \tag{12}$$

заданной системы псевдодифференциальных уравнений, а $\bar{y}_l(\xi)$ — собственные векторы системы линейных псевдодифференциальных уравнений, $c_l(\xi)$ — функции, с помощью нахождения которых удовлетворяются начальные условия.

Фактически последние функции являются коэффициентами разложения по «базису» собственных векторов $\bar{y}_l(\xi)$ преобразований Фурье начальных условий, т.е.

$$c_l(\xi) = \bar{y}_l^*(\xi)\cdot\bar{y}_{00}(\xi),$$

где $\bar{y}_l^*(\xi)$ — «базис», дуальный «базису» $\bar{y}_l(\xi)$, а $\bar{y}_{00}(\xi)$ — преобразование Фурье начальных условий.

Отметим, что в нашем случае система собственных векторов (функций) может не образовывать базис даже в случае различных собственных значений. Возможно также излишество собственных векторов (функций), которые сделают систему *недоопределённой* (например, возможна неединственность решения и т.д.).

Отметим, что формула (11) представляет решение в виде суперпозиции волн с разными волновыми числами ξ. Можно также представить решение (11) в виде свертки матричного ядра с начальными значениями:

$$\begin{gathered} y(t,x) = \int F(t,x-z)y_{00}(z)dz, \\ F(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^k}\sum_l \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \bar{y}_l(\xi)\otimes\bar{y}_l^*(\xi)\exp(i\lambda_l(\xi)t + i\xi x)d\xi. \end{gathered} \tag{13}$$

Здесь $\bar{y}_l(\xi)$ и $\bar{y}_l^*(\xi)$ — правые собственные векторы (столбцы) и левые собственные ковекторы (строки) с соотношениями

$$\bar{y}_l^*(\xi)\bar{y}_k(\xi) = \delta_l^k = \begin{cases} 0, & l \neq k, \\ 1, & l = k, \end{cases}$$

для матрицы амплитуды псевдодифференциальной системы уравнений.

Предположим теперь, что при каждом l на каждой прямой, выходящей из начала координат в ξ-пространстве, имеется действительная характеристическая скорость, т.е. для любого ξ из некоторой полусферы существует действительный предел

$$v_l(\xi') = -\lim_{p\to\infty} \frac{\lambda(\xi' p)}{p}.$$

Пусть функция

$$\bar{y}_l(\xi' p) \otimes \bar{y}_l^*(\xi' p)$$

— аналитическая (без особенностей) и ограниченная (при этом можно рассматривать также и функции растущие, но медленнее любой экспоненциальной функции по мнимой оси) в нижней комплексной полуплоскости p.

Допустим далее, что функция $\bar{y}_l(\xi' p) \otimes \bar{y}_l^*(\xi' p)$ стремится к нулю при стремлении p к бесконечности по действительной оси так, что

$$\lim_{A\to+\infty}(-iA)\int_0^{\pi} \bar{y}_l(\xi' A\exp(-i\varphi)) \otimes \bar{y}_l^*(\xi' A\exp(-i\varphi))\exp(-i\varphi)\times$$
$$\times\big\{\exp[i\lambda_l(\xi' A\exp(-i\varphi))t + i\xi' A\exp(-i\varphi)]\big\}d\varphi = 0. \tag{14}$$

Тогда получаем, что соответствующая часть ядра $F_l(t,x)$ обращается в нуль при $x < v_l(\xi')t$.

Поэтому в формуле (13) соответствующая часть интеграла влияния начальных данных обратится в нуль, и останется только та часть точек z, до которых может дойти сигнал, излученный от точки x при $0 \leqslant \tau \leqslant t$, со скоростью

$$v_l(\xi'), \quad \xi' = \frac{x-y}{|x-y|}\operatorname{sign}(v_l).$$

Соответственно, для системы псевдодифференциальных уравнений дадим определение гиперболичности: система псевдодифференциальных уравнений *гиперболична* (*гиперболическая*), если разрешима единственным образом соответствующая задача Коши при малых $t > 0$ и зона влияния начальных данных ограничена конечным конусом.

Из рассмотренного выше получаем *достаточное условие гиперболичности*.

Предложение 1. *Если характеристическое уравнение имеет конечное число корней с действительными характеристическими скоростями, у которых собственные векторы образуют базис, и для них имеет место равенство* (14)*, то система псевдодифференциальных уравнений гиперболична.*

Отметим здесь некоторую двойственность между эллиптическими и гиперболическими типами уравнений.

3. Основные принципы для определения системы уравнений, описывающих многоскоростные течения

Далее мы обсудим принципы из [2].

1. В соответствии со сказанным в первом параграфе, мы обобщаем первый принцип: *многофазные течения описываются квазилинейной псевдодифференциальной системой уравнений*. В данном параграфе мы несколько усилим это до требования *эволюционности* системы уравнений, т.е. она должна приводиться к виду

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \mathbf{A}y = 0, \tag{15}$$

где $\mathbf{A}$ — псевдодифференциальный *квазилинейный* оператор.

Отметим, что к такому виду, по-видимому, можно привести любую гиперболическую псевдодифференциальную систему уравнений. Например, комбинируя разные уравнения импульсов, можно избавиться от составляющих силы, обусловленной присоединенными массами, и привести систему к виду (15).

Однако разрешение сил типа Бассе (при приведении к виду (15)) может существенно усложнить вид псевдодифференциального оператора $\mathbf{A}$.

Далее, в силу гиперболичности, амплитуду оператора $\mathbf{A}$ можно привести к виду

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \mathbf{A}y = 0. \tag{16}$$

Первая часть (по аналогии с обобщеными функциями, *сингулярная часть*) — просто дифференциальный оператор, вторая (*несингулярная часть*) может быть представлена (что для нас не является необходимым) в виде интегрального оператора от производных (как сила Бассе) плюс некоторая комбинация от значений функций (чисто нулевой порядок).

2. В качестве второго принципа, как и раньше, принимаем *гиперболичность системы уравнений*. Отметим, что вместо этих двух принципов можно было остановиться на одном принципе *локальности* о том, что развитие любого малого возмущения определяется только значениями параметров течения в некотором ограниченном конусе. При этом этот принцип не противоречит тому, что для определения решения достаточно знать параметры течения не во всем конусе, а только на его срезе с гиперплоскостью $t = 0$.

Вообще, в дальнейшем нам понадобится вполне определенная эквивалентность задачи Коши с волновой задачей. Для того чтобы определить вид псевдодифференциальных уравнений, не обязательно наблюдать за развитием (эволюцией) начальных гармонических возмущений при всевозможных волновых числах (что может быть гораздо сложнее), а можно лишь наблюдать за распространением гармонических волн всевозможных частот. Для этого может потребоваться вышесказанная эквивалентность, сводящаяся к комплексной *однолистности* (взаимной однозначности) функции $\lambda(\xi' p)$ от p в некоторой комплексной окрестности действительной прямой.

Отметим, что в сформулированном выше виде первые два принципа являются естественными. Действительно, уравнения для малых возмущений должны быть линейными, и в однородном случае сдвиги решений должны быть решениями. Отсюда следует, что операторы, определяющие решения, должны коммутировать с операторами дифференцирования.

Однородные псевдодифференциальные операторы и есть наиболее общий вид таких операторов. В этом смысле замена ПДО квазилиленейными дифференциальными уравнениями является заменой произвольных функций от операторов дифференцирования линейными функциями.

Из представления неоднородного случая как однородного в малых масштабах получаем общий вид элемента некоторой *бесконечномерной алгебры Ли*, определяющего эволюцию бесконечномерной системы. Точные формулировки этих результатов возможны только после некоторого уточнения пространства основных функций и пространства функционалов на нём (сопряженного пространства), являющегося, как известно, пространством обобщённых функций.

В этом отношении предпочтителен подход с *гиперфункциями Сато*, для определения которых не требуется задание основного пространства функций, и теория свободна от этого. Инвариантным образом гиперфункции можно представить как *когомологии голоморфных пучков*. В некотором смысле они непосредственно связаны с «волнами» [13].

Некоторыми авторами действительно предлагались уравнения движения в виде интегродифференциальных уравнений, называемых *нелокальными уравнениями механики*. Однако интегродифференциальные уравнения образуют слишком широкий класс, а из-за принципа галилеевой инвариантности реализуется только частный класс — псевдодифференциальные уравнения. К тому же у этих авторов не было никакого обоснования необходимости появления таких уравнений, не говоря уже о том, откуда взять их конкретный вид.

Так в [12] предпринята попытка обоснования *нелокальности* уравнений механики. Однако в этой работе нет правильных предположений — нестолкновение частиц, неуточняемая «*квазистационарность*» (которая, как было показано в первом параграфе, физически не реализуема) и т. д.

Ошибочен и основной вывод о зависимости напряжений от предыстории при таких предположениях (если правильно понимается «квазистационарность», то фиктивные записи напряжений через двойное распределение как раз не должны зависеть от предыстории). И данный вывод получается именно из-за отрицания основных предположений работы [12], как уже отмечалось выше.

3. *Принцип галилеевой инвариантности системы уравнений* принимаем, как и прежде, в качестве одного из главных. Более того, из него следует *однородность* системы уравнений, если внешние силы однородны. Обычно «включаемая» внешняя сила тяжести во многих задачах однородна (зависимость от пространственных координат и времени для него можно не учитывать). Из него также следуют и другие утверждения, в частности, *сохранение уравнений при поворотах и при переходе к другой инерциальной системе уравнений*. Они, в свою очередь, влекут тот факт, что псевдодифференциальные операторы являются функциями от дифференцирования вдоль мировой линии

$$D_i = \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x}$$

и оператора Лапласа Δ.

По сути этот принцип (совместно с предыдущими) сводит определение системы уравнений к спектральным характеристикам распространяемых волн сжатия (совместной деформации), волн диффузии, поперечных волн (связанных с нешаровыми частями тензоров напряжений) и температурных волн (связанных с распространением тепла).

4. Четвертый принцип, заключающийся в *неизменности взаимодействий между фазами* при исскуственном введении новой фазы с нулевой объёмной (соответственно и массовой) концентрацией или при исскуственном разделении одной фазы с объёмной концентрацией α_i на несколько идентичных фаз с той же суммарной объёмной концентрацией.

Отметим, что этот принцип не физический (в отличие от галилеева принципа инвариантности) и поэтому не зависит от выбора физической модели пространства–времени, как в последнем случае. В этом смысле он — более глобальный математический принцип.

Последние два принципа дают ограничения как локальные, так и глобальные как на *сингулярную*, так и на несингулярную *регулярную* (или интегрируемую) части.

5. В качестве пятого принципа принимается *наличие дивергентного вида у системы уравнений*. Соответственно, этот принцип можно было бы обобщить на наш случай (уравнения (15)–(16)), понимая под этим дивергентность сингулярной части. Однако, по мнению авторов, это не может являться обязательным принципом.

Отметим также, что систему уравнений мы определили через малые возмущения, а для них *дивергентность* в линейном приближении имеет место автоматически.

Таким образом, в линейном приближении имеется достаточное количество законов сохранения, вытекающих из гиперболичности.

Тем не менее следует выяснить, не вытекает ли принцип дивергентности из более фундаментального закона сохранения импульсов при взаимодействии частиц.

С этой целью рассмотрим многофазную среду, состоящую из множества частиц с массами m_{ij} и скоростями v_{ij}. Здесь первые индексы соответствуют номеру фазы (куда относится частица), вторые же индексы нумеруют сами частицы (внутри каждой фиксированной фазы).

При движении частицы ее вклад в гидродинамическую характеристику плотности задается членом

$$m_{ij}\delta(x_{ij} - v_{ij}t).$$

В дальнейшем компоненты тензоров обозначим верхними индексами для удобочитаемости формул, учитывая, что даже при одномерных течениях необходимо учесть трехмерные вариации скоростей. Тогда можно записать следующие соотношения:

$$\frac{\partial[m_{ij}v_{ij}^l \delta(x_{ij} - v_{ij}t)]}{\partial t} + \frac{\partial[m_{ij}v_{ij}^l v_{ij}^k \delta(x_{ij} - v_{ij}t)]}{\partial x^k} = 0. \tag{17}$$

Из-за сохранения суммарного импульса при соударениях следует тот факт, что уравнение (17) можно суммировать по всем частицам. Это дает закон сохранения (чисто дивергентное уравнение) полного импульса:

$$\sum_i \left(\frac{\partial \rho_i v_i^l}{\partial t} + \frac{\partial \rho_i v_i^l v_i^k}{\partial x^k} \right) = \frac{\partial \tau^{lk}}{\partial x^k}, \qquad v_i^l = \frac{\sum\limits_{j(x_{ij}\in\delta V)} m_{ij} v_{ij}^l}{\sum\limits_{j(x_{ij}\in\delta V)} m_{ij}}, \quad \tau^{lk} = \sum_i \tau_i^{lk},$$
$$\tau_i^{lk} = \rho_i v_i^l v_i^k - \frac{1}{\delta V} \sum_{j(x_{ij}\in\delta V)} m_{ij} v_{ij}^l v_{ij}^k = -\frac{1}{\delta V} \sum_{j(x_{ij}\in\delta V)} m_{ij} (v_{ij}^l - v_i^l)(v_{ij}^k - v_i^k). \tag{18}$$

Последние соотношения означают, что поток импульса состоит из двух частей: конвективного, заданного среднемассовыми скоростями, и диффузионного, заданного дисперсией скоростей. Соответственно, симметричный (мы пока не учитывали вращения точечных частиц) тензор напряжений — не что иное, как тензор, характеризующий диффузионный перенос импульса.

Попытаемся теперь вычислить силу взаимодействия между двумя фазами с номерами i и j. Она равна обмену импульсами при соударениях частиц i-ой фазы с частицами j-ой фазы. Если воспользоваться предположением (эквивалентным *принципу* 6), что при расчётах можно считать только совокупность частиц из двух фаз, учитывая остальные только через средние для всей смеси, то можно предположить пропорциональность диффузионных потоков i-ой и j-ой фаз их объёмным концентрациям при равенстве средних скоростей. При этом отсюда получим *седьмой принцип*.

Отметим также, что первые два принципа в нашем изложении являются локальными ограничениями на сингулярную часть системы уравнений. Принцип же дивергентности является глобальным ограничением на сингулярную часть (на вид зависимости уравнений от переменных y).

Последний принцип не является существенным ограничением при нашем несколько расширенном толковании и не противоречит другим принимаемым принципам. Тем не менее этот принцип (впрочем, как и последующие) почти не накладывает ограничений на вид псевдодифференциальных уравнений. Поэтому последние могут быть заменены (по сути эквивалентным им) принципом о том, что система уравнений движения имеет такой же порядок, как и уравнения Эйлера. К тому же теперь у нас имеется несколько другая идеология: не получать вид системы уравнений из достаточно разумных предположений, а измерять их экспериментально. При этом эксперимент может быть и численным моделированием типа получения спектральных характеристик из осреднения движения отдельных молекул.

Соответственно, принципы нужны не для определения отдельных постоянных, а для восстановления дисперсионных соотношений для всего спектра волн (скорости, *декремента затухания*, соотношения амплитуд) на всём диапазоне частот.

Более того, вместо этих принципов примем принцип об *экспериментальной измеримости системы уравнений*, о чем и поговорим в следующем параграфе.

4. Измеримость системы уравнений

В данном параграфе мы ставим задачу определения системы уравнений и ее решения. Однако, с точки зрения авторов, прямой (или первичной) задачей является не определение системы (псевдо)дифференциальных уравнений, а *задача определения дисперсионных соотношений*, считавшаяся ранее вторичной.

Во-первых, сами уравнения не однозначны. Их можно дифференцировать по пространственно–временным или искомым переменным y, умножать на функции от переменных, складывать с другими уравнениями и т.д. так, чтобы любое решение исходной системы было решением и новой системы.

Этим операциям соответствуют псевдодифференциальные аналоги: умножению на $-ix$ — дифференцирование по k амплитуды оператора, дифференцированию по x — умножение на ik и т.д.

Фактически, решению соответствует *модуль над кольцом функций* от переменных t, x, λ, k, y. При определении дисперсионных соотношений из эксперимента мы непосредственно определяем базис этого модуля.

Во-вторых, при построении решения мы не будем определять явный вид (псевдо)дифференциальных уравнений и решать их (возможно, какой-либо некорректной или неустойчивой) численной схемой, а определим вид общего решения непосредственно, и далее, методом характеристик (всегда корректной численной схемой) определим частное решение.

Тезис о *первичности дисперсионных соотношений*, сформулированный в [1,15], неявно принят и другими [7]. В подтверждение этого тезиса расскажем о собственном опыте, полученном при изучении резонансных явлений в *теории фильтрации*.

При изучении волновых процессов появляется некоторая характерная частота ω_0, при которой сила Стокса примерно равна инерционным силам.

При частотах
$$\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$$
волны распространяются с характеристической скоростью и называются иногда «вмороженными», а при
$$\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$$
— с равновесной скоростью. Данная частота для реальных нефтеносных сред порядка 10 Мгц. Резонансные частоты определяются самой геометрией «бассейна».

В одномерной задаче получается характерная частота $\omega_* = \pi c/L$, где c — скорость основной (медленно затухающей) волны, L — длина участка от точки возбуждения до точки отражения (или границы бассейна типа скалы). Так как в реальных задачах выполнено неравенство $\dfrac{\omega}{\omega_0} \ll 1$, мы находимся в равновесной зоне, и c — равновесная скорость.

Соответственно, получается, что резонансы возникают или на частотах $\omega_* n$ (n — натуральное число) или на частотах
$$\omega_* \left(n + \frac{1}{2}\right),$$
где n — неотрицательное целое число, в зависимости от постановки чётности или нечётности граничных условий.

Граничные условия *чётны*, если число нечётных граничных условий чётно. Граничное условие *чётно* или *нечётно* в зависимости от чётности переменной, которая определяется данным граничным условием.

Переменные типа давления, плотности, компоненты тензоров чётного порядка — чётные, а скорости и другие компоненты тензоров нечётного порядка — нечётные переменные. Ширина резонансов, вычисляемая из дисперсионных соотношений, очень узкая порядка
$$\omega_* \frac{\omega_*}{\omega_0} \ll \omega_*.$$
Поэтому данные свойства численным решением нелинейной системы уравнений вряд ли можно обнаружить. Сами эффекты резонансов зависят от многих параметров, наиболее чувствительным из которых является показатель затухания основной волны. Эффекты примерно обратно пропорциональны этому параметру. Этот показатель *в модели Био* в равновесной зоне пропорционален квадрату частоты
$$\gamma(\omega) = a_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right),$$
с коэффициентом $a_0 L$ порядка 1. Поэтому он расходится с его реальным значением, примерно пропорциональным частоте
$$\gamma_r(\omega) = b_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2,$$
т.е. примерно в миллион раз. При введении трения в скелете этот показатель
$$\gamma(\omega) = \frac{\omega_{TP}}{\omega_0}\left(a_0 + a_1 \frac{\omega}{\omega_0} + \cdots\right)$$
почти постоянен (а не пропорционален частоте) в равновесной зоне.

Хотя вблизи какой-то резонансной частоты можно ввести трение таким образом, чтобы этот показатель соответствовал реальному (для первых резонансов порядка 1 гц); для следующей частоты $\frac{3}{2}\omega_*$ (в 3 раза большей, чем первая $\frac{1}{2}\omega_*$) это трение уже не годится. При этом нельзя удовлетворительным образом видоизменить систему уравнений только введением новых межфазных сил (даже псевдодифференциальных) типа Бассе из-за области частот, где подавляющим образом превалирует сила Стокса.

В данной задаче основной недостаток, по мнению авторов, в *неучёте* псевдодифференциальных связей между тензором напряжений и смещений и псевдодифференциальных связей между разного типа напряжениями.

Отметим, что точность вычисления самих резонансных частот, дисперсионных соотношений и качественных явлений резонансов зависит только от точности задания (хорошего приближения) операторов (системы уравнений) в зависимости от y, т.е. от точности приближений операторов по норме в пространстве C^0 или $L_2 = H_0$.

Количественные эффекты влияния резонансов зависят от нелинейностей системы уравнений, в частности, от $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}$, т.е. точность получения количественных эффектов зависит от приближения операторов в норме пространства H_1.

Из вышесказанного следует, что системы уравнений Био [1] не являются достаточно хорошими даже в норме пространства H_0 и уж тем более не годны для вычисления количественных эффектов резонансов.

Для определения вышеуказанного модуля и базиса, в силу эквивалентности краевой задачи и задачи Коши, будем создавать линейные волны всевозможных частот. Для каждой частоты ω определим параметры исходящих волн. По каждому направлению, определённому единичным вектором k', распространится l волн. При этом для каждой физической величины z и номера волны i получается комплексная величина $z_i(\omega, k')$, которая определяет поведение этой величины по данной волне как функцию

$$z_i(\omega, k') \exp(i\omega t - ik_i k' x).$$

Волновое (комплексное) число k_i зависит только от номера волны и её частоты. Отметим, что волна, движущаяся в противоположном направлении, считается другой, хотя при пренебрежении скоростями фаз по отношению к скорости волны (малые числа Маха) эта волна является комплексно сопряженной к волне, сдвинутой по времени на их полупериод.

Амплитуды $z_i(\omega, k')$ определены с точностью до умножения на элементы кольца, однако отношение амплитуд разных переменных для одной и той же волны не зависит от этой произвольности. Поэтому при эквивалентности краевой задачи и задачи Коши из формул (13) можно получить интегральное ядро, а следовательно, и решение. Однако на практике возникают трудности следующего характера.

Во-первых, могут быть близкие скорости k_i (для различных номеров i), которые затрудняют разделение волн при измерениях. В силу вышеуказанной эквивалентности, нет кратных (одинаковых) величин k'.

Во-вторых, могут присутствовать «траекторные» характеристики, например, волна с нулевой скоростью для невозмущенной среды. В силу вышесказанного, количество решений не более одного. В случае дифференциальных уравнений это возникает тогда, когда рассматриваемая система уравнений нечётного порядка.

Так как каждому типу волны с ненулевой скоростью соответствуют две волны (направленные в разные стороны), то в случае волны нечетного порядка остается лишь один тип.

Вообще чётность порядка уравнения, и следовательно, качественное поведение решения зависит от размерности пространства. Так, двухфазные уравнения фильтрации [10] имеют порядок

$$\frac{(m+1)(m+4)}{2}$$

(m — размерность пространства).

Таким образом, одномерные и двумерные уравнения — нечётного порядка, а трёхмерные — чётного порядка.

Трудность измерения уравнений нечётного порядка связана с тем, что измериние волны с нулевой скоростью не представляется возможным.

В-третьих, при большом количестве типов волн пропадает точность вычисления амплитуд, поскольку вычислять надо вначале характеристики самой быстрой амплитуды, далее более медленной и т.д. При этом теряется точность при вычислении характеристик даже методом вычитания из измеренных величин неточно вычисленных характеристик более быстрых волн.

В особенности, затруднения могут возникать в случае большого отношения самой большой скорости к самой малой (происходит появление матриц с малыми собственными значениями).

В-четвёртых, для некоторых волн длина затухания может быть малой (в e раз меньшей), что усложняет измерение. Однако при этом надо иметь в виду, что эта длина не может быть существенно меньше длины волны.

В-пятых, измерение некоторых физических величин с необходимой точностью может оказаться (практически) невозможным. Соответственно, для пополнения недостающей информации (в том числе, в случае наличия «траекторных» характеристик) могут послужить заранее известные законы сохранения.

Методика измерения псевдодифференциальной системы уравнений должна вырабатываться применительно к каждой конкретной ситуации.

Здесь мы лишь демонстрируем, как лучше подкорректировать уравнения для несжимаемых парожидкостных сред при отсутствии межфазных переходов. В этом случае мы имеем два закона сохранения масс для каждой фазы и закон сохранения полного импульса. Поэтому в данном случае достаточно «измерить» одно псевдодифференциальное уравнение.

Однако в ходе измерения мы обнаружим волну, связанную, в первую очередь, с распространением возмущений давления. Скорость ее распространения может зависеть от частоты даже в линейном случае. Она распространилась бы с бесконечной скоростью в случае несжимаемости каждой фазы.

Поэтому реально, учитывая конечность этой скорости, мы должны измерить её характеристики и учесть при вычислении при помощи измерения характеристик более медленной волны.

5. Обобщённые решения системы псевдодифференциальных уравнений и диссипация

О волновых и обобщенных решениях дифференциальных уравнений в частных производных написана хорошая книга [6]. Однако при определении структуры ударных волн рассматриваемая задача сводится к решению уравнений более высокого порядка с малым параметром. При этом переход к уравнениям более высокого порядка производится через переход к более реальной системе, даже не обращая внимания на потерю гиперболичности системы. Конечно, в рамках уравнений в частных производных другого пути не существует.

Однако, как было сказано ранее, даже в однофазных средах могут появиться дополнительные псевдодифференциальные члены. При этом если эти члены играют роль (псевдо)дифференцирования вдоль касательной к поверхности разрыва, то они по сути не влияют на характер разрывов, т.е. возможны решения без диссипации.

Регулярные члены с псевдодифференцированием вдоль направлений ударных волн приводят к диссипации и размыванию разрывов.

При регулярности этих членов, т.е. когда их амплитуды растут медленнее некоторой линейной функции (точнее, ещё нужно, чтобы

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|a(\xi)|d\xi}{|\xi|^{n+1}} < +\infty,$$

где n — размерность пространства), (обобщённая) гиперболичность может не нарушаться.

В многофазной среде наличие чисто дивергентных законов сохранения дает возможность получения обобщенных решений с сильными разрывами.

Однако недостаточность данных законов делает невозможным разрывы с произвольными значениями параметров даже с одной стороны. Для нахождения допустимых значений параметров при таких разрывах надо искать решения с разрывами в виде

$$y = y(x - wt)$$

и приравнять нулю члены с псевдодифференцированием вдоль направления распространения волны (вдоль разрушающей диссипации).

Для демонстрации того, что можно учесть диссипации типа вязкости, рассмотрим уравнение движения несжимаемой жидкости с вязкостью половинного порядка:

$$\frac{\partial v^l}{\partial t} + v^k \frac{\partial v^l}{\partial x^k} = (\mu_1 \mathbf{A}_\tau + \mu_2 \mathbf{A}_n) v^l - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^l}. \tag{19}$$

Здесь $\mathbf{A}_\tau$ и $\mathbf{A}_n$ — операторы половинного дифференцирования в направлении, перпендикулярном оси e_l (вдоль касательной к фронту волны при распространении её по оси e_l), и вдоль оси e_l соответственно.

Правую часть уравнения (19) можно трактовать как представление тензора диффузионного переноса импульса в виде суммы тензора напряжений, связанного с физическим давлением p, и псевдодифференциальных добавок, связанных с неравномерностью распределения осредненных скоростей.

Найдём *решение типа Пуазейля* для этой системы, когда только одна компонента скорости ($v^1 = v$) отлична от нуля. Рассмотрим плоскую задачу, т.е. задачу, когда

$$v = v(y), \qquad y = x^2.$$

Тогда решением является функция

$$p = p_0(y) - x p_1(y),$$

где величины $p_1(y)$ и $v(y)$ связаны соотношением

$$p_1(y) + \mu_1 \sqrt{\frac{d}{dy} v(y)} = 0.$$

Дальнейшее уточнение решения можно получить, если предположить выполнение равенства $p_1(y) = \mathrm{const}$ или искать только устойчивые решения уравнения (19) в виде распределения скорости и давления, удовлетворяющие последнему соотношению.

Отметим также, что при введении слабой регулярной псевдодифференциальной «вязкости» (диссипации) более пологие «опрокидывающиеся» *волны Римана* (всегда опрокидывающиеся без этих членов) избегут опрокидывания, а сильные — нет, что соответствует наблюдениям за волнами на море. Такая «вязкость», не нарушающая гиперболичность, больше соответствует реальности, чем вязкость Навье—Стокса с потерей гиперболичности, никогда не являющаяся опрокидывающейся.

Отметим, что в задачах теории фильтрации лучше не вводить вязкость скелета, повышая при этом порядок системы уравнений, так как появятся операции дифференцирования от скорости скелета второго порядка. При этом лучше вводить некоторые псевдодифференциальные члены (например, с дифференцированием половинного порядка) от скорости скелета. Тогда сохранится гиперболический (обобщенный) вид, и появится диссипация более приемлемого (с точки зрения дисперсионных соотношений, т.е. лучше описывающая распространения волн) вида. Такие члены уже вводились в [1, 15] как *уточнение закона Гука*.

Как было сказано в предыдущем параграфе, главные дисперсионные соотношения и уравнения лучше измерять через вышеприведенные параметры, а не придумывать что-то более искусственное. Здесь нашей целью было показать, что уравнения можно улучшать (делать более реальными), не повышая порядок системы, теряя, к тому же, гиперболичность, а добавляя псевдодифференциальные (диссипативные или нет) члены.

В некоторых ситуациях физические величины являются квадратичными функционалами, например, возмущение осредненного решения является квадратичной формой относительно возмущения или сила сопротивления в зависимости от функции угла атаки тонкого тела и т.д. Поэтому имеет смысл проверить на знакоопределенность данное выражение, которое сводится к проверке знакоопределенности матричного интегрального ядра *в смысле Бохнера*.

В силу теоремы Бохнера [14], эта проверка сводится к проверке положительности или отрицательности действительных частей собственных значений преобразований Фурье соответствующего оператора при действительных значениях аргумента. В некоторых случаях, например, в задачах обтекания (значение сопротивления тела) соответствующее свойство при создании новых моделей является таким же фундаментальным физико-математическим свойством, как гиперболичность системы уравнений по времени. Это свойство не следует из гиперболичности или диссипативности системы. В описанных задачах может потребоваться такое свойство и для разрывных решений, и оно может дать дополнительные неравенства относительно разрывных решений, не упомянутых в [6].

Несколько слов о граничных условиях. В литературе обычно изучаются ПДО с граничным условием только для линейных уравнений [5]. Определить такие ПДО в механике можно другим способом — представить их как операторы интегрирования вдоль распространения волн, а их граничные условия — как условия отражения этих волн.

Дело в том, что в механике встречаются псевдодифференциальные операторы, представимые в виде функций от оператора дифференцирования и дифференцирования вдоль траектории. Первые (см. [5]) представимы как

$$\int dg(r)S(r),$$

где $S(r)$ — усреднение функции, на которую действует оператор, по сфере радиуса r

$$S(r)F(x) = \int\limits_{|x-y|=r} F(y)dS,$$

а $g(r)$ — функция, соответствующая оператору и выраженная через оператор Лапласа. Например, квадратному корню от оператора Лапласа соответствует *функция Бесселя* в качестве $g(r)$.

Соответственно, операторы представляются в виде «учёта волн», распространяющихся от точек с некоторым характером убывания.

Граничные условия для таких ПДО представляют форму отражения таких волн. В этом плане спектральный подход к динамике сплошной среды, начатый в [1, 15], есть волновой подход. Суть его сводится к утверждению, что сплошная среда определяется множеством волн, распространяющихся по ней, а не наоборот.

Соответственно, уравнения движения жидкости (газа) и теплопроводности получаются, вообще говоря, псевдодифференциальными, определяющими дисперсионные соотношения распространяющихся волн.

Множество *недостатков традиционного подхода* становится легко объяснимым с этой точки зрения. В числе таких недостатков негиперболичность уравнений по времени, невозможность правильно считать критические значения параметров перехода к неустойчивости, малость диапазонов возможных режимов течения, когда введённые параметры описывают течение с приемлемой точностью (это связано с тем, что спектральное приближение годится только в небольшом диапозоне частот волн) и т.д. При этом граничные условия также берутся не такими, как в традиционной механике, а *определяются из условий отражения волн*.

Соответственно, граничные условия определяются не только заданием среды и поверхности — границы области течения, а являются продуктом взаимодействия волн на границе, т.е. для их определения необходимо экспериментально измерить или численно решить задачу отражения волн из *микроуравнений движения*. При этом граничные условия определяются не одними только свойствами среды, а зависят также от материала границы, а иногда (когда волна медленно затухает в материале границы) может привести также к учёту распространения волны по другой среде, определяющей границу для исходной среды.

Учёт шероховатости поверхности также возможен в этом подходе через изменения коэффициентов отражения самих волн отражения. При этом речь идёт о волнах не в среде, а соответствующих амплитудам интегрирования функции $g(r)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 08–01–00231-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В.* Общий спектральный подход к динамике сплошной среды// Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — *23*, — С. 52–70.
2. *Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В.* Феноменологический подход к определению межфазных сил// Докл. РАН. — 2007. — *412*, № 1. — С. 44–47.
3. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщнные функци. — М.: Физматгиз, 1958.
4. *Егоров Ю. В., Шубин М. А.* Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Элементы современной теории// Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — М.: ВИНИТИ, 1988. — *31*. — С. 5–125.
5. *Йон Ф.* Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. — М.: ИЛ, 1958.
6. *Куликовский А. Г., Свешникова Е. И.* Нелинейные волны в упругих средах. — М.: Изд-во «Московский Лицей», 1998.
7. *Куликовский А. Г., Пащенко Н. Т.* Структура релаксационной зоны волны поглощения света и режимы самоподдерживающихся светодетонационных волн. Научный отчет Ин-та механики МГУ № 4623. — М.: Изд-во Ин-та механики МГУ, 2002. — 40 с.
8. *Маслов В. П.* Операторные методы. — М.: Наука, 1973.
9. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. — М.: Мир, 1977.
10. *Нигматуллин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред. — М.: Наука, 1978.
11. *Николаевский В. Н.* Геомеханика и флюидинамика. — М.: Изд-во «Недра», 1996.
12. *Осипцов А. Н.* К учету конечности объема и гидродинамического взаимодействия частиц в газовзвесях. — Докл. АН СССР. — 1984. — *275*, № 5, С. 1073–1076.
13. *Пенроуз Роджер* Путь к реальности или законы, управляющие Вселенной. — Москва–Ижевск: Рег. и хаот. динам., 2007.
14. *Хьют, Росс.* Абстрактный гармонический анализ. Т. 2. — М.: Мир, 1975.
15. *Шамолин М. В.* Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. Изд. 2-е, переработанное и дополненное. — М.: Изд-во «Экзамен», 2007. — С. 240–281.
16. *Sato M.* Theory of hyperfunctions. I// J. Fac. Shi. Univ. Tokyo. Sect. I, 1959, pp. 139–193.
17. *Sato M.* Theory of hyperfunctions II// J. Fac. Shi. Univ. Tokyo. Sect. I, 1960, pp. 387–437.

Р. Р. Айдагулов
Московский Государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
Институт механики, Москва, Россия
М. В. Шамолин
Московский Государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
Институт механики, Москва, Россия
E-mail: shamolin@imec.msu.ru