УДК 531.01+517.9

М. В. Шамолин, д-р физ.-мат. наук
Ин-т механики Московского государственного
университета им. Ломоносова
(Россия, 119899, Москва, Мичуринский пр., д. 1,
тел. (495) 9395143, E-mail: shamolin@imec.msu.ru)

Решение задачи диагностирования в случае точных траекторных измерений и траекторных измерений с ошибкой *

Задача дифференциальной диагностики функционального состояния объектов управления, имеющих модульную структуру и конечный набор возможных неисправностей, сведена к двум самостоятельным последовательно решаемым задачам: задаче контроля (установлению критерия наличия неисправности в системе) и задаче диагностирования (поиску произошедшей неисправности). Показана принципиальная осуществимость решения задачи дифференциальной диагностики в случае точных траекторных измерений и траекторных измерений с ошибкой на уровне математических моделей.

Задачу диференціальної діагностики функціонального стану об'єктів управління, які мають модульну структуру та кінцевий набір можливих несправностей, зведено до двох самостійних послідовно розв'язуваних задач: задачі контролю (установленню критерію наявності несправності у системі) та задачі діагностування (пошуку несправності, що відбулась). Показано принципову можливість розв'язання задачі диференціальної діагностики у випадку траєкторних вимірювань і траєкторних вимірювань з помилкою на рівні математичних моделей.

К л ю ч е в ы е с л о в а: неисправность, диагностирование, траекторное измерение.

Критерием наличия неисправности в системе может быть выход траектории объекта на некоторую заранее выбранную поверхность. Неисправность может произойти в любой заранее неизвестный момент времени движения объекта в любой точке внутри данной поверхности контроля [1—3].

Исходной информацией при решении задачи контроля является математическая модель движения рассматриваемого объекта, ограниченная область ее начальных условий и априорный список математических моделей движения объекта с той или иной возможной неисправностью. По этой информации можно выбрать поверхность контроля.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 08-01-00231-а).

Задачу диагностирования будем решать, выполняя последующее слежение за траекторией объекта после ее выхода на поверхность контроля. При этом необходимо, чтобы процесс диагностики осуществлялся во время движения объекта, был выполнен в течение весьма краткого интервала времени, например за полупериод или четверть периода быстрых колебаний объекта, и не требовал дополнительного приборного обеспечения. Эти обстоятельства не позволяют использовать довольно громоздкие алгоритмы теории идентификации и приводят к необходимости построения алгоритмов непрерывной экспресс-диагностики.

Задача диагностирования в случае точных траекторных измерений. Рассмотрим динамическую систему, движение которой описано системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x' = f_0(x, t), \tag{1}$$

где $x(t)$, $f_0(x, t)$ — n-мерные вектор-функции. Начальные условия уравнения (1) будем считать принадлежащими некоторой ограниченной области. Кроме того, будем считать, что функция $f_0(x, t)$ удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения уравнений (1) в некоторой области пространства $R^{n+1}\{x, t\}$ [4—6].

Пусть осуществлен синтез управления и его структура, и параметры выбраны таким образом, что уравнения (1) описывают желаемое движение, т.е. движение $x(t)$, близкое к некоторой программной траектории $x_*(t)$. Такую схему принято называть исправной.

Конечному набору опорных невырожденных неисправностей [1] из класса возможных поставим в соответствие набор обыкновенных дифференциальных уравнений того же порядка (только конечного):

$$x' = f_j(x, t), \;\; j = 1, \ldots, l. \tag{2}$$

Здесь $f_j(x, t)$— известные вектор-функции, отличающиеся одна от другой той или иной неисправностью.

Модели (1) и (2) принадлежат одному фазовому пространству и отличаются только структурой. Если в заранее неизвестный момент времени происходит одна из возможных неисправностей, то траектория системы (1) изменяется и непрерывно продолжается траекторией одной из систем (2). Набор моделей (1) и (2) невырожден, и их можно рассматривать объединенными:

$$x' = f_j(x, t), \;\; j = 0, \ldots, l. \tag{3}$$

В системе (1) могут происходить неисправности, не предусмотренные априорным набором (2), и возникающие, например, в окрестностях опорных неисправностей. Это значит, что функции в правых частях уравнений

(3) содержат элементы с неполной информацией [1, 7]. Недоопределенность описания возникает в связи с тем, что законы изменения некоторых элементов в (3) отличаются от законов, предусмотренных в классе возможных неисправностей, и эти законы неизвестны.

Для описания систем, содержащих элементы с неполной информацией, используют следующие дифференциальные включения [8]:

$$x' \in F(x, t), \tag{4}$$

где вектор x характеризует отклонение системы (1) от состояния, предписанного целью управления, а через $F(x, t)$ обозначено множество скоростей (3):

$$F(x, t) \in f_j(x, t), \;\; j = 0, ..., 1, \tag{5}$$

и таких, которые априори неизвестны, но могут возникнуть и принадлежать, например, сферам влияния скоростей опорных систем (3).

Под решением дифференциального включения (4), (5) [9] будем понимать абсолютно непрерывную функцию $x(t)$, удовлетворяющую соотношению $x' \in F(x(t), t)$ при всех t на рассматриваемом интервале времени и соотношению $x(t_0) \in \Xi$. Достаточные условия существования и единственности таких решений для систем с фазовыми ограничениями приведены в [10].

Следует заметить, что если в рассматриваемой системе (1) произойдет неисправность, не предусмотренная априорным списком опорных неисправностей (2), то эта неисправность может быть обнаружена, например, как одна из опорных неисправностей.

Процесс анализа траекторий систем (3) после выхода фазовой траектории вектора контроля $y(t)$ на поверхность контроля π_k, т.е. процесс решения задачи диагностирования, назовем алгоритмом диагностирования. Далее будем считать, что время диагностирования τ задано такое, что $\tau_0 < \tau < T_0$. Для этого случая сформулируем и докажем теорему, которая дает возможность построить алгоритмы диагностирования.

Введем в рассмотрение вектор

$$z(t) = (x_{d_1}, ..., x_{d_q}) = (z_1, ..., z_q), \;\; q = 1, ..., n, \tag{6}$$

компоненты которого являются подмножеством компонент фазового вектора состояния $x(t)$, причем размерность множества компонент вектора контроля $y(t)$ не превышает размерность подмножества компонент вектора $z(t)$, т.е. $m \le q$. Будем предполагать, что вектор $z(t)$ является таким, что характер функции $f_j(x, t)$ проявляется в поведении компонент вектора $z(t)$, который назовем вектором диагностирования.

Сформулируем задачу диагностирования.

Пусть известны невырожденные дифференциальные уравнения (3), поверхность контроля π_k [1, 7], момент времени τ_0 выхода вектора контроля на поверхность π_k и значение фазового вектора $x(\tau_0)$. Требуется по измерению фазового вектора $x(t)$ в некоторые последующие после выхода на поверхность π_k моменты времени t_k на интервале $[\tau_0, \tau_0+\tau]$ (где τ — малый промежуток времени, $\tau_0+\tau<T_0$) с помощью вектора диагностирования $z(t)$ однозначно определить номер j функции $f_j(x,t)$ из (3).

Таким образом, по информации о выходе системы на поверхность контроля и в результате слежения за последующей траекторией объекта необходимо определить номер j возникшей в системе управления неисправности из априорного списка в l неисправностей.

Перейдем теперь к более детальной формализованной постановке задачи и результатам, вытекающим из этой постановки.

Рассмотрим случай $q=n$. Введем следующие обозначения. Точку траектории j-й системы (3) обозначим $x_j(t)$. Обозначение $x(t)$ будем применять в рассуждениях, относящихся ко всем системам, или как общее обозначение точки траектории, когда ее принадлежность той или иной системе (3) не установлена, т. е. при описании действительного состояния рассматриваемой системы.

Примем за начало отсчета времени момент выхода $x(t)$ на поверхность π_k. Введем некоторое натуральное число N. Будем проводить траекторные измерения в следующие моменты времени: $\tau_0=0$, $t_1=\tau/N$, $t_2=$ $=2\tau/N, ..., t_N=\tau$. Обозначим $x_{0_j}=x_j(0)$, $x_{1_j}=x_j(\tau/N)$, $x_{2_j}=x_j(2\tau/N), ...$ $..., x_{N_j}=x_j(\tau)$, $x_0=x(0)$, $x_1=x(\tau/N)$, $x_2=x(2\tau/N)$, ..., $x_N=x(\tau)$.

Предположим, что произошла неисправность, траектория системы вышла на поверхность контроля π_k и далее, в течение времени τ, получены значения $x_0, x_1, x_2, ..., x_N$. Надо проверить полную систему l гипотез: j-я гипотеза, $j=0,...,l$, — это утверждение о том, что $x(t)$ — траектория j-й системы (3), т.е. $x\equiv x_j$ при условии $x_{0_j}=x_0$.

Рассмотрим следующий функционал от $x_0, x_1, x_2, ..., x_N, x_{1_j}, ..., x_{N_j}$:

$$S_j^N=\sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{n}(x_{is}-x_{ijs})^2,\ j=0,...,l. \tag{7}$$

Здесь x_{is} — s-я компонента вектора состояния $x(t)$, измеренная в момент времени t_i, $i=1, ..., N$; x_{ijs} — s-я компонента вектора состояния в момент времени t_i, полученная в результате интегрирования системы (3) с функцией f_j в правой части. Для каждого j и N на интервале $[0,\tau]$ величина S_j^N имеет свое значение, т.е. является переменной величиной, заданной на множестве функций.

Сформулируем предельную теорему для случая точных траекторных измерений.

Теорема. Для невырожденного конечного набора систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x' = f_j(x,t),\ x(t_0) = x_0 \in X^0,\ j = 0,\dots,l, \tag{8}$$

дифференциального включения $x' \in F(x,t) \in f_j(x,t)$ и всех j найдутся такие наборы чисел S_j^N, M_j, S_j и $\overline{N}$, что для значения $N > \overline{N}$ с помощью функционала S_j^N из (7), записанного в виде

$$S_j^N = \sum_{i=1}^{N} (x_i - x_{ij})^2,\ j = 0,\dots,l, \tag{9}$$

возникшая в процессе движения в неизвестный момент времени на интервале $[t_0, T_0]$ неисправность, удовлетворяющая критерию контроля, будет диагностирована однозначно, как одна из систем (8) с номером j, если

$$S_j^N \le M_j : M_j(N) = \frac{\max S_j^N}{\{x_0 \in X^0 : x_0 \in \pi_k\}} = \overline{\overline{o}}\left(\frac{1}{N}\right)$$

или если

$$S_j^N = S_j : S_j = \min_{\mu} S_{\mu}^N. \tag{10}$$

Процедура диагностирования неисправности сводится к следующему.

Алгоритм 1. В процессе функционирования объекта после выхода его траектории на поверхность контроля π_k формируются, в соответствии с функционалом диагностирования (7), (9), числа S_j^N, и каждое число S_j^N сравнивается с заранее подобранными константами M_j. Если $S_j^N \le M_j$, то j-я система (3) включается в апостериорный набор l_j, в противном случае — исключается из него. Согласно теореме, таким образом, номер функционального состояния объекта (неисправности) из известного списка может быть диагностирован однозначно, а именно $l_j = 1$.

На этапе проектирования процесс предварительного выбора N на уровне математических моделей и программ может быть осуществлен по следующему алгоритму.

Алгоритм 2. После выхода траектории объекта на поверхность контроля π_k для возможных j из списка заранее известных неисправностей объекта (3) и $N = 1$ составляются числа S_j^N, из которых выбирается наименьшее значение S_{j_1}. Номер j_1, соответствующий наименьшему значению S_j, указывает номер случившейся неисправности. Затем вычисляется значение S_j^N для $N = 2$ и определяется j_2. При равенстве $j_1 = j_2$ неисправность в объекте считается правильно определенной, и алгоритм заканчивает работу. В противном случае (если $j_1 \neq j_2$) вычисляется значение S_j^N для $N=3$ и проводится сравнение чисел j_2 и j_3 и т.д.

Если время τ не ограничено заранее сверху, то при осуществлении этого процесса может быть определен момент времени τ ($\tau = Nh$) окончания диагностирования.

Рассмотрим обобщения, для которых условия теоремы не нарушаются.

I. Пусть заданы уравнения (8) и вектор диагностирования (6). В этом случае вместо функционала (7) можно использовать следующий функционал:

$$S_j^N = \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=1}^{q} (z_{ijs} - z_{is})^2, \quad q < n. \tag{11}$$

В поведении компонент вектора диагностирования $z(t)$ проявляется характер функций $f_j(x,t)$, $j=1, \ldots, l$, поэтому очевидно, что теорема и обусловленные ею алгоритмы диагностирования остаются справедливыми и при диагностике с помощью функционала (11). Соответствующее доказательство теоремы для этого случая легко сформулировать.

В связи с доказательством этой части теоремы сделаем два уточняющих замечания.

Замечание 1. Рассмотрим функционал (11), который запишем в следующем виде (N для простоты опускаем):

$$S_j^d = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{q} (z_{ijk} - z_{ik})^2, \quad j=1, \ldots, l, \quad q < n,$$

и аналогичный функционал

$$S_j^\Delta = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{q} (\Delta_{ijk} - \Delta_{ik})^2,$$

в котором $\Delta_{ik} = |z_{ik} - z_{i-1k}|$, $\Delta_{ijk} = |z_{ijk} - z_{i-1jk}|$. После возведения в квадрат и элементарных преобразований получим:

$$S_j^\Delta = S_j^d + \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{q} (z_{i-1jk} - z_{i-1k})^2 + 2 \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{q} |z_{ijk} - z_{ik}| |-z_{i-1jk} + z_{i-1k}|.$$

Здесь вторая и третья суммы положительны, и из сходимости величины S_j^Δ следует сходимость и величины S_j^d.

Замечание 2. Пусть j-я неисправность может быть диагностирована с помощью функционала S_j^d, т.е. существует число M_j такое, что $S_j^d \leq M_j$

и $S_J^d > M_j$ для некоторого $J \neq j$. Тогда эта неисправность может быть диагностирована и с помощью функционала S_j^{Δ}, в котором теперь $\Delta_{ik} = = z_{ik} - z_{i-1k}$ с числом $\overline{M_j} = 4M_j$.

Таким образом, из сходимости функционала S_j^d к числу, меньшему M_j, следует сходимость функционала S_j^{Δ} к числу, меньшему $4M_j$, что и является диагностированием j-й неисправности.

II. Если время диагностирования τ заранее не задано, то для каждой из систем (3) по изложенной процедуре можно выбрать свои числа N_j, M_j и τ_j такие, при которых $l_j = 1$. В этом случае для любых $N > \max_j N_j$ и $\tau > \max_j \tau_j$ выполняется условие $l_j = 1$, т.е. диагностирование неисправностей при выбранных значениях N и τ осуществляется однозначно.

III. В качестве исходной точки начала процесса диагностирования ранее была выбрана точка выхода траектории вектора контроля на поверхность контроля, т.е. сначала решалась задача о наличии неисправности, а затем — задача диагностирования. Траектории систем с неисправностями из априорного списка на рассматриваемом интервале времени встречаются с поверхностью контроля. Такой подход не всегда бывает эффективным способом решения задачи о наличии неисправности в системе. Это проявляется в тех случаях, когда рассматриваются неисправности, не ведущие к нарушению устойчивости системы. Траектории систем с такими неисправностями могут не выходить на поверхность контроля достаточно длительное время или не выходить на нее вообще.

Поэтому в некоторых случаях целесообразно отказаться от использования поверхности контроля и строить алгоритмы непрерывной экспресс-диагностики. Суть такой диагностики состоит в том, что алгоритм диагностирования периодически включается в определенные моменты времени и работает на определенном временном интервале. Моменты включения алгоритма диагностирования и интервалы времени его работы могут быть отработаны заранее или в процессе движения объекта.

Рассмотренные выше алгоритмы диагностирования позволяют решать задачу диагностики систем управления при непрерывной экспресс-диагностике в случае диагностики только опорных неисправностей и таких, которые могут возникнуть в их окрестностях и не предусмотрены априорным списком.

IV. Набор функций $f_j(x, t)$ в (3) может содержать элементы с неполной информацией. Недоопределенность описания возникает в связи с тем, что законы изменения некоторых элементов в (3) могут отличаться от законов, предусмотренных в классе возможных неисправностей, и эти законы неизвестны.

В [1] дано определение и проведено математическое моделирование окрестностей опорных неисправностей, которые близки к траекториям вектора состояния объекта с опорной неисправностью и с неисправностью, произошедшей в окрестности опорной неисправности. Если окрестности опорных неисправностей для данного датчика пересекаются, то большее влияние на неисправность, произошедшую в области пересечения окрестностей, будет оказывать та опорная неисправность, у которой наблюдается бóльшая близость траекторий [4, 11].

Следовательно, не предусмотренные априорным списком неисправности, произошедшие в окрестностях опорных неисправностей, с помощью рассмотренных алгоритмов можно диагностировать как опорные неисправности. Алгоритмы не позволят выявить конкретную неисправность, но диагностируют одну из опорных неисправностей, в чьей достаточно малой окрестности произошла конкретная неисправность.

V. Рассмотрим другие функционалы, близкие к (7) и позволяющие решать задачу диагностирования динамических управляемых систем в аналогичных или несколько отличных от уже рассмотренных условиях [12—14].

Предположим, что произошла неисправность, траектория вышла на поверхность контроля π_k и далее, в течение времени τ, получены значения $x_0, x_1, ..., x_N$. Надо проверить полную систему l возможных ситуаций: j-я ситуация $(j=1, ..., l)$ — это утверждение о том, что траектория $x(t)$ есть траектория j-й системы (2), т.е. $x \equiv x_j$ при условии $x_{0_j} = x_0$.

Рассмотрим следующие l функционалов (см. (10)) от $x_0, x_1, ..., x_N$, $\Delta_1 x_j, ..., \Delta_N x_j$:

$$S_j^N = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \left| x_{ik} - x_{i-1k} - \Delta_i x_{jk} \right|^2, \; j=1, ..., l, \tag{12}$$

где $\Delta_i x_{jk}$ — приращение решения j-й системы (2) от начального значения x_{i-1} на отрезке времени $(i-1)\tau / N \le t \le i\tau / N$.

Смысл функционала (12) состоит в следующем. Величина S_j^N характеризует среднеквадратичное отклонение ожидаемой траектории от траектории, реализуемой в действительности, т.е. с помощью функционала (12) осуществляется сравнение полей направления действительной и ожидаемых траекторий динамической управляемой системы (1).

Функционалы (7) и (12) очень похожи, удовлетворяют условиям предельной теоремы диагностирования и с помощью вытекающих из нее алгоритмов конструктивно решают задачу диагностики динамических управляемых систем в случае достаточной малости ошибок траекторных измерений. Это распространяется и на случай меньшей размерности вектора диагностирования (6), когда

$$S_j^N = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{q} \left| z_{ijk} - z_{ik} \right|^2, \; q < n \,, \tag{13}$$

или

$$S_j^N = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{q} \left| z_{ik} - z_{i-1k} - \Delta_i z_{jk} \right|^2, \; q < n \,, \tag{14}$$

поскольку компоненты вектора диагностирования несут достаточную информацию о характере функций f_j $(j = 1, ..., l)$ в правых частях уравнений (2).

Суммируемые разности в функционалах (7) и (12)—(14) в случае достаточно малых расхождений действительной и ожидаемой траекторий могут оказаться малыми. В некоторых случаях целесообразно использовать видоизмененный функционал. Запишем такой функционал для случая (12), сохранив прежнее обозначение:

$$S_j^N = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \left| x_{ijk} - x_{i-1k} - \Delta_i x_{jk} \right|^2, \quad j = 1, ..., l. \tag{15}$$

Для функционала (15) справедлива сформулированная выше теорема диагностирования и вытекающие из нее алгоритмы. Однако в (15) фактически осуществляется численное дифференцирование измеренных значений на каждом шаге и суммирование модулей отклонений. Даже если ошибки измерений (шумы) малы, при суммировании модулей отклонений может получиться значительная случайная ошибка.

Вместо суммирования в (15) модулей полей направлений, рассмотрим суммы самих отклонений:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} (\overline{x_{ik}} - \overline{x_{i-1k}} - \Delta_i x_{jk}), \tag{16}$$

где $\bar{x}$ — измеренные значения действительной траектории динамической управляемой системы. Функционал (16) с точностью до малых ошибок сводится к интегралу по траекториям

$$J_{gj} = \int_{\tau_0}^{\tau} (f_g(x(t)) - f_j(x(t)))\, dt,$$

где индексом g обозначены измеренные значения действительной траектории, и разделение траекторий с помощью функционала (16) осуществляется однозначно.

Следует заметить, что в функционалах можно использовать нормированные величины, например,

$$S_j^N = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{q} \left| z_{ijk} - z_{ik} \right|^2 \frac{1}{z_{ik}^2}.$$

Таким образом, можно сформулировать расширенную постановку задачи диагностирования, решение которой осуществимо с помощью предложенных алгоритмов [1, 7].

Задача диагностирования в случае траекторных измерений с ошибкой [15, 16]. На практике решение задачи контроля и поиска неисправностей сопровождается наличием случайных возмущений и, в частности, случайных возмущений, накладываемых на вектор диагностирования, который формируется из измеряемых координат вектора состояния. Задача контроля для случая траекторных измерений с ошибкой сформулирована и решена ранее с достаточной полнотой [7]. Сформулируем некоторые промежуточные результаты, показывающие, что и задача диагностирования в случае траекторных измерений с ошибкой может быть решена однозначно. Сначала в рамках теоремы диагностирования дадим оценку погрешности в случае траекторных измерений с ошибкой, ограниченной по модулю.

Полученные оценки справедливы и в случае, если в рассмотрение вводится вектор диагностирования $z(t)$, составленный из измеряемых координат вектора состояния. На доказательстве полученных оценок при выборе числа измерений фазовых траекторий на интервале времени $[0, \tau]$ останавливаться не будем, так как это можно сравнительно просто сделать в рамках доказательства теоремы диагностирования. Перейдем к рассмотрению общего подхода к диагностике в случае траекторных измерений с ошибкой.

Рассмотрим несколько видоизмененный функционал (14), который для простоты запишем в виде

$$S_{gj} = \sum_{i=1}^{N} \left| \overline{x_i} - \overline{x_{i-1}} + \Delta_i x_j \right|, \ j = 0, \ldots, l, \tag{17}$$

где $\Delta_i x_j$ описывается общей одношаговой формулой

$$\Delta_i x_j = h \Phi_j (\overline{x_{i-1}}, h) \tag{18}$$

и формулой Эйлера, как наиболее простой:

$$\Phi_j (\overline{x_{i-1}}, h) = f_j (\overline{x_{i-1}}). \tag{19}$$

Для измеренных значений введем обозначения

$$\bar{x}(t) = x(t) + \xi(t), \tag{20}$$

где $x(t)$ — действительное положение системы в момент времени t; $\xi(t)$ — ошибки измерений, ограниченные по модулю

$$|\xi(t)| \le \zeta(t) \tag{21}$$

заданными функциями времени $\zeta(t)$.

В соответствии с (18)—(20) составим суммы (17) в виде

$$S_{gj} = \sum_{i=1}^{N} \left| x_i - x_{i-1} + \xi_i - \xi_{i-1} - hf_j\,(x_{i-1} + \xi_{i-1}) \right|. \tag{22}$$

Разложение функции f_j, $j = 0, \ldots, l$, из (22) представим в виде

$$f_j(x_{i-1} + \xi_{i-1}) = f_j(x_{i-1}) + \left.\frac{\partial f_j}{\partial x}\right|_{\xi^*_{i-1}} \xi_{i-1}, \tag{23}$$

где значение ξ^*_{i-1} лежит на отрезке прямой, соединяющей точки x_{i-1} и $x_{i-1} + \xi_{i-1}$. Сумму (22) с учетом (23) запишем в следующем виде:

$$S_{gj} = \sum_{i=1}^{N} \left| x_i - x_{i-1} - hf_j\,(x_{i-1}) + \xi_i - \left(E + h \left.\frac{\partial f_j}{\partial x}\right|_{\xi^*_{i-1}} \right) \xi_{i-1} \right|, \tag{24}$$

где E — единичная матрица. Учтем следующее приближение в разложении и оценим его влияние на сумму (24), т.е. оценим долю выполненного усечения:

$$x_i - x_{i-1} = hf_g\,(x_{i-1}) + \frac{h^2}{2}\, f'_g(x(t))\big|_{t=t_i^*}, \tag{25}$$

где t_i^* — некоторая точка между значениями t_{i-1} и t_i. Подставив (25) в (24), получим

$$S_{gj} = \sum_{i=1}^{N} \left| h\,(f_g\,(x_{i-1}) - f_j\,(x_{i-1})) + \frac{h^2}{2} f'_g(x(t))\big|_{t_i^*} + \xi_i - \left(E + h \left.\frac{\partial f_j}{\partial x}\right|_{\xi^*_{i-1}} \right) \xi_{i-1} \right|. \tag{26}$$

Рассмотрим два случая.

1. Пусть j совпадает с действительным функциональным состоянием рассматриваемого объекта, т.е. $j = g$. В этом случае

$$S_{gj} = \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{h^2}{2} f'_g(x(t))\big|_{t_i^*} + \xi_i - \left(E + h \left.\frac{\partial f_j}{\partial x}\right|_{\xi^*_{i-1}} \right) \xi_{i-1} \right|. \tag{27}$$

Считается, что функции f_j дифференцируемы и имеют все непрерывные частные производные при любом $j=0,\dots,l$. Поэтому, используя теорему о дифференцировании сложной функции и учитывая определение нормы матрицы и линейность отображения, задаваемого матрицей, получаем следующую оценку для величины $|f_g'(x(t))|$:

$$\left|\frac{df_g(x(t))}{dt}\right|_{t_i^*}\left|=\left|\frac{\partial f_g}{\partial t}\right|_{x_i^*}\right|=\left|\frac{\partial f_g}{\partial x}\right|_{x_i^*} f_g(x_i^*)\right|\le \max_{x\in D^*}\left(\left|\frac{\partial f_g}{\partial x}\right|_x\right|\left|f_g(x)\right|\right)\le L_g<\infty$$

и оценку для члена, представляющего ошибку усечения:

$$\left|\frac{h^2}{2}f_g'(x(t))|_{t_i^*}\right|\le\frac{h^2}{2}L_g. \tag{28}$$

Здесь x_i^* — некоторая точка траектории, соответствующая моменту времени $t=t_i^*$; D^* — замкнутая область, содержащая все отрезки траектории от τ_0 до τ; $L_g=\max\limits_{x\in D^*}|f_g'(x)|$.

Дадим теперь оценку ошибки измерения. Поскольку величины $|f_g|$ и $\left\|\frac{\partial f_g}{\partial x}\right\|$ ограничены в области D^*, ошибка измерения оценивается так:

$$\left|h\frac{\partial f_g}{\partial x}\right|_{\xi_{i-1}^*}\xi_{i-1}\right|\le h\left\|\frac{\partial f_g}{\partial x}\right\|_{D^*}\xi_{i-1}\le hl_g\zeta_{\max},\ \zeta_{\max}=\max_{[0,\tau]}\zeta(t). \tag{29}$$

Максимум $l_g=\max\limits_{x\in D^*}\left\|\frac{\partial f_g}{\partial x}\right\|$ существует, так как D^* — замкнутая область и f_g — регулярная функция. По крайней мере, выполнено неравенство

$$\left\|\frac{\partial f_g}{\partial x}\right\|\le\sqrt{\sum_{\kappa,p}\left|\frac{\partial f_{g\kappa}}{\partial x_p}\right|^2}.$$

В силу (29) будет ограниченной ошибка одного шага измерения:

$$\left|\xi_i-\left(E+h\frac{\partial f_g}{\partial x}\right|_{\xi_{i-1}^*}\right)\xi_{i-1}\right|\le|\xi_i|+\left|\left(E+h\frac{\partial f_g}{\partial x}\right|_{\xi_{i-1}^*}\right)\xi_{i-1}\right|\le|\xi_i|+|\xi_{i-1}|+hl_g\zeta_{\max}\le$$

$$\le 2\zeta_{\max}+hl_g\zeta_{\max}. \tag{30}$$

В силу (28) и (30) получим оценку суммы (27) (так как $Nh=\tau$):

$$S_{gj}\le N\frac{h^2}{2}L_g+2N\zeta_{\max}+Nhl_g\zeta_{\max}=\frac{\tau}{2}L_gh+2\tau\zeta_{\max}\frac{1}{h}+\tau l_g\zeta_{\max}. \tag{31}$$

Из (31) следует, что в рассматриваемом случае $S_{gj} \to \infty$ при $h \to \infty$ вследствие накопления модулей ошибки измерения. А слагаемое $\tau\, l_g \zeta_{\max}$ ошибки измерения при $h \to \infty$ составляет все меньшую и меньшую часть величины S_{gj}.

2. Пусть номер системы j не совпадает с действительным функциональным состоянием объекта, т.е. $j \neq g$. В этом случае в соответствии с (26)

$$\left| h(f_g(x_{i-1}) - f_j(x_{i-1})) + \frac{h^2}{2} f_g'(x)\big|_{t_i^*} \right| \leq hL_{gj} + \frac{h^2}{2} L_g$$

и, значит,

$$S_{gj} \leq NhL_{gj} + N\frac{h^2}{2} L_g + 2N\zeta_{\max} + Nhl_g\zeta_{\max} = \tau L_{gj} + \frac{\tau}{2} L_g h +$$

$$+ 2\tau\zeta_{\max} \frac{1}{h} + \tau l_g \zeta_{\max}, \tag{32}$$

где $L_{gj} = \max\limits_{x \in D^*} |f_g(x) - f_j(x)|$. Таким образом, и в этом случае засчет накопления ошибки измерения в (32) $S_{gj} \to \infty$ при $h \to \infty$. Ошибка усечения в случае $j \neq g$ стремится к $\tau\,(L_{gj} + l_g \zeta_{\max})$.

Поскольку ошибка измерения стремится к ∞ при $N \to \infty$, а ошибка усечения при $N \to \infty$ составляет все меньшую и меньшую часть величины S_{gj}, при $h \to 0$ вероятность разделения действительной траектории объекта с произошедшей неисправностью и траекторий j-й системы стремится к нулю.

Возникает задача о выборе такого наименьшего значения $h = h^*$, при котором еще возможно разделение траекторий. В соответствии с (31) минимум

$$\min_h S_{gj} = \min_h \tau \left(\frac{1}{2} L_g h + 2\frac{\zeta_{\max}}{h} + l_g \zeta_{\max} \right) = \tau \left(\sqrt{\frac{\zeta_{\max}}{L_g}} + \sqrt{\frac{L_g}{\zeta_{\max}}} + l_g \zeta_{\max} \right)$$

достигается при $h = \bar{h} = 2\sqrt{\zeta_{\max} / L_g}$. Значение наилучшего номера $N = N^*$ соответственно будет $N = \bar{N} = 2\tau\sqrt{L_g / \zeta_{\max}}$.

Таким образом, и в случае траекторных измерений с ошибкой, ограниченной по модулю известной функцией времени, можно для каждого $j = 1, \ldots, l$ в соответствии с (17) найти такие величины S_{gj}, $M_j^* = \max\limits_{x_0^j \in \pi_k^j} S_{gj}$, $h_j^* = \min\limits_h S_{hj}$, N_j^*, τ_j^*, что траектории систем с номерами $j = 1, \ldots, l$ с помощью алгоритмов диагностирования будут разделяться однозначно.

Вместо сумм (17) рассмотрим суммы самих отклонений. Составим следующие суммы:

$$S_{gj}=\sum_{i=1}^{N}(\overline{x_i}-\overline{x_{i-1}}-hf_j\overline{(x_{i-1})})=(\overline{x_N}-\overline{x_0})-\sum_{i=1}^{N}hf_j\overline{(x_{i-1})}=$$

$$=(x_N-x_0)+(\xi_N-\xi_0)-\sum_{i=1}^{N}h\left(f_j(x_{i-1})+\left.\frac{\partial f_j}{\partial x}\right|_{x_{i-1}^*}\xi_{i-1}\right)=$$

$$=\left(x_N-x_0-\sum_{i=1}^{N}hf_j(x_{i-1})\right)+\left(\xi_N-\xi_0-\sum_{i=1}^{N}h\left.\frac{\partial f_j}{\partial x}\right|_{x_{i-1}^*}\xi_{i-1}\right). \qquad (33)$$

Величина $\sum_{i=1}^{N}hf_j(x_{i-1})$ в (33) есть интегральная сумма. Разлагая ее на каждом из интервалов времени $[t_{i-1},t_i]$ в ряд Тейлора и затем суммируя, получаем

$$\sum_{i=1}^{N}hf_j(x_{i-1})=\int_{\tau_0}^{\tau}f_j(x(t))\,dt-\sum_{i=1}^{N}\frac{h^2}{2}\left.\frac{\partial f_j}{\partial x}\right|_{x_{i-1}^{**}}f_j(x_{i-1}^*),$$

где x_{i-1}^{**} — набор N некоторых «средних точек». Следовательно, возвращаясь к (33), также получаем

$$S_{gj}=\left(x_N-x_0-\int_{\tau_0}^{\tau}f_j(x(t))\,dt+\sum_{i=1}^{N}\frac{h^2}{2}\left.\frac{\partial f_j}{\partial x}\right|_{x_{i-1}^{**}}f_j(x_{i-1}^*)\right)+$$

$$+\left(\xi_N-\xi_0-\sum_{i=1}^{N}h\left.\frac{\partial f_j}{\partial x}\right|_{x_{i-1}^*}\xi_{i-1}\right)=\int_{\tau_0}^{\tau}(f_g(x(t))-f_j(x(t)))\,dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\frac{h^2}{2}\left.\frac{\partial f_j}{\partial x}\right|_{x_{i-1}^{**}}f_j(x_{i-1}^*)+\left(\xi_N-\xi_0-\sum_{i=1}^{N}h\left.\frac{\partial f_j}{\partial x}\right|_{x_{i-1}^*}\xi_{i-1}\right). \qquad (34)$$

Поскольку $|f_j|$ и $\left\|\frac{\partial f_j}{\partial x}\right\|$ ограничены, ошибка усечения (в случае $j=g$) в (34) стремится к нулю при $h\to 0$, а ошибка измерения ограничена. Ошибка измерения при уменьшении величины h, также как и при уменьшении номера N, будет уменьшаться. При $j\neq g$ ошибка измерения остается такой же, а ошибка усечения при $h\to 0$ стремится к значению

$$I_{gj}=\int_{\tau_0}^{\tau}(f_g(x(t))-f_j(x(t)))\,dt\,. \qquad (35)$$

Таким образом, $S_{gj} = I_{gj} + \overline{\zeta}$. Если $I_{gj} \gg \overline{\zeta}$, то разделение траекторий с помощью функционала (35) и приведенных выше алгоритмов будет осуществляться однозначно.

Рассмотрим случай траекторных измерений с шумом. До сих пор предполагалось, что ошибка измерения $\xi(t)$ в (20) ограничена по модулю заданной функцией времени (21). Предположим теперь, что эта ошибка является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с дисперсией σ^2. Оценим дисперсию случайной ошибки измерения:

$$D\left(\xi_i - \left(E + h\frac{\partial f_g}{\partial x}\bigg|_{\xi^*_{i-1}}\right)\xi_{i-1}\right) = D\xi_i + D\left(E + h\frac{\partial f_g}{\partial x}\bigg|_{\xi^*_{i-1}}\right)\xi_{i-1} \leq$$

$$\leq \sigma^2 + \sigma^2(1 + hl_g)^2 \geq 2\sigma^2. \qquad (36)$$

Следовательно, средняя ошибка одного шага измерения имеет порядок $\sigma\sqrt{2}$. Учитывая (28) и (36), можно провести следующую оценку:

$$S_{gg} \leq \sum_{i=1}^{N} |x_i - x_{i-1} - hf_g(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^{N}\left|\xi_i - \left(E + h\frac{\partial f_g}{\partial x}\bigg|_{\xi^*_{i-1}}\right)\xi_{i-1}\right| \cong$$

$$\cong N\left(\frac{h^2}{2}L_g + \sigma\sqrt{2}\right) = \tau\left(\frac{1}{2}L_g h + \frac{1}{h}\sigma\sqrt{2}\right). \qquad (37)$$

Как видно из выражения (37), $S_{gg} \to \infty$ при $h \to 0$.

В случае $j \neq g$ в соответствии с (26) можно провести оценку следующего вида:

$$S_{gj} \cong NhL_{gj} + N\frac{h^2}{2}L_g + N\sigma\sqrt{2 + 2hl_g + h^2 l_g^2} = \tau L_{gj} + \frac{1}{2}\tau h L_g +$$

$$+ \frac{1}{h}\tau\sigma\sqrt{2 + 2hl_g + h^2 l_g^2}.$$

Следовательно, и в этом случае за счет накопления случайной ошибки измерения $S_{gj} \to \infty$ при $h \to 0$. Ошибка усечения при этом стремится к τL_{gj}. Поскольку средняя ошибка измерения стремится к бесконечности при $N \to \infty$, а ошибка усечения при $N \to \infty$ составляет все меньшую и меньшую часть величины S_{gj}, при $h \to 0$ вероятность разделения траекторий систем стремится к нулю.

Выберем такое наименьшее значение $h = h^*$, при котором еще возможно разделение траекторий. Оценим порядок наилучшего значения $h = h^*$. Минимум величины

$$S_{gg} \cong \min_h \tau\left(\frac{h}{2}L_g + \frac{1}{h}\sigma\sqrt{2}\right) = \tau\sqrt{2\sqrt{2}\sigma L_g}$$

достигается при $h = h^* \cong \sqrt{2\sqrt{2}\sigma / L_g}$. Соответственно, порядок наилучшего номера N таков: $N = N^* \cong \tau\sqrt{L_g / 2\sqrt{2}\sigma}$.

Таким образом, дана оценка наилучших значений $h = h^*$, $N = N^*$ и, значит, $\tau = \tau^*$. Если при этих наилучших значениях ошибка усечения достаточно мала, то диагностика неисправностей с помощью функционалов (17) и, значит, функционалов (24), в случае траекторных измерений с ошибкой, позволяет получить в некотором смысле наилучший апостериорный набор возникших неисправностей. Если в случае точных траекторных измерений, пользуясь в алгоритмах диагностирования константами M_j или S_g, невозможно было отбросить верную гипотезу, то в случае траекторных измерений с ошибкой при любом выборе констант алгоритма диагностирования всегда будет существовать такая возможность.

Зададимся достаточно малой ненулевой допустимой вероятностью ε. Для разделения траекторий выберем константы M_j такие, что для любой траектории j-й системы выполнено неравенство $P\{S_{jj} \geq M_j\} < \varepsilon$, т.е. вероятность ложного срабатывания должна находиться в допустимых границах. При этом в случае траекторных измерений с ошибкой будем пользоваться теми же алгоритмами диагностирования, что и в случае точных траекторных измерений.

Теперь рассмотрим метод интегралов в случае траекторных измерений с ошибкой. Как было указано выше, ошибка усечения в (34) ($j = g$) не превосходит $\tau L_g h/2$, и эта ошибка стремится к нулю при $h \to 0$. Средняя ошибка обусловлена суммой $h\sum_{i=1}^{N} \left.\frac{\partial f_g}{\partial x}\right|_{\xi^*_{i-1}} \xi_{i-1}$ и, согласно теореме о сложении дисперсий независимых случайных величин, будет меньше или равна $h\sigma\sqrt{N} l_g$, а следовательно, средняя ошибка измерения не будет превышать величины

$$\sigma\sqrt{2} + h\sigma\sqrt{N} l_g = \sigma\sqrt{2} + \sigma\sqrt{\tau h} l_g \tag{38}$$

и будет стремиться к $\sigma\sqrt{2}$ при $h \to 0$.

Из формулы (38) видно, что средняя ошибка измерения зависит от постоянного слагаемого $\sigma\sqrt{2}$ и от величины $\sigma\sqrt{\tau h} l_g$. С уменьшением значения h ошибка, обусловленная шумом, уменьшается, и можно ожидать, что при $h < 1/\tau\, l_g^2$ будут достигнуты достаточно хорошие результаты по разделению систем.

В случае $j \neq g$, как следует из выражения (34), для величины S_{gj} ошибка измерения остается такой же, а ошибка усечения при $h \to 0$ стремится к интегралу (35). При $N \to 0$ будет $S_{gg} \to \overline{\overline{\zeta}}$, где $\overline{\overline{\zeta}}$ — случайная величина, распределенная по нормальному закону с дисперсией $2\sigma^2$, а $S_{gj} \to I_{gj} + \overline{\overline{\zeta}}$. Если величина I_{gj} значительно больше дисперсии случайной величины $\overline{\overline{\zeta}}$, то разделение траекторий систем с помощью интеграла (35), в случае траекторных измерений с шумом, будет осуществляться с высокой точностью. Константы M_j могут быть найдены при условии $P\{|S_{jj}| \geq M_j\} < \varepsilon$.

A problem of differential diagnosis of functional state of the control objects possesing a module structure and a finite set of possible failures is reduced to two independent successively decidable problems: a problem of control (establishing the criteria of failures availability in the system) and diagnosis problem (search for a failure). A principal realizability of solution of the problem of differential diagnosis in the case of exact trajectory measurements with an error at the level of mathematical models is shown.

1. *Борисенок И. Т., Шамолин М. В.* Решение задачи дифференциальной диагностики // Фундаментальная и прикладная математика. — 1999. — **5.** — Вып. 3. — С. 775—790.
2. *Борисенок И. Т., Шамолин М. В.* Алгоритмы решения задачи дифференциальной диагностики // Тез. докл. матем. конф. «Еругинские чтения—III» (Брест, 14—16.05.1996). — Брест, 1996. — С. 102.
3. *Борисенок И. Т., Шамолин М. В.* Существование и единственность решения общей задачи дифференциальной диагностики // Тез. докл. V Междунар. совещ.-семинара «Инженерно-физические проблемы новой техники» (Москва, 19—22.5.1998). — М. : Изд-во МГТУ, 1998. — С. 6, 7.
4. *Окунев Ю. М., Парусников Н. А.* Структурные и алгоритмические аспекты моделирования для задач управления. — М. : Изд-во МГУ, 1983.
5. *Борисенок И. Т.* К вопросу о дифференциальной теории восстановления. Некоторые вопросы управления и устойчивости механических систем // Науч. тр. № 22 Ин-та механики МГУ им. М. В. Ломоносова. — М. : Изд-во МГУ, 1973. — С. 101—108.
6. *Борисенок И. Т., Беляков В. И.* Построение областей допустимых отклонений для задачи контроля // Тез. докл. IV Всес. совещ. по технич. диагностике. Ч. 2. — Черкассы, 1979; М. : Наука, 1979. — С. 24—26.
7. *Борисенок И. Т., Шамолин М. В.* Решение задачи дифференциальной диагностики методом статистических испытаний // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2001. — № 1. — С. 29—31.
8. *Жуков В. П.* О достаточных и необходимых условиях асимптотической устойчивости нелинейных динамических систем // Автоматика и телемеханика. — 1994. — № 3. — С. 24—36.
9. *Благодатских В. И., Филиппов А. Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление // Сб. обзорных статей «Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы». —Тр. МИАН СССР. Ч. 2. — **169**. — М. : Наука, 1985. — С. 194—252.
10. *Чикин М. Г.* Системы с фазовыми ограничениями // Автоматика и телемеханика. — 1987. — № 10. — С. 38—46.
11. *Корноушенко Е. К., Пылаев Н. К.* Передаточные числа и диагностирование линейных систем // ДАН СССР. — 1988. — **300,** № 3. — С. 559—561.

12. *Мироновский Л. А.* Диагностирование динамических звеньев ГПС // Судостроительная промышленность. Сер. Системы автоматизации проектирования, производства и управления. Вып. 8. — М. : Наука, 1987. — С. 23—31.
13. *Мироновский Л. А.* Взаимосвязь параллельной и сбалансированной канонических форм // Электрон. моделирование. — 1989. — № 6. — С. 8—10.
14. *Мироновский Л. А.* Функциональное диагностирование линейных динамических систем // Автоматика и телемеханика. — 1979. — № 8. — С. 120—128.
15. *Шамолин М. В.* Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. М. : Изд-во «Экзамен», 2003. — 256 с.
16. *Шамолин М. В.* Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. Издание 2-е, переработанное и дополненное. — М. : Изд-во «Экзамен», 2007. — 320 с.

Поступила 22.07.08;
после доработки 02.02.09

ШАМОЛИН Максим Владимирович, д-р физ.-мат. наук, профессор, вед. науч. сотр. Ин-та механики МГУ им. Ломоносова. В 1988 г. окончил Московский госуниверситет. Область научных исследований — классическая механика, дифференциальная и топологическая диагностика, качественная теория динамических систем, алгебраическая и дифференциальная топология, геометрия.