НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ ПОЛНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО СО СРЕДОЙ

Шамолин М.В.
Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
shamolin@imec.msu.ru, shamolin@rambler.ru

1. Введение

Развиваются качественные методы в теории неконсервативных систем, возникающих в таких областях науки, как динамика твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой, теория колебаний и др. Данный материал может быть интересен как специалистам по качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, динамики твердого тела, так и механики жидкости и газа, поскольку в работе используются свойства движения твердого тела в среде в условиях струйного обтекания.

Получены случаи полной интегрируемости неконсервативных динамических систем, обладающих нетривиальными симметриями. При этом почти во всех случаях интегрируемости каждый из первых интегралов выражается через конечную комбинацию элементарных функций, являясь одновременно трансцендентной функцией своих переменных. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда после продолжения данных функций в комплексную область у них имеются существенно особые точки. Последний факт обуславливается наличием в системе притягивающих и отталкивающих предельных множеств (как, например, притягивающих и отталкивающих фокусов). Обнаружены также новые интегрируемые случаи движения твердого тела, в том числе в классической задаче о движении сферического маятника, помещенного в поток набегающей среды при наличии линейного по угловой скорости демпфирования со стороны среды.

2. Модельные предположения

Гипотезы, приведенные в [1] и касающиеся свойств среды, нашли свое отражение в построении пространственной динамической модели взаимодействия среды с однородным осесимметричным телом. В этой связи появляется возможность формализации модельных предположений и получение полной системы уравнений. Предположим, что:

1. Все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму круглого диска P (Рис. 1).

2. Поскольку взаимодействие происходит по законам струйного обтекания, сила $\mathbf{S}$ этого взаимодействия направлена по нормали к диску, причем точка N приложения этой силы определяется лишь одним параметром — углом атаки α, который измеряется между вектором скорости $\mathbf{v}$ точки D пластины и внешней нормалью в этой точке (прямая CD). Таким образом, $DN = R(\alpha)$.

3. Величину силы сопротивления S примем в виде

$$S = s_1 v^2,$$

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 08-01-00231-а).

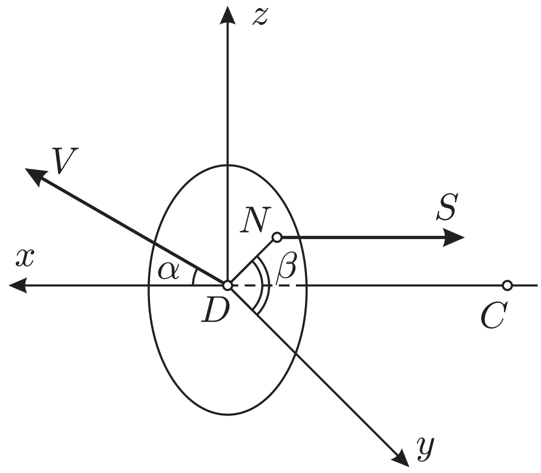

Рис. 1. *Пространственная модель динамического воздействия среды на тело*

где v — модуль скорости точки D, а коэффициент сопротивления s_1 является функцией только угла атаки: $\alpha:\ s_1 = s_1(\alpha)$.

4. По прямой CD на тело может действовать дополнительная сила $\mathbf{T}$, которую назовем "силой тяги". Введение этой силы используется для обеспечения некоторых заданных классов движений в (при этом $\mathbf{T}$ — реакция возможных наложенных связей). В случае отсутствия внешней силы $\mathbf{T}$ тело совершает пространственное свободное торможение в сопротивляющейся среде [1], [2].

5. Связанную с телом систему координат обозначим через $Dxyz$. В данной системе тензор инерции имеет диагональный вид:

$$\mathrm{diag}\{I_1, I_2, I_2\}.$$

6. Для описания положения тела в пространстве выберем декартовы координаты (x_0, y_0, z_0) точки D и три угла (θ, ψ, ϕ), которые определяются подобно навигационным углам (ср. с [1]). При этом фазовое состояние системы характеризуется двенадцатью величинами:

$$(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0; \theta, \psi, \phi; x_0, y_0, z_0; \theta, \psi, \phi).$$

Рассмотрим сферические координаты (v, α, β) конца вектора скорости точки D, в которых угол β отсчитывается от оси Dy в плоскости P до прямой DN.

Фазовое состояние системы будем определять через функции

$$(v, \alpha, \beta, \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z; x_0, y_0, z_0, \theta, \psi, \phi),$$

а первые шесть функций рассматривать в качестве квазискоростей системы. Здесь набор величин $(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ определяется как $\Omega = \Omega_x \mathbf{e}_x + \Omega_y \mathbf{e}_y + \Omega_z \mathbf{e}_z$, где Ω — вектор абсолютной угловой скорости твердого тела.

Ввиду того, что обобщенные силы не зависят от положения тела в пространстве, координаты $(x_0, y_0, z_0, \theta, \psi, \phi)$ являются циклическими. Это позволяет рассматривать динамическую часть уравнений движения в качестве независимой подсистемы [1].

Аналогично плоскому случаю введем знакопеременную вспомогательную функцию

$$s(\alpha) = s_1(\alpha)\mathrm{sign}\cos\alpha.$$

3. Динамическая часть уравнений движения

В силу теоремы о движении центра масс в пространстве в проекциях на связанные оси (x, y, z) и теоремы об изменении кинетического момента относительно этих осей, получаем полную систему дифференциальных уравнений, рассмотренную в динамическом пространстве квазискоростей $\mathbb{R}^1_+\{v\} \times \mathbb{T}^2\{\alpha, \beta\} \times \mathbb{R}^3\{\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\}$:

$$\dot{v}\cos\alpha - \dot{\alpha}v\sin\alpha + \Omega_y v\sin\alpha\sin\beta - \Omega_z v\sin\alpha\cos\beta + \sigma(\Omega_y^2 + \Omega_z^2) = T/m - s(\alpha)v^2/m,$$

$$\dot{v}\sin\alpha\cos\beta + \dot{\alpha}v\cos\alpha\cos\beta - \dot{\beta}v\sin\alpha\sin\beta + \Omega_z v\cos\alpha - \Omega_x v\sin\alpha\sin\beta - \sigma\Omega_x\Omega_y - \sigma\dot{\Omega}_z = 0,$$
$$\dot{v}\sin\alpha\sin\beta + \dot{\alpha}v\cos\alpha\sin\beta + \dot{\beta}v\sin\alpha\cos\beta + \Omega_x v\sin\alpha\cos\beta - \Omega_y v\cos\alpha - \sigma\Omega_x\Omega_z - \sigma\dot{\Omega}_y = 0, \quad (1)$$
$$I_1\dot{\Omega}_x = 0,$$
$$I_2\dot{\Omega}_y + (I_1 - I_2)\Omega_x\Omega_z = -z_N s(\alpha)v^2, I_2\dot{\Omega}_z + (I_2 - I_1)\Omega_x\Omega_y = y_N s(\alpha)v^2.$$

Координаты точки N в системе $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ примут вид:

$$(0, y_N(\alpha, \beta), z_N(\alpha, \beta)),\ \ y_N(\alpha, \beta) = R(\alpha)\cos\beta, z_N(\alpha, \beta) = R(\alpha)\sin\beta.$$

Систему (1) можно дополнить кинематическими соотношениями [1].

Выше используются следующие обозначения: σ — расстояние DC, m — масса тела.

В динамическую систему (1) входят функции $R(\alpha), s(\alpha)$, для качественного описания которых используем имеющуюся экспериментальную информацию о свойствах струйного обтекания. Сразу отметим, что для дальнейшего интегрирования системы выберем функции R, s воздействия среды в виде аналитических функций С. А. Чаплыгина [3]:

$$R(\alpha) = A\sin\alpha,\ \ s(\alpha) = B\cos\alpha; A, B > 0. \quad (2)$$

4. Случаи движения тела в среде при наличии некоторой неинтегрируемой связи

Вообще в работе отмечены два класса движений, которые были подвергнуты обстоятельному анализу:

$$v = \mathrm{const}, \quad (3)$$
$$\mathbf{V}_C = \mathrm{const}$$

($\mathbf{V}_C$ — вектор скорости центра масс.)

Выполнение условия (3), а также следующего за ним условия достигается соответствующим выбором управляющей тяги (следящей силы $\mathbf{T}$ [1]).

В данной конкретной работе ограничимся лишь изложением случая (3).

Видно, что система (1) имеет аналитический интеграл вида

$$\Omega_x \equiv \Omega_{x^0} = \mathrm{const}, \quad (4)$$

т.е. обобщенные силы допускают собственное вращение тела около продольной динамической оси симметрии.

Система (1) при условиях (2)–(4) допускает отделение независимой подсистемы четвертого порядка:

$$\dot{\alpha}v\cos\alpha\cos\beta - \dot{\beta}v\sin\alpha\sin\beta + \Omega_z v\cos\alpha - \Omega_{x^0}v\sin\alpha\sin\beta - \sigma\Omega_{x^0}\Omega_y - \sigma\dot{\Omega}_z = 0,$$

$$\dot{\alpha}v\cos\alpha\sin\beta + \dot{\beta}v\sin\alpha\cos\beta + \Omega_{x^0}v\sin\alpha\cos\beta - \Omega_y v\cos\alpha + \sigma\Omega_{x^0}\Omega_z + \sigma\dot{\Omega}_y = 0, \quad (5)$$
$$I_2\dot{\Omega}_y + (I_1 - I_2)\Omega_{x^0}\Omega_z = -z_N s(\alpha)v^2,\ \ I_2\dot{\Omega}_z + (I_2 - I_1)\Omega_{x^0}\Omega_y = y_N s(\alpha)v^2,$$

в которой к постоянным параметрам, указанным выше, добавляется параметр v.

5. Случай нулевой проекции угловой скорости на продольную ось

Рассмотрим траектории движения системы (5) на уровне интеграла (4) при $\Omega_{x^0} = 0$. При этом она примет вид:

$$\dot{\alpha} v \cos\alpha \cos\beta - \dot{\beta} v \sin\alpha \sin\beta + \Omega_z v \cos\alpha - \sigma\dot{\Omega}_z = 0,$$
$$\dot{\alpha} v \cos\alpha \sin\beta + \dot{\beta} v \sin\alpha \cos\beta - \Omega_y v \cos\alpha + \sigma\dot{\Omega}_y = 0,$$
$$I_2\dot{\Omega}_y = -F(\alpha)\sin\beta v^2,\ I_2\dot{\Omega}_y = F(\alpha)\cos\beta v^2,\ F(\alpha) = R(\alpha)s(\alpha).$$

При некоторых условиях рассматриваемая динамическая система четвертого порядка приведется к следующей системе на касательном расслоении к двумерной сфере ($n_0^2 = AB/I_2$). Для этого спроектируем угловую скорость на подвижную систему координат Dz_1z_2 (поворачивая систему Dyz на угол $-\beta$) такую, что

$$z_1 = \Omega_y \cos\beta + \Omega_z \sin\beta,\ z_2 = \Omega_z \cos\beta - \Omega_y \sin\beta,$$

и получим искомую систему в виде

$$\dot{\alpha} = -z_2 + \sigma n_0^2 v \sin\alpha,\ \dot{z}_2 = n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha - z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \dot{z}_1 = z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{6}$$

$$\dot{\beta} = z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{7}$$

Видно также, что у искомой системы имеется независимая подсистема третьего порядка (6).

6. Симметрии векторного поля системы в фазовом пространстве квазискоростей

Векторное поле системы (6) обладает тремя видами симметрий:

1. Центральной симметрией. Такая симметрия возле точек $(\pi k, 0, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, в пространстве $\mathbb{R}^2\{\alpha, z_2, z_1\}$ возникает по причине того, что векторное поле в координатах (α, z_2, z_1) меняет знак при замене
$$\begin{pmatrix} \pi k - \alpha \\ -z_2 \\ -z_1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \pi k + \alpha \\ z_2 \\ z_1 \end{pmatrix};$$
2. Некоторой зеркальной симметрией (НЗС). Такая симметрия относительно плоскостей L_i, $i \in \mathbb{Z}$, где
$$L_i = \{(\alpha, z_2, z_1) \in \mathbb{R}^3 :\ \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi i\},$$
возникает по причине того, что α-составляющая векторного поля системы в координатах (α, z_2, z_1) сохраняется при замене
$$\begin{pmatrix} \pi/2 + \pi i - \alpha \\ z_2 \\ z_1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \pi/2 + \pi i + \alpha \\ z_2 \\ z_2 \end{pmatrix},$$
а z_2- и z_1-составляющие меняют знак;
3. Симметрией относительно плоскости
$$\{(\alpha, z_2, z_1) \in \mathbb{R}^3 :\ z_1 = 0\},$$
а именно, z_2- и α-составляющие векторного поля системы сохраняются при замене
$$\begin{pmatrix} \alpha \\ z_2 \\ z_1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ z_2 \\ -z_1 \end{pmatrix},$$
а z_1-составляющая меняет знак.

7. О трансцендентной интегрируемости системы

Данный параграф посвящен изучению возможностей полного интегрирования рассматриваемой динамической системы (ср. с [1]). В нем приводятся первые интегралы системы (6), (7), выражающиеся через элементарные функции.

Теорема 1. *Система (6) обладает полным набором трансцендентных первых интегралов. Система (6), (7) также вполне интегрируема [1], два первых интеграла которой являются первыми интегралами системы (6).*

Один из первых интегралов системы (6) будет иметь вид

$$\frac{z_2^2 + z_1^2 - \sigma n_0^2 v z_2 \sin\alpha + n_0^2 \sin^2\alpha}{z_1 \sin\alpha} = C_1. \tag{8}$$

8. Поиск дополнительных интегралов системы

Поскольку система (6) обладает переменной диссипацией и является аналитической, для нее удается в явном виде найти два других дополнительных интеграла. Выполнено тождество:

$$u_1 = \frac{1}{2}\{C_1 \pm \mathcal{G}\}.$$

Здесь

$$\mathcal{G} = \sqrt{C_1^2 - 4[u_2^2 - \sigma n_0^2 v u_2 + n_0^2 v^2]},\ u_1 = z_1\tau, u_2 = z_2\tau, \tau = \sin\alpha$$

(для поиска дополнительных интегралов используется трансцендентный первый интеграл (8)). Квадратура для поиска искомого интеграла, связывающего величины u_2 и τ, выглядит как

$$\int \frac{d\tau}{\tau} = \int \frac{(\sigma n_0^2 v - u_2) du_2}{2[u_2^2 - \sigma n_0^2 v u_2 + n_0^2 v^2] - \frac{C_1}{2}(C_1 \pm \mathcal{G})}.$$

Если

$$w_1 = u_2 - \frac{\sigma n_0^2 v}{2},$$

то правая часть в интегрировании примет вид:

$$\int \frac{(\sigma n_0^2 v/2 - w_1) dw_1}{2[w_1^2 - n_0^2 v^2(\sigma^2 n_0^2 - 4)/4] - \frac{C_1}{2}(C_1 \pm \mathcal{G})}.$$

Последняя величина разбивается на части

$$\frac{\sigma n_0^2 v}{2}\int_{(1)} - \int_{(2)},$$

где

$$\int_{(1)} = \int \frac{dw_1}{\mathcal{G}_1},\ \int_{(2)} = \int \frac{1/2 dw_1^2}{\mathcal{G}_1};$$

здесь

$$\mathcal{G}_1 = 2[w_1^2 - n_0^2 v^2(\sigma^2 n_0^2 - 4)/4] - \frac{C_1}{2}(C_1 \pm \mathcal{G}).$$

Аналогичным образом может быть получен и второй дополнительный интеграл, являющийся трансцендентной функцией своих фазовых переменных.

9. Заключение

В данной работе показаны лишь некоторые фрагменты теории, создаваемой автором для изучения интересных классов динамических систем, возникающих в динамике твердого тела. В целом же хотелось бы перечислить основные направления, развиваемые автором касательно к данной проблематике.

Предъявлена относительно простая методика определения безразмерных параметров воздействия среды на твердое тело в условиях квазистационарности. Данная методика успешно применена для изучения движения тел простой формы — круговых цилиндров, входящих в воду.

Разработаны новые качественные методы исследования систем с переменной диссипацией. Получены условия существования бифуркации рождения устойчивых и неустойчивых автоколебаний. Предъявлены признаки отсутствия любых таких траекторий. Теория плоских топографических систем Пуанкаре и систем сравнения распространена на пространственный случай. Предлагается достаточно простая методика доказательства устойчивости по Пуассону незамкнутых траекторий динамических систем. Введены определения относительной структурной устойчивости (относительной грубости) и относительной структурной неустойчивости (относительной негрубости) различных степеней.

Обнаружены новые интегрируемые случаи и семейства фазовых портретов в плоской динамике твердого тела. Качественно исследованы и проинтегрированы некоторые модельные варианты движения тела в сопротивляющейся среде. Указаны первые интегралы соответствующих систем, являющиеся трансцендентными функциями и выражающиеся через элементарные функции. Исследована также задача о свободном торможении. Получены новые двухпараметрические семейства топологически неэквивалентных фазовых портретов. Почти каждый портрет семейства — (абсолютно) структурно устойчив.

Обнаружены новые интегрируемые случаи и семейства многомерных фазовых портретов в пространственной динамике твердого тела. Проинтегрирована по Якоби задача о пространственном движении динамически симметричного закрепленного твердого тела, помещенного в поток набегающей среды. Получено новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов в задаче о пространственном свободном торможении тела. Почти каждый трехмерный портрет семейства является (абсолютно) грубым по Андронову–Понтрягину.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Шамолин М.В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Изд–во "Экзамен", 2007. 256 с.

[2] *Шамолин М.В.* Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. Изд. 2-е, переработанное и дополненное. М.: Изд–во "Экзамен", 2007. 320 с.

[3] *Чаплыгин С.А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // Полн. собр. соч. Т. 1. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. С. 133–135.