УДК 517.925+531.01

НОВЫЕ СЛУЧАИ ПОЛНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ В ДИНАМИКЕ СИММЕТРИЧНОГО ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В НЕКОНСЕРВАТИВНОМ ПОЛЕ

М. В. Шамолин

Работа посвящена поиску новых интегрируемых случаев в динамике четырехмерного твердого тела на $\mathbb{R}^4 \times so(4)$ в неконсервативном поле сил [1–3]. Ранее был предъявлен случай полной интегрируемости уравнений движения динамически симметричного тела при выполнении равенств $I_1 \neq I_2 = I_3 = I_4$ [1]. В данной же работе полностью изучен случай другой логически возможной динамической симметрии.

Пусть четырехмерное твердое тело Ξ с гладкой границей $\partial\Xi$ является динамически симметричным (в некоторой системе координат $Dx_1x_2x_3x_4$ оператор инерции имеет вид: $\mathrm{diag}\{I_1, I_1, I_3, I_3\}$). Таким образом, двумерные плоскости Dx_1x_2 и Dx_3x_4 — плоскости динамической симметрии тела.

Неконсервативная сила $\mathbf{S} = \{S_1, S_2, 0, 0\}$ и координаты точки ее приложения $N = (0, 0, x_{3N}, x_{4N})$ в системе $Dx_1x_2x_3x_4$ вместе с соотношениями

$$S_1 = S\sin\gamma, S_1 = -S\cos\gamma, \gamma = \mathrm{const},\ x_{3N} = R\cos\beta_1, x_{4N} = R\sin\beta_1$$

(γ — угол в плоскости Dx_1x_2, и β_1 — угол в плоскости Dx_3x_4) позволяют получить динамическую часть уравнений движения на $\mathbb{R}^4 \times so(4)$. Если прямая CD (C — центр масс) лежит в плоскости Dx_1x_2, и вектор $\mathbf{DC}$ определяет положение центра масс: $\mathbf{DC} = \{\sigma\sin\gamma, -\sigma\cos\gamma, 0, 0\}$, то вектор скорости $\mathbf{v}_D$ точки D можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{v}_D = \{v\cos\alpha\sin\beta_2, v\cos\alpha\cos\beta_2, v\sin\alpha\cos\beta_1, v\sin\alpha\sin\beta_1\}, \mid \mathbf{v}_D \mid = v$$

(β_2 — угол в плоскости Dx_1x_2).

Пусть Ω — тензор угловой скорости тела, $\Omega \in so(4)$. Та часть уравнений движения, которая отвечает алгебре $so(4)$, имеет следующий вид [4–6]:

$$\dot\Omega\Lambda + \Lambda\dot\Omega + [\Omega, \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M,$$

$\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\},\ \lambda_1 = (-I_1 + I_2 + I_3 + I_4)/2,\ \ldots,\ \lambda_4 = (I_1 + I_2 + I_3 - I_4)/2,$ M — момент внешних сил, действующих на тело в R^4, спроектированный на $so(4)$, [ ] — коммутатор в $so(4)$.

Кососимметрическую матрицу $\Omega \in so(4)$ удобно представлять в следующих естественных координатах:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_3 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ — компоненты угловой скорости в проекциях на $so(4)$.

При вычислении момента внешней силы строим отображение $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow so(4)$, переводящее пару векторов из $\mathbb{R}^4$ в некоторый элемент из алгебры $so(4)$.

Очевидно, что имеются два циклических интеграла: $\omega_1 = \omega_1^0 = \mathrm{const}$, $\omega_6 = \omega_6^0 = \mathrm{const}$, при этом рассматривается динамика системы на нулевых уровнях: $\omega_1^0 = \omega_6^0 = 0$.

Для получения явного вида динамических уравнений определим две функции воздействия среды R и S (используя при этом аналогичную информацию о свойствах движения трехмерных тел [3, 7]):

$$R = R(\alpha) = A \sin\alpha,\ \ S = S_v(\alpha) = Bv^2 \cos\alpha;\ \ A, B > 0.$$

Тогда редуцированные уравнения перепишутся как $(n_0^2 = AB/(I_1 + I_3))$

$$\dot\omega_2 = -n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\cos\gamma,\ \ \dot\omega_3 = -n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\sin\gamma,$$

$$\dot\omega_4 = n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha\cos\beta_1\cos\gamma,\ \ \dot\omega_5 = n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha\cos\beta_1\sin\gamma.$$

Расширим задачу, предположив, что в плоскости Dx_1x_2 действует следящая сила $\mathbf{T}$, проходящая через центр масс . При этом рассмотрим класс движений, при котором выполнены условия (неинтегрируемые связи): $v = \mathrm{const}$, $\beta_2 = \mathrm{const}$ [3].

В результате замены угловых скоростей по формулам

$$z_1 = \omega_3\cos\beta_1 + \omega_5\sin\beta_1,\ \ z_2 = \omega_3\sin\beta_1 - \omega_5\cos\beta_1,$$

$$z_3 = \omega_2\cos\beta_1 + \omega_4\sin\beta_1,\ \ z_4 = \omega_2\sin\beta_1 - \omega_4\cos\beta_1,$$

$$w_1 = -z_1\sin\beta_2 + z_3\cos\beta_2,\ \ w_2 = z_3\sin\beta_2 + z_1\cos\beta_2,$$

$$w_3 = z_2\sin\beta_2 - z_4\cos\beta_2,\ \ w_4 = z_4\sin\beta_2 + z_2\cos\beta_2,$$

у редуцированной системы шестого порядка появляется независимая подсистема третьего порядка

$$\begin{gathered}\dot\alpha = -w_3 + \sigma n_0^2 v\sin\alpha,\\ \dot w_3 = n_0^2 v^2\sin\alpha\cos\alpha\cos(\gamma+\beta_2) - w_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\\ \dot w_1 = w_3 w_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\end{gathered} \tag{1}$$

а также может быть выделена система второго порядка

$$\dot w_4 = -n_0^2 v^2\sin\alpha\cos\alpha\sin(\gamma+\beta_2) + w_1 w_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \ \dot w_2 = -w_4 w_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \tag{2}$$

и уравнение

$$\dot\beta_1 = w_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{3}$$

Как было получено ранее [3], система (1), (3) обладает тремя, вообще говоря, независимыми первыми интегралами следующего вида:

$$\Phi_1(w_1, w_3, \sin\alpha) =$$

$$= \frac{w_1^2 + w_3^2 - \sigma n_0^2 v w_3 \sin\alpha + n_0^2 v^2 \cos(\gamma+\beta_2)\sin^2\alpha}{w_1 \sin\alpha} = C_1 = \mathrm{const} \tag{4}$$

$$\Phi_2(w_1, w_3, \sin\alpha) = C_2 = \mathrm{const} \tag{5}$$

$$\Phi_3(w_1, w_3, \sin\alpha, \beta_1) = C_3 = \mathrm{const} \tag{6}$$

Все три указанных первых интеграла являются трансцендентными функциями своих переменных, выражающимися через элементарные функции [3].

В силу указанных редукций в рассматриваемой системе шестого порядка для полного ее интегрирования достаточно указать еще один первый интеграл, независимый с интегралами (4)–(6). После замены переменных

$$w_* = w_3\sin(\gamma+\beta_2) + w_4\cos(\gamma+\beta_2),\ \ w_{**} = w_1\sin(\gamma+\beta_2) - w_2\cos(\gamma+\beta_2)$$

система (2) может быть приведена к виду

$$\frac{dw_*}{d\beta_1} = -w_{**},\ \ \frac{dw_{**}}{d\beta_1} = w_*,$$

который предполагает наличие аналитического первого интеграла:

$$w_*^2 + w_{**}^2 = C_4 = \mathrm{const}.$$

Итак, исследуемая динамическая система вполне интегрируема в классе, вообще говоря, трансцендентных функций (имеющих существенно особые точки).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 08–01–00231-а).

Литература.

[1] Шамолин М.В. Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде // Доклады РАН. — 2000. — Т. 375. — № 3. — С. 343–346.

[2] Георгиевский Д.В., Шамолин М.В. Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$ // Доклады РАН. — 2001. — Т. 380. — № 1. — С. 47–50.

[3] Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. — М.: Изд–во "Экзамен", 2007. – 352 с.

[4] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979. — 760 с.

[5] Трофимов В.В. Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств // Вестн. Моск. ун–та. Сер. 1. Математика. Механика. 1984, № 6, с. 31–33.

[6] Богоявленский О.И. Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера // ДАН СССР. — 1986. — Т. 287. — № 5. — С. 1105–1108.