УДК 531.14

М.В. Шамолин
Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова
Москва

КАЧЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННОЙ ДИССИПАЦИЕЙ В ДИНАМИКЕ

Построить общую теорию исследования систем обыкновенных дифференциальных уравнений пусть даже и не самого общего вида не представляется возможным. Поэтому данная работа не является очередной попыткой в этом направлении, а лишь обобщает качественные исследования по динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, начатого уже много лет назад.

Результаты предлагаемой работы появились благодаря исследованию прикладной задачи о движении твердого тела в сопротивляющейся среде [1–5], где в том числе были получены полные списки трансцендентных первых интегралов, выраженных через конечную комбинацию элементарных функций. Это обстоятельство позволило провести полный анализ всех фазовых траекторий и указать на те их свойства, который обладали «грубостью» и сохранялись для систем более общего вида. Полная интегрируемость тех систем была связана с симметриями скрытого типа. Поэтому представляет интерес исследование достаточно широких классов динамических систем, обладающих аналогичными скрытыми симметриями.

Понятие интегрируемости, вообще говоря, достаточно расплывчатое. При его построении необходимо учитывать в каком смысле оно понимается (имеется в виду некий критерий, по которому делается вывод о том, что траектории рассматриваемой динамической системы устроены особенно «привлекательно и просто»), в классе каких функций ищутся первые интегралы и т.д. (см. также [5–7]).

Принимается такой подход, который учитывает в качестве класса функций как первых интегралов трансцендентные функции, причем элементарные. Здесь *трансцендентность понимается не в смысле элементарных функций* (например тригонометрических), а в смысле наличия у них существенно особых точек (в силу классификации, принятой в теории функций комплексного переменного, когда функция имеет существенно особые точки). При этом их необходимо формально продолжить в комплексную область. Вот такие системы являются, как правило, сильно неконсервативными [5–7].

В более ранних работах автора рассматривался класс задач, в котором характерное время движения твердого тела относительно его центра масс соизмеримо с характерным временем движения самого центра [5, 7].

Сложность решения таких задач зависит от многих факторов, в том числе и от характера внешнего силового поля. Например, в случае консервативного поля сил (тяжести) движение тела вокруг своего центра масс может быть сильно хаотичным (классическая задача о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки). В этом случае построить сколько-нибудь общую теорию интегрирования невозможно; естественная возможность продвинуться дальше — это наложить какие-то ограничения на геометрию твердого тела, а также на необходимость обладания силовым полем какими-то группами, пусть даже и скрытых, симметрий.

Предлагаемая работа возникла из задачи движения в сопротивляющейся среде твердого тела, поверхностью контакта со средой которого является лишь плоский участок его внешней поверхности. Силовое поле в этом случае строится из соображений воздействия среды на тело при струйном (или отрывном) обтекании в условиях квазистационарности. Оказывается, что изучение движения такого класса тел сводится к системам либо с рассеянием энергии (*диссипативные системы*), либо с ее подкачкой (так называемые *системы с антидиссипацией*). Отметим, что подобные задачи уже появлялись в прикладной аэродинамике в исследованиях ЦАГИ (см. также [8–10]).

Были также рассмотрены классы плоскопараллельных и пространственных движений твердых тел, взаимодействующих со средой среди которых (в зависимости от числа степеней свободы) можно назвать следующие: движения тел свободных в среде, покоящейся на бесконечности, и тел частично закрепленных, находящихся в потоке набегающей среды [7, 11, 12]. Обстоятельно изучена одна из таких задач, которая имеет наибольшее прикладное значение, — задача о свободном торможении твердого тела в сопротивляющейся среде. Кроме того, рассмотрены задачи о движении свободного тела при наличии следящей силы, а также о колебаниях закрепленного маятника, помещенного в поток набегающей среды (подробнее см. также [7]).

Рассматриваемые ранее задачи стимулируют развитие качественного аппарата исследования, который естественным образом дополняет качественную теорию неконсервативных систем с диссипацией и антидиссипацией.

Итак, ранее было проведено исследование динамических уравнений движения, возникающих при изучении плоской и пространственной динамики твердого тела, взаимодействующего со средой, которое навеяло на возможное обобщение полученных ранее методов исследования на общие системы, возникающие как в качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории динамических систем, так и в теории колебаний.

Были также исследованы нелинейные эффекты в плоской и пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой; проведено обоснование на качественном уровне необходимости введения определений относительной грубости и относительной негрубости различных степеней (см.

также [7]).

Проводя качественный анализ, автором в работе производятся следующие действия:

а) разработаны методы качественного исследования диссипативных систем и систем с антидиссипацией, позволившие получить условия бифуркации рождения устойчивых и неустойчивых автоколебаний, а также условия отсутствия любых таких траекторий. Метод исследования плоских топографических систем Пуанкаре и систем сравнения удалось распространить на высшие размерности. Получены достаточные условия устойчивости по Пуассону некоторых классов незамкнутых траекторий динамических систем;

б) в плоской и пространственной динамике твердого тела обнаружены первые интегралы диссипативных систем и систем с антидиссипацией, являющиеся трансцендентными (в смысле классификации их особенностей) функциями, выражающимися в ряде случаев через элементарные функции. Введены новые определения свойств относительной грубости и относительной негрубости различных степеней, которыми обладают проинтегрированные системы [7];

в) получены многопараметрические семейства топологически неэквивалентных фазовых портретов, возникающие в задаче о свободном торможении. Почти каждый портрет таких семейств — (абсолютно) груб;

г) обнаружены новые качественные аналогии между свойствами движения свободных тел в сопротивляющейся среде, покоящейся на бесконечности, и тел закрепленных, находящихся в потоке набегающей среды.

Многие результаты данной работы регулярно докладывались на семинаре «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. профессора В.В. Трофимова.

В историческом прошлом в основном затронут лишь *один аспект* задачи о движении тел в сопротивляющейся среде. А именно, интересы исследователей направлены на получение конкретных траекторий пусть и в приближенном, но в явном виде. При этом параллельно рассматривалась задача более точного моделирования взаимодействия тела с сопротивляющейся средой. Об интересных экспериментальных явлениях см. также работы ученых XIX века Hubert Airy, Magnus Blix, Bret Onniere, Otto Liliental, Marey, Mouillard, Parseval, S. E. Peal, Rayleigh, Weyher [13–22].

Дело в том, что плоская пластина — наиболее простое тело, позволяющее исследовать различные особенности движения в среде. Динамические эффекты, связанные с влиянием присоединенных масс (классическая задача Кирхгофа), демонстрируются в учебнике Г. Ламба [23, 24] на примере движения тела–пластины в жидкости (исследование, как известно, начато Томсоном, Тэйтом и Кирхгофом).

Задача Кирхгофа, поставленная во второй половине XIX в., заложила *второй аспект* рассмотрения задачи. Он связан с вопросами *интегрируемости той нелинейной системы дифференциальных уравнений*, которая описывает данное движение (вопросы существования аналитических (гладких, мероморфных или более своеобразных) первых интегралов).

До наших дней различные варианты задачи Кирхгофа, по причине сложности, почти всегда рассматривались с точки зрения проблемы интегрируемости, и лишь в некоторых случаях проведен качественный анализ ряда траекторий. В работах Кирхгофа, Клебша, Стеклова, Ляпунова, Чаплыгина, Харламова и др. указаны условия существования дополнительного аналитического первого интеграла.

Укажем также на *третий аспект* рассмотрения указанной проблемы, а именно, на качественный анализ систем дифференциальных уравнений, описывающих данное движение (расслоения фазового пространства, качественное расположение фазовых траекторий, симметрии и т.д.). И хотя перечисленные проблемы тесно связаны с интегрируемостью, их разрешение носит самостоятельный характер. Более того, данный аспект стимулирует развитие качественного аппарата.

Вообще, динамика твердого тела, взаимодействующего со средой, — как раз та область, где возникают либо диссипативные системы, либо системы с так называемой *антидиссипацией* (подкачкой энергии внутри самой системы).

Поскольку при таком моделировании используется экспериментальная информация о свойствах струйного обтекания, возникает необходимость исследования класса динамических систем, которые обладают свойством (относительной) *структурной устойчивости*.

После некоторых упрощений общая система уравнений плоскопараллельного движения может быть сведена к маятниковым системам второго или третьего порядков, в которых присутствует линейная диссипативная сила с переменным коэффициентом, который при разных значениях имеющейся в системе периодической фазовой переменной имеет разный знак.

В данном случае будем говорить о системах с так называемой переменной диссипацией, где термин «переменный» относится не столько к величине коэффициента диссипации, сколько к возможной смене его знака (поэтому разумно употреблять термин «знакопеременный»).

В среднем за период по имеющейся периодической координате диссипация может быть как положительной, так и отрицательной, а также равной нулю. В последнем случае будем говорить *о системах с переменной диссипацией с нулевым средним*.

Также отмечаются важные механические аналогии, возникающие при сравнении качественных свойств стационарного движения свободного тела и равновесия маятника в потоке среды. Такие аналогии носят глубокий опорный смысл, поскольку позволяют перенести свойства нелинейных динамических систем для маятника на динамические системы для свободного тела. И те, и другие системы принадлежат к классу так называемых *маятниковых динамических систем с переменной диссипацией с нулевым средним.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 08–01–00231–а).

Библиографический список

1. *Самсонов В.А., Локшин Б.Я., Привалов В.А.* Качественный анализ. Научный отчет Ин–та механики МГУ № 3245. М.: Ин–т механики МГУ, 1985. – 58 с.
2. *Самсонов В.А., Шамолин М.В., Ерошин В.А., Макаршин В.М.* Математическое моделирование в задаче о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании. Научный отчет Ин–та механики МГУ № 4396. М.: Ин–т механики МГУ, 1995. – 41 с.
3. *Ерошин В.А.* Экспериментальное исследование входа упругого цилиндра в воду с большой скоростью // Изв. РАН. – МЖГ. – 1992. – № 5. – С. 20–30.
4. *Ерошин В.А., Самсонов В.А., Шамолин М.В.* Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании // Известия РАН. – МЖГ. – 1995. – № 3. – С. 23–27.
5. *Самсонов В.А., Шамолин М.В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. – 1989. – № 3. – С. 51–54.
6. *Шамолин М.В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. – 1998, Т. 53, вып. 3, с. 209–210.
7. *Шамолин М.В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. – М.: Изд–во «Экзамен», 2007. – 352 с.
8. *Чаплыгин С.А.* Избранные труды. – М.: Наука, 1976. – 495 с.
9. *Гуревич М.И.* Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. – 322 с.
10. *Табачников В.Г.* Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки // Труды ЦАГИ. Вып. 1621. – М., 1974. – С. 18–24.
11. *Шамолин М.В.* К задаче о движении тела в среде с сопротивлением // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. – 1992. – № 1. – С. 52–58.
12. *Шамолин М.В.* Полная интегрируемость уравнений движения пространственного маятника в потоке среды при учете вращательных производных момента силы ее воздействия // Известия РАН. МТТ. – 2007, № 3, с. 187–192.
13. *Hubert Airy,* The Soaring of Birds, "Nature", vol. XXVIII, 1.596.
14. *Magnus Blix,* Une nouvelle theorie sur le vol a viole des oiseaux, "Revue generale sciences pures et appliquees", 1890.
15. *Bret Onniere,* Etude sur le vol plane, "L'Aeronaute", 1891.
16. *Otto Liliental,* Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst. Berlin, 1889, S. 81.
17. *Marey,* Le vol des oiseaux, chap.XX, Paris, 1890, 157 p.
18. *Mouillard,* L'empire de l'air, Paris, 1881.
19. *Parseval,* Die Mechanik des Vogelflugs, Wisbaden, 1889, S. 122.
20. *Peal S.E.,* Soaring of Birds, "Nature", vol. XXVIII, 1.11.
21. *Rayleigh,* The Soaring of Birds, "Nature", vol. XXVIII, 1.534.
22. *Weyher,* Observations sur le vol plane par obres, "L'Aeronaute", 1890. S.E.
23. *Ламб Г.* Гидродинамика. – М.: Физматгиз, 1947. – 928 с.
24. *Чаплыгин С.А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // В кн. Полн. собр. соч. Т. 1. Л.: Изд–во АН СССР, 1933. – С. 133–135.