ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННОЙ ДИССИПАЦИЕЙ В ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО СО СРЕДОЙ

М. В. Шамолин (Москва, Российская Федерация)

Динамика твердого тела, взаимодействующего со средой, — как раз та область, где часто приходится исследовать либо диссипативные системы, либо системы с так называемой антидиссипацией (подкачкой энергии). Поэтому становится актуальным построение методики именно для тех классов систем, которые возникают при моделировании движения твердых тел, поверхностью контакта которых со средой является плоский участок их внешней поверхности [1], [2], [3].

Поскольку при таком моделировании используется экспериментальная информация о свойствах струйного обтекания, возникает необходимость исследования класса динамических систем, которые обладают свойством относительной структурной устойчивости. Поэтому вполне естественно ввести определения относительной грубости для таких систем. При этом типичные системы получаются (абсолютно) грубыми по Андронову-Понтрягину.

После некоторых упрощений общая система обыкновенных дифференциальных уравнений движения твердого тела приводится к маятниковым системам второго или третьего порядков, в которых присутствует линейная диссипативная сила с переменным коэффициентом, имеющий при разных углах атаки разный знак. В данном случае будем говорить о системах с так называемой переменной диссипацией, где термин "переменный" относится не столько к величине коэффициента диссипации, сколько к возможной смене его знака.

В среднем за период по имеющейся в системе периодической координате (в частности, углу атаки) диссипация может быть как положительной, так и отрицательной, а также равной нулю. В последнем случае будем говорить о системах с переменной диссипацией "с нулевым средним".

Общее определение системы с переменной диссипацией с нулевым или ненулевым средним нам не потребуется. Ограничимся следующим.

Рассмотрим гладкую автономную динамическую систему $n+1$ порядка нормального вида в $R^n\{x\} \times S^1\{\alpha \mod 2\pi\}$. Дивергенцию правой части (которая, вообще говоря, является функцией всех фазовых переменных и не равна тождественно нулю) данной динамической системы будем обозначать через $div(x,\alpha)$. Будем называть такую систему системой с переменной диссипацией с нулевым (ненулевым) средним (по имеющейся периодической координате), если функция

$$\int_0^{2\pi} div(x,\alpha)d\alpha$$

равна (не равна) тождественно нулю.

В работе отмечены важные механические аналогии, возникающие при сравнении качественных свойств стационарного движения свободного твердого тела и равновесия маятника в потоке среды. Такие аналогии носят глубокий опорный смысл, поскольку позволяют перенести свойства нелинейных динамических систем для маятника на динамические системы для свободного тела. И те, и другие системы принадлежат к классу так называемых маятниковых динамических систем с переменной диссипацией с нулевым средним. Например, при выполнении некоторых условий угол поворота закрепленного маятника эквивалентен углу атаки при движении свободного тела. В противном случае имеется общая траекторная топологическая эквивалентность (но не сопряжение!).

Как известно, (чисто) диссипативные динамические системы (впрочем как и (чисто) антидиссипативные), которые в нашем случае могут принадлежать к системам с переменной диссипацией с ненулевым средним, являются, как правило, структурно устойчивыми ((абсолютно) грубыми), а вот системы с переменной диссипацией с нулевым средним (которые, как правило, обладают дополнительными симметриями) являются либо структурно неустойчивыми (негрубыми), либо только лишь относительно структурно устойчивыми (относительно грубыми). Последнее утверждение доказать в общем случае затруднительно. Тем не менее введение понятия относительной грубости (а также относительной негрубости различных степеней) позволяет предъявить классы конкретных систем из динамики твердого тела, которые обладают вышеуказанными свойствами.

Будут также рассмотрены некоторые вопросы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, как в применение к конкретным динамическим системам, возникающим в динамике твердого тела, так и в применение к произвольным динамическим системам на маломерных гладких многообразиях. В частности, получены достаточные условия существования бифуркации рождения устойчивых и неустойчивых предельных циклов для систем, описывающих движение тела в сопротивляющейся среде, а также достаточные условия отсутствия таких траекторий.

Предъявлено простое уточнение теорем Бендиксона и Дюлака, которая дает достаточные условия отсутствия замкнутых характеристик векторного поля в той области плоскости, где не меняет знака его дивергенция, т. е. для динамических систем со знакопостоянной диссипацией.

В понятии топографической системы Пуанкаре (ТСП) [4], [5] первоначально был заложен ряд требований аналитического характера. ТСП строилась с помощью достаточно гладкой алгебраической функции двух переменных, которая: ограниченная в ограниченной области, стремящаяся к бесконечности, когда одна из переменных стремится к бесконечности, равная нулю в особой точке векторного поля на плоскости, положительная во всех остальных точках, имеющая первые производные, обращающиеся в нуль в особой точке, в которой она к тому же и выпукла. В работе же учитывается лишь геометрия расположения так называемой кривой контактов траекторий исследуемой динамической системы и кривых ТСП (т. е. кривой, в которой последние два класса траекторий касаются).

Мы же под ТСП будем понимать систему вложенных друг в друга замкнутых кривых, полученных с помощью поверхностей уровня неотрицательной функции, которая равна нулю лишь в точке, к которой сходятся полученные вложенные замкнутые кривые. С помощью такой системы можно успешно "ловить" замкнутые траектории исследуемой динамической системы следующим образом: вычисляя угол между векторами поля, образующими семейство ТСП, и векторами исследуемого поля динамической системы, можно получить информацию о расположении траекторий исследуемого векторного поля.

Более того в работе предложен метод построения ТСП в многомерных пространствах.

Изучаются также некоторые элементы теории монотонных векторных полей, т. е. полей, зависящих от параметра, при изменении которого само поле поворачивается в одну и ту же сторону монотонно. При некоторых условиях классы траекторий таких векторных полей имеют монотонно меняющиеся друг относительно друга предельные множества. Предлагается достаточно простая методика доказательства устойчивости по Пуассону незамкнутых траекторий динамических систем. В частности, в некоторых исследуемых системах с переменной диссипацией с нулевым средним показано наличие семейств таких длиннопериодических траекторий: при некоторых условиях траектория движения некоторой характерной точки твердого тела устойчива по Пуассону.

Отмечены классы существенно нелинейных систем второго и третьего порядков, интегрируемых в трансцендентных (в смысле теории функций комплексного переменного) элементарных функциях.

Литература.

[1] *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1989. No. 3. С. 51–54.

[2] *Shamolin M. V.* New integrable cases and families of portraits in the plane and spatial dynamics of a rigid body interacting with a medium, In: Journal of Mathematical Sciences, Vol. 114, No. 1, 2003, p.p. 919–975 (пер. "Итоги науки и техники", сер. "Современные проблемы математики и ее приложения", тематические обзоры, т. 88, "Динамические системы–12", 2001).

[3] *Shamolin M. V.* Classes of variable dissipation systems with nonzero mean in the dynamics of a rigid body, In: Journal of Mathematical Sciences, Vol. 122, No. 1, 2004, p.p. 2841–2915 (пер. "Итоги науки и техники", сер. "Современные проблемы математики и ее приложения", тематические обзоры, т. 112, "Динамические системы", 2002).

[4] *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. — М.–Л.: ОГИЗ, 1947.

[5] *Пуанкаре А.* Новые методы в небесной механике // Избранные труды. Т. 1,2. — М.: Наука, 1971,1972. — 771 с. и 999 с.