



Институт математики  
и механики  
им. Н.Н. Красовского

## **«Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2024)**

Материалы Международной конференции, посвященной  
100-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского

Екатеринбург, 9–13 сентября 2024 г.

## **“Dynamic Systems: Stability, Control, Differential Games” (SCDG2024)**

Proceedings of the International Conference  
devoted to the 100th anniversary  
of Academician N.N. Krasovskii

Yekaterinburg, Russia, 9–13 September 2024

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского  
Уральского отделения Российской академии наук

**«Динамические системы: устойчивость,  
управление, дифференциальные игры»  
(SCDG2024)**

Материалы Международной конференции,  
посвященной 100-летию со дня рождения академика  
Н.Н. Красовского

Екатеринбург, 9–13 сентября 2024 г.

**“Dynamic Systems: Stability, Control,  
Differential Games” (SCDG2024)**

Proceedings of the International Conference  
devoted to the 100th anniversary of Academician  
N.N. Krasovskii

Yekaterinburg, Russia, 9–13 September 2024

Екатеринбург  
2024

УДК 517.977

ББК 22.161.8

У81

**«Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2024):** Материалы Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского, (Екатеринбург, 9–13 сентября 2024 г.). — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, ООО «Издательство УМЦ УПИ», 2024. — 521 с.

Редакторы: В.И. Максимов, А.М. Тарасьев, Т.Ф. Филиппова

Конференция организована в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2024-1377).

---

UDC 517.977

LBC 22.161.8

**“Dynamic Systems: Stability, Control, Differential Games” (SCDG2024):** Proceedings of the International Conference devoted to the 100th anniversary of Academician N.N. Krasovskii, Yekaterinburg, Russia, 9–13 September 2024.

Editors: T.F. Filippova, V.I. Maksimov, A.M. Tarasyev

Published by: Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (IMM UB RAS), Yekaterinburg, Russia

The Conference is organized as part of research conducted in the Ural Mathematical Center with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement number 075-02-2024-1377).

---

ISBN 978-5-8295-0908-8

© ИММ УрО РАН / IMM UB RAS 2024

**Международная конференция «Динамические системы:  
устойчивость, управление, дифференциальные игры»  
(SCDG2024),**

**посвященная 100-летию со дня рождения  
академика Н.Н. Красовского**

***Екатеринбург, 9–13 сентября 2024 г.,  
<http://scdg2024.ufran.ru>***

**Программный комитет**

**Сопредседатели программного комитета:**

Бердышев В.И. (Екатеринбург)  
Куржанский А.Б. (Москва)  
Осипов Ю.С. (Москва)

**Заместители председателей программного комитета:**

Ушаков В.Н. (Екатеринбург)  
Ченцов А.Г. (Екатеринбург)

**Члены программного комитета:**

Асеев С.М. (Москва)	Петров Н.Н. (Ижевск)
Васин В.В. (Екатеринбург)	Петросян Л.А. (Санкт-Петербург)
Григоренко Н.Л. (Москва)	Субботина Н.Н. (Екатеринбург)
Зеликин М.И. (Москва)	Толстоногов А.А. (Иркутск)
Никольский М.С. (Москва)	Черноусько Ф.Л. (Москва)

**Организационный комитет**

**Председатель организационного комитета:**

Лукоянов Н.Ю. (Екатеринбург)

**Заместители председателя организационного комитета:**

Максимов В.И. (Екатеринбург)  
Тарасьев А.М. (Екатеринбург)  
Филиппова Т.Ф. (Екатеринбург)

**Секретари организационного комитета:**

Дигас Б.В. (Екатеринбург)  
Усова А.А. (Екатеринбург)

**Члены организационного комитета:**

Гомоюнов М.И. (Екатеринбург)	Матвийчук О.Г. (Екатеринбург)
Гусев М.И. (Екатеринбург)	Пименов В.Г. (Екатеринбург)
Завалищин Д.С. (Екатеринбург)	Сесекин А.Н. (Екатеринбург)
Зыков И.В. (Екатеринбург)	Сурков П.Г. (Екатеринбург)
Кандоба И.Н. (Екатеринбург)	Успенский А.А. (Екатеринбург)
Костоусов В.Б. (Екатеринбург)	Хлопин Д.В. (Екатеринбург)
Макаров А.В. (Екатеринбург)	

## Тензорные инварианты динамических систем с диссипацией

М.В. Шамолин

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия,  
shamolin@rambler.ru, shamolin.maxim@yandex.ru

**Аннотация:** Представлены новые случаи интегрируемых однородных по части переменных динамических систем пятого, седьмого, девятого и любого нечетного порядка, в которых может быть выделена система на касательном расслоении к двумерному, трехмерному, четырехмерному и четномерному многообразию. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией разного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает ранее рассмотренные поля. Приведены полные наборы как первых интегралов, так и инвариантных дифференциальных форм.

**Ключевые слова:** динамическая система, интегрируемость, диссипация, первый интеграл с существенно особыми точками, инвариантная дифференциальная форма.

Нахождение достаточного количества тензорных инвариантов (не только автономных первых интегралов), как известно [1, 2, 7], облегчает исследование, а иногда позволяет точно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных (в частности, гамильтоновых) систем этот факт естествен, когда фазовый поток сохраняет объем с гладкой (или постоянной) плотностью.

Сложнее (в смысле гладкости инвариантов) дело обстоит для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Для таких систем коэффициенты искомым инвариантов должны, вообще говоря, включать функции, обладающие существенно особыми точками (см. также [3–5]).

Наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы порядка  $m$  надо знать  $m - 1$  независимый тензорный инвариант. При этом для достижения точной интегрируемости приходится соблюдать также ряд дополнительных условий на эти инварианты.

Важные случаи интегрируемых систем с малым числом степеней свободы в неконсервативном поле сил уже рассматривались в работах автора [4, 6]. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем. При этом в этих работах упор

делался на нахождение достаточного количества именно первых интегралов. Но, как известно, иногда полного набора первых интегралов для систем может и не быть, зато достаточное количество инвариантных форм может быть обеспечено.

Для систем классической механики понятия “консервативность”, “силовое поле”, “диссипация” и др. вполне естественны. Поскольку в данной работе изучаются динамические системы на касательном расслоении к гладкому многообразию (пространству положений), уточним данные понятия для таких систем.

Анализ “в целом” начинается с исследования приведенных уравнений геодезических, левые части которых при правильной параметризации представляют собой записи координат ускорения движения материальной частицы, а правые части приравнены к нулю. Соответственно, величины, которые ставятся в дальнейшем в правую часть, можно рассматривать как некоторые обобщенные силы. Такой подход традиционен для классической механики, а теперь он естественно распространяется на более общий случай касательного расслоения к гладкому многообразию. Последнее позволяет, в некотором смысле, конструировать “силовые поля”. Так, например, введя в систему коэффициенты, линейные по одной из координат (по одной из квазискростей системы) касательного пространства, получим силовое поле с диссипацией разного знака (в зависимости от знака самого коэффициента).

И хотя словосочетание “диссипация разного знака” несколько противоречиво, тем не менее, будем его употреблять. Учитывая при этом, что в математической физике диссипация “со знаком “плюс” — это рассеяние полной энергии в обычном смысле, а диссипация “со знаком “минус” — это своеобразная “подкачка” энергии (при этом в механике силы, обеспечивающие рассеяние энергии называются диссипативными, а силы, обеспечивающие подкачку энергии называются разгоняющими).

Консервативность для систем на касательных расслоениях можно понимать в традиционном смысле, но мы добавим к этому следующее. Будем говорить, что система консервативна, если она обладает полным набором гладких первых интегралов, что говорит о том, что она не обладает притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Если же она последними обладает, то будем говорить, что система в той или иной области фазового пространства обладает диссипацией какого-то знака. Как следствие этого — обладание системы хотя бы одним первым интегралом (если они вообще есть) с существенно особыми точками.

В данной работе силовое поле разделяется на так называемые внутреннее и внешнее. Внутреннее поле характерно тем, что оно не меняет консервативности системы. А внешнее может вносить в систему диссипацию разного знака. Заметим также, что вид внутренних силовых полей

заимствован из классической динамики твердого тела (см. также [4]).

В данной работе приведены первые интегралы, а также инвариантные дифференциальные формы классов однородных по части переменных динамических систем нечетного порядка, в которых может быть выделена система с конечным числом степеней свободы на своем фазовом многообразии. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает так называемой знакопеременной диссипацией. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает силовые поля, рассматриваемые ранее.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Козлов В.В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук, 2019. Т. 74. № 1(445). С. 117–148.
2. *Колмогоров А.Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Доклады АН СССР, 1953. Т. 93. № 5. С. 763–766.
3. *Шамолин М.В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук, 1998. Т. 53. № 3. С. 209–210.
4. *Шамолин М.В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // Доклады РАН, 2013. Т. 449. № 4. С. 416–419.
5. *Шамолин М.В.* Инварианты однородных динамических систем пятого порядка с диссипацией // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления, 2023. Т. 514. № 1. С. 98–106.
6. *Шамолин М.В.* Инвариантные формы объема систем с тремя степенями свободы с переменной диссипацией // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления, 2022. Т. 507. № 1. С. 86–92.
7. *Poincaré H.* Calcul des probabilités. Gauthier-Villars, Paris. 1912.

## Tensor Invariants of Dynamical Systems with Dissipation

Maxim V. Shamolin

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation,  
shamolin@rambler.ru, shamolin.maxim@yamdex.ru

**Abstract:** New cases of integrable dynamical systems of the fifth, seventh, ninth, and any odd order, homogeneous in terms of variables, are presented, in which a system on a tangent bundle to a two-dimensional, three-dimensional, four-dimensional and even-dimensional manifold can be distinguished. In this case, the force field is divided into an internal (conservative) and an external one, which has a dissipation of different signs. The external field is introduced using some unimodular transformation and generalizes the previously considered fields. Complete sets of both the first integrals and invariant differential forms are given.