Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского

Научно-образовательный Крымский математический центр

Московский центр фундаментальной и прикладной математики

Региональный научно-образовательный математический центр
Южного федерального университета

Российский университет дружбы народов

Математический Фонд Крыма

Сборник материалов международной конференции *КРОМШ-2023*

XXXIV Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум Н.Д. Копачевского по спектральным и эволюционным задачам

Кача (Севастополь), Российская Федерация,

8 – 17 сентября 2023 г.

Симферополь
ИТ «АРИАЛ»
2023

Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского

Научно-образовательный Крымский математический центр

Московский центр фундаментальной и прикладной математики

Региональный научно-образовательный математический центр
Южного федерального университета

Российский университет дружбы народов

Математический Фонд Крыма

Сборник материалов международной конференции *КРОМШ-2023*

XXXIV Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум Н.Д. Копачевского по спектральным и эволюционным задачам

Кача (Севастополь), Российская Федерация,

8 – 17 сентября 2023 г.

Симферополь
ИТ «АРИАЛ»
2023

УДК 517.9:519.2
ББК 22.15+22.16+22.17
С 23

Печатается по решению Организационного комитета XXXIV Крымской Осенней Математической Школы-симпозиума по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2023).

Конференция проводится при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2023-1799.

Ответственный за выпуск:
Муратов Мустафа Абдурешитович, д.ф.-м.н., профессор, председатель Организационного комитета КРОМШ-2023.

Ответственный редактор:
Закора Дмитрий Александрович, д.ф.-м.н., доцент.

Редакционная коллегия:
Муратов М.А., Скубачевский А.Л., Суслина Т.А., Шкаликов А.А., Закора Д.А., Пашкова Ю.С., Старков П.А., Фордук К.В., Якубова А.Р.

С 23 Сборник материалов международной конференции “XXXIV Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум Н.Д. Копачевского по спектральным и эволюционным задачам”. – Симферополь : ИТ «АРИАЛ», 2023. – 106 с.

ISBN 978-5-907742-61-1

В сборнике представлены материалы работ участников международной конференции “Крымская осенняя математическая школа-симпозиум Н.Д. Копачевского (КРОМШ-2023)”, посвящённых различным направлениям исследований в области математического и функционального анализа, дифференциальных уравнений, теории вероятностей, финансовой математики, оптимального управления, теории игр, математического моделирования, дискретной математики и методики преподавания.

В книге сохранена авторская редакция статей, выполнено лишь частичное техническое редактирование; в связи с этим редакционная коллегия не несёт ответственности за возможные неточности.

Материал, представленный в сборнике, может быть полезен научным сотрудникам, работникам высшего образования, аспирантам и студентам.

УДК 517.9:519.2

© Коллектив авторов, 2023
© НО “Крымский математический центр”, 2023
© Математический Фонд Крыма, 2023
© ФГАОУ ВО “Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского”, 2023
© ИТ «АРИАЛ», макет, оформление, 2023

ISBN 978-5-907742-61-1

Диффеоморфизмы с базисными множествами коразмерности один

Гринес В. З.
НИУ Высшая Школа Экономики (Нижний Новгород, Россия)

Жужома Е. В.
НИУ Высшая Школа Экономики (Нижний Новгород, Россия)
E-mail: zhuzhoma@mail.ru

Медведев В. С.
НИУ Высшая Школа Экономики (Нижний Новгород, Россия)

Обозначим через $\mathbb{G}_k^{cod1}(M^n)$, множество А-диффеоморфизмов замкнутого (гладкого и связного) ориентируемого n-мерного многообразия M^n, $n \geq 3$, неблуждающее множество которых состоит из $k \geq 1$ связных ориентируемых растягивающихся аттракторов и сжимающихся репеллеров коразмерности один. Мы показываем, что множество $\mathbb{G}_k^{cod1}(M^n)$ состоит из Ω-устойчивых и структурно неустойчивых диффеоморфизмов. Описана топологическая структура несущего многообразия M^n для любого $f \in \mathbb{G}_k^{cod1}(M^n)$, и получена полная классификация (с точностью до глобальной сопряженности на неблуждающих множествах) диффеоморфизмов из множества $\mathbb{G}_k^{cod1}(M^n)$.

Авторы благодарят за поддержку Российский научный фонд (грант 22-11-00027). Работа выполнена в Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ на средства гранта 075-15-2022-1101 Министерства науки и высшего образования РФ.

Инвариантные формы геодезических, потенциальных и диссипативных систем с конечным числом степеней свободы

Шамолин М. В.
МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)
E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin.maxim@yandex.ru

Нахождение достаточного количества тензорных инвариантов (не только первых интегралов) позволяет точно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений [1]. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных систем этот факт естественен, но для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами, не только некоторые первые интегралы, но и коэффициенты имеющихся инвариантных дифференциальных форм должны, вообще говоря, включать функции, обладающие существенно особыми точками (см. также [2–4]).

Примеры тензорных инвариантов — это, прежде все-го, скалярные инварианты — первые интегралы системы. Инвариантные векторные поля — поля симметрий (они

коммутируют с векторным полем рассматриваемой системы). Фазовые потоки систем дифференциальных уравнений, порождаемых этими полями, переводят решения рассматриваемой системы в решения той же системы. Инвариантные внешние дифференциальные формы (поиск которых, в основном, и проведен в данной работе) порождают интегральные инварианты системы. При этом, очевидно, само векторное поле рассматриваемой системы является одним из инвариантов (тривиальный инвариант). Знание тензорных инвариантов системы дифференциальных уравнений облегчает и ее интегрирование, и качественное исследование. Наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы из m дифференциальных уравнений помимо упомянутого тривиального инварианта надо знать еще $m-1$ независимых тензорных инвариантов.

Задача о движении $(n+1)$-мерного маятника на обобщенном сферическом шарнире в неконсервативном поле сил, который можно образно описать, как "поток набегающей среды, заполняющей объемлющее $(n+1)$-мерное пространство", приводит к динамической системе на касательном расслоении к n-мерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительными группами симметрий [5]. Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, полный список первых интегралов состоит из функций, имеющих существенно особые точки, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. То же фазовое пространство естественно возникает в задаче о движении точки по n-мерной сфере с индуцированной метрикой объемлющего $(n+1)$-мерного пространства. Отметим также задачи о движении точки по более общим n-мерным поверхностям вращения, в пространстве Лобачевского и т. д.

В работе для рассматриваемого класса динамических систем предъявлены полные наборы инвариантных дифференциальных форм для однородных систем на касательных расслоениях к гладким конечномерным многообразиям (об аналогичных исследованиях для систем меньшей размерности см. [2, 3, 5]). Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля вносят в системы диссипацию разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Изучается задача геодезических, включающая, в частности, геодезические на сфере и других поверхностях вращения, конечномерного пространства Лобачевского. Указываются достаточные условия интегрируемости уравнений геодезических. Затем в системы добавляется потенциальное поле сил специального вида, также указываются достаточные условия интегрируемости рассматриваемых уравнений, на классах задач, аналогичных рассмотренным ранее. И в заключение строится усложнение задачи, возникающее в результате добавления неконсервативного поля сил со знакопеременной диссипацией. Указываются достаточные условия интегрируемости.

Список литературы

[1] Козлов В.В. *Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений* / В.В. Козлов // Успехи мат. наук. – 2019. – Т. 74(445), № 1. – С. 117-148.

[2] Шамолин М.В. *Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия* / М.В. Шамолин // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. – 2020. – Т. 495, № 1. – С. 84-90.

[3] Шамолин М.В. *Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия* / М.В. Шамолин //

Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. – 2021. – Т. 497, № 1. – С. 23-30.

[4] Шамолин М.В. *Инвариантные формы объема систем с тремя степенями свободы с переменной диссипацией* / М.В. Шамолин // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. – 2022. – Т. 507, № 1. – С. 86-92.

[5] Шамолин М.В. *Инвариантные формы объема геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении четырехмерного многообразия* / М.В. Шамолин // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. – 2023. – Т. 509, № 1. – С. 69-76.

К вопросу о квантизации в дифференциальных играх

Югай Л. П.
Узбекский государственный университет физической культуры и спорта (Чирчик, Узбекистан)
E-mail: yugailp@mail.ru

Пусть конфликтно управляемый процесс описывается уравнением

$$\dot{z} = f(z, u, v), \tag{1}$$

где $z \in R^n$, $\dot{z}$ — производная по времени, $u \in P \subset R^p$, $v \in Q \subset R^q$, P и Q — непустые компактные множества, непрерывная функция $f(z, u, v)$ удовлетворяет условиям единственности и продолжаемости решений (1) при всех $t \geq 0$.

Дифференциальная игра возникает после того, как для процесса (1) будут определены стороны (игроки), выбирающие параметры $u \in P$ и $v \in Q$, классы управлений (стратегий), терминальное множество M, информационные возможности игроков и их цели.

Что касается целей игроков, то убегающий игрок так стремится выбирать свое управление $v(t) \in Q$,чтобы при любом возможном поведении преследователя не приводить траекторию (1), исходящую из точки вне M, на это множество при всех $t \geq 0$. У преследующего игрока цель — противоположная. При этом, одна из сторон объявляется более активной (например, убегающий игрок), и тогда убегающему игроку для решения задачи убегания предоставляются, как правило, преимущества либо по параметрам игры, либо по доступности к информации об игре [1, 2].

Общим свойством всех игр, является тот факт, что в каждый момент времени один (или оба) из игроков не знает будущего поведения игрока-соперника.

Для применения численных методов необходимо перейти от (1) к дискретной модели, ассоциированной с (1). Процесс перехода от непрерывных дифференциальных игр к дискретным называется квантизацией игр [1, стр. 65]. Квантизация зависит, в основном, от замен производной в (1), которые могут быть следующими [3, 4]:

$$\dot{z}(t_k) \approx \tau^{-1}[z(t_k) - z(t_{k-1})], \quad t_k - t_{k-1} = \tau > 0, \quad k = 1, 2, 3 \ldots, \tag{2}$$

$$\dot{z}(t_k) \approx \tau^{-1}[z(t_{k+1}) - z(t_k)], \quad k = 0, 1, 2, 3 \ldots, \tag{3}$$

$$\dot{z}(t_k) \approx 2\tau^{-1}[3z(t_k) - 4z(t_{k-1}) + z(t_{k-2}], \quad k = 2, 3, \ldots. \tag{4}$$