

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Белгородский государственный национальный
исследовательский университет»

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ,
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ**

Сборник материалов
международной конференции

Белгород, 25–29 октября 2021 г.



Белгород 2021

УДК 51
ББК 22.1
Д 50

Д 50 **Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы** : сборник материалов международной конференции, Белгород, 25–29 октября 2021 г. / под ред. В.Б. Васильева, И.С. Ломова. – Белгород: ИД «БелГУ» НИУ «БелГУ», 2021. – 336 с.

ISBN 978-5-9571-3145-8

Сборник содержит материалы международной конференции, проходившей в Белгородском государственном университете в конце октября 2021 г. Программа конференции включала пленарные доклады и секционные доклады, посвященные одной из следующих тем:

1. Линейные и нелинейные операторы в функциональных пространствах
2. Дифференциальные, интегральные и операторные уравнения
3. Начальные и краевые задачи для дифференциальных уравнений
4. Численные методы в теории дифференциальных уравнений и их приложений
5. Математическое и компьютерное моделирование
6. Математическая физика и моделирование в физике
7. Вопросы дифференциальных уравнений и математического моделирования в педагогических исследованиях.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-9571-3145-8

© НИУ «БелГУ», 2021

Russian Federation Ministry of Science and Higher Education
Federal Public Autonomous Educational Institution of the Higher Education
"Belgorod National Research University"

Lomonosov Moscow State University

**DIFFERENTIAL EQUATIONS,
MATHEMATICAL MODELING
AND COMPUTATIONAL ALGORITHMS**

Collection of materials of the International Conference

Belgorod, October 25–29, 2021



Belgorod 2021

УДК 51
ББК 22.1
D 50

D 50 **Differential Equations, mathematical modeling and computational algorithms** : Collection of materials of the International Conference, Belgorod, October 25–29, 2021 / edited by V.B. Vasilyev, I.S. Lomov. – Belgorod: Publishing house «BelSU» NRU «BelSU», 2021. – 336 p.

ISBN 978-5-9571-3145-8

The book contains Proceedings of the International Conference which was hold in Belgorod State University at end of October 2021. Conference program included plenary talks and sectional talks related to one of the following topics:

1. Linear and nonlinear operators in function spaces
2. Differential, integral and operator equations
3. Initial and boundary value problems for differential equations
4. Numerical methods in theory of differential equations and their applications
5. Mathematical and computer modeling
6. Mathematical physics and modeling in physics
7. Questions of differential equations and mathematical modeling in edagogical research.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-9571-3145-8

© НИУ «БелГУ», 2021

**ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ СИСТЕМ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ
СВОБОДЫ С ДИССИПАЦИЕЙ**

Шамолин М.В.

*МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия;
shamolin@imec.msu.ru, shamolin.maxim@yandex.ru*

Как известно, наличие достаточного количества не только первых интегралов (скалярных инвариантов), но и других тензорных инвариантов позволяет полностью проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Так, например, наличие инвариантной формы фазового объема позволяет понизить порядок рассматриваемой системы. Для консервативных систем этот факт естественен. А вот для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами, не только некоторые первые интегралы, но и коэффициенты имеющихся инвариантных дифференциальных форм должны, вообще говоря, состоять из трансцендентных (в смысле комплексного анализа) функций.

Так, например, задача о движении пространственного маятника на сферическом шарнире в потоке набегающей среды приводит к системе на касательном расслоении к двумерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий. Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Известны также задачи о движении точки по двумерным поверхностям вращения, плоскости Лобачевского и т.д. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

В работе предьявлены тензорные инварианты (дифференциальные формы) для однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким двумерным многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Введение коэффициентов в гладкой динамической системе, отвечающей за диссипацию, вообще говоря, довольно затруднительно. Но часто это может быть сделано следующим образом: вполне определенные коэффициенты указывают на рассеяние энергии в одних областях фазового пространства, а в других его областях указывают на подкачку энергии. Это естественным образом приводит к потере классических первых интегралов, глобально выражающихся через гладкие функции на всем фазовом пространстве.

Как известно, топологическим препятствием к наличию в системе полного набора гладких первых интегралов являются асимптотические (притягивающие или отталкивающие) предельные множества. При их обнаружении необ-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 19-01-00016.

ходимо забыть о полном наборе даже непрерывных во всем фазовом пространстве автономных первых интегралов [1, 2].

При исследовании систем с диссипацией если и удастся найти полный набор первых интегралов, то среди них обязательно будут первые интегралы, являющиеся трансцендентными (в смысле теории функций комплексного переменного) функциями (имеющими существенно особые точки). Поэтому результаты, полученные в данной работе, особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

Можно отдельно отметить важные частные случаи интегрируемости динамических систем на касательном расслоении к конечномерной сфере. В динамике они соответствуют движению многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил, а, в случае двумерной сферы, — классической задаче о движении сферического маятника, помещенного в поток набегающей среды [2, 3].

Данная тематика уже затрагивалась в ряде других работ автора (см., например, [4]). В данной работе показана интегрируемость некоторых классов однородных по части переменных динамических систем, которые рассматриваются на касательном расслоении к конечномерному гладкому многообразию. При этом вводимые силовые поля обладают диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

В работе также обсуждается связь тензорных инвариантов систем дифференциальных уравнений с проблемой их точного интегрирования. Тем самым проводимое исследование тесно связано с [5, 6], где также рассматриваются динамические системы, которые описываются квазиоднородными системами дифференциальных уравнений с полиномиальными правыми частями.

Литература

1. *Шамолин М.В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 1. Твердое тело в неконсервативном поле. М.: ЛЕНАНД, 2019. 456 с.
2. *Шамолин М.В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 2. Закрепленные маятники разной размерности. М.: ЛЕНАНД, 2021. 400 с.
3. *Шамолин М.В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 494, № 1. С. 105–111.
4. *Шамолин М.В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 495, № 1. С. 84–90.
5. *Козлов В.В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 2019. Т. 74, № 1. С. 117–148.
6. *Козлов В.В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // Прикл. матем. и механ. 2015. Т. 79, № 3. С. 307–316.