М. В. Шамолин, Случаи интегрируемых динамических систем произвольного нечетного порядка с диссипацией, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 195, 142–156

DOI: https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-195-142-156

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 195 (2021). С. 142–156
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-195-142-156

УДК 517, 531.01

СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРОИЗВОЛЬНОГО НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ

© 2021 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. В работе показана интегрируемость некоторых классов однородных по части переменных динамических систем произвольного нечетного порядка, в которых выделяется система на касательном расслоении к гладкому многообразию.

Ключевые слова: динамическая система, неконсервативное поле сил, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

EXAMPLES OF INTEGRABLE DYNAMICAL SYSTEMS OF ARBITRARY ODD ORDER WITH DISSIPATION

© 2021 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. In this paper, we prove the integrability of some classes of odd-order homogeneous (in some variables) dynamical systems that admit extracting a system on the tangent bundle to a smooth manifold.

Keywords and phrases: dynamical system, nonconservative force field, integrability, transcendental first integral.

AMS Subject Classification: 58-xx, 70-xx

Описание диссипации в динамической системе является довольно затруднительной задачей. Но это, к примеру, может быть сделано следующим образом: вполне определенные коэффициенты указывают на рассеяние энергии в одних областях фазового пространства, а в других его областях — на подкачку энергии. Это приводит к потере классических первых интегралов (законов сохранения), глобально выражающихся через гладкие функции.

Топологическим препятствием к наличию в системе полного набора гладких первых интегралов являются притягивающие или отталкивающие предельные множества. При их обнаружении необходимо забыть о полном наборе даже непрерывных во всем фазовом пространстве автономных первых интегралов (см. [3, 6, 14, 18]).

При исследовании систем с диссипацией если и удается найти полный набор первых интегралов, то среди них обязательно будут первые интегралы, являющиеся трансцендентными (в смысле комплексного анализа) функциями (имеющими существенно особые точки). Поэтому результаты, полученные в данной работе, особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

Данная тематика уже затрагивалась в ряде работ автора (см., например, [35–37]). В данной работе показана интегрируемость некоторых классов однородных по части переменных динамических систем произвольного нечетного порядка, в которых выделяется система на касательном расслоении к гладкому многообразию. При этом силовые поля обладают диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

1. Замечания к системам малых нечетных порядков. Пусть v, α, z — фазовые переменные в некоторой гладкой динамической системе, правые части которой — однородные полиномы степени 2 по переменным v, z с коэффициентами, зависящими от α (для уравнений на $\dot{v}$, $\dot{z}$, $v\dot{\alpha}$ см. также [7, 15, 19]) следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{v} = a(\alpha)v^2 + b(\alpha)vz + c(\alpha)z^2, \\ \dot{z} = d(\alpha)v^2 + e(\alpha)vz + f(\alpha)z^2, \\ v\dot{\alpha} = g(\alpha)v^2 + h(\alpha)vz + i(\alpha)z^2. \end{cases} \tag{1}$$

Тогда, выбирая в качестве нового времени переменную q ($dq = v\,dt$, $d/dq = \langle\,'\rangle$, $v \neq 0$), а также новую фазовую переменную Z по формуле $z = Zv$, систему (1) можно переписать в следующем виде:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \tag{2}$$

$$\begin{cases} \alpha' = g(\alpha) + h(\alpha)Z + i(\alpha)Z^2, \\ Z' = d(\alpha) + e(\alpha)Z + f(\alpha)Z^2 - Z\Psi(\alpha, Z), \end{cases} \tag{3}$$

$$\Psi(\alpha, Z) = a(\alpha) + b(\alpha)Z + c(\alpha)Z^2;$$

при этом уравнение (2) на v отделяется, что дает возможность рассматривать два оставшихся уравнения в качестве системы (3) с одной степенью свободы на двумерном многообразии $N^2\{Z;\alpha\}$ (см. [12, 13, 20]).

Нас прежде всего будет интересовать случай, когда выполнены тождества

$$d(\alpha) \equiv e(\alpha) \equiv f(\alpha) \equiv 0. \tag{4}$$

При этом остальные шесть функций $a(\alpha)$, $b(\alpha)$, $c(\alpha)$, $g(\alpha)$, $h(\alpha)$, $i(\alpha)$, вообще говоря, не равны тождественно нулю. Тогда система (2), (3) имеет естественный аналитический первый интеграл

$$\Phi_1(v;Z) = z = vZ = C_1 = \text{const}. \tag{5}$$

Для полной интегрируемости системы (2), (3) при условии (4) нужно найти еще один первый интеграл, независимый с (5). Для этого можно предъявить достаточные условия существования искомого первого интеграла.

Также отметим важный частный случай системы (2), (3), а именно,

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \tag{6}$$

$$\begin{cases} \alpha' = -Z + bZ^2\delta(\alpha), \\ Z' = -Z\Psi(\alpha, Z), \end{cases} \tag{7}$$

$$\Psi(\alpha, Z) = -bZ^2\frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha},$$

$b \geqslant 0$, $\delta(\alpha)$ — некоторая гладкая функция, как системы при отсутствии внешнего поля сил. При этом уравнение на v также отделяется, что дает возможность рассматривать два оставшихся уравнения в качестве системы с одной степенью свободы на двумерном многообразии $N^2\{Z;\alpha\}$.

Система (6), (7) имеет два гладких первых интеграла:

$$\Phi_0(v;Z;\alpha) = v^2(1 - 2bZ\delta(\alpha)) = C_0 = \text{const},$$
$$\Phi_1(v;Z) = vZ = C_1 = \text{const}.$$

Другими словами, независимая подсистема (7) на $N^2\{Z;\alpha\}$ имеет рациональный по Z первый интеграл вида (см. также [24, 31])

$$\Phi(Z;\alpha) = \frac{1 - 2bZ\delta(\alpha)}{Z^2} = C = \text{const}, \tag{8}$$

который не имеет существенно особых точек. В силу последнего подсистема (7) не имеет притягивающих или отталкивающих предельных множеств, позволяющих говорить о наличии в системе диссипации того или иного знака.

Добавляя в систему (6), (7) внешнее силовое поле $F(\alpha)$ при $b>0$

$$\begin{cases} v' = \Psi(\alpha, Z)v, \\ \alpha' = -Z + bZ^2\delta(\alpha), \\ Z' = F(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z), \end{cases}$$

создается впечатление, что система осталась консервативной (что и имеет место при $b=0$; см. [4, 8, 17]). Действительно, при некотором условии у нее существует гладкий первый интеграл вида

$$\Phi_1(v;Z;\alpha) = v^2(Z^2 + F_1(\alpha)) = C_1 = \mathrm{const}, \quad \frac{dF_1(\alpha)}{d\alpha} = 2F(\alpha),$$

структура которого напоминает интеграл полной энергии. Но дополнительного гладкого первого интеграла система, вообще говоря, не имеет. Более того, если

$$F(\alpha) = \delta(\alpha)\frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha},$$

дополнительный первый интеграл является трансцендентной функцией фазовых переменных (т.е. имеет существенно особые точки, означающие наличие в системе притягивающих предельных множеств; см. [11, 28, 32]).

Аналогично были рассмотрены системы пятого, седьмого и девятого порядков на многообразии с ненулевыми коэффициентами связности Γ^i_{jk} (см. [34]):

$$\begin{cases} v' = \Psi(\alpha, Z)v, \\ \alpha' = -Z_4 + b(Z_1^2 + \ldots + Z_4^2)\delta(\alpha) + b_1F(\alpha)\tilde{f}(\alpha), \\ Z_4' = F(\alpha) + \Gamma_4 f^2(\alpha)Z_3^2 + \Gamma_4 f^2(\alpha)Z_2^2 + \Gamma_4 f^2(\alpha)Z_1^2 - Z_4\Psi(\alpha, Z), \\ Z_3' = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_3Z_4 - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)f(\alpha)g^2(\beta_1)Z_2^2 - \\ \qquad\qquad - \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)f(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)Z_1^2 - Z_3\Psi(\alpha, Z), \\ Z_2' = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_2Z_4 - \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f(\alpha)Z_2Z_3 - \\ \qquad\qquad - \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)f(\alpha)g(\beta_1)h^2(\beta_2)Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z), \\ Z_1' = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_1Z_4 - \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f(\alpha)Z_1Z_3 - \\ \qquad\qquad - \left[2\Gamma_3(\beta_2) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] f(\alpha)g(\beta_1)Z_1Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z), \\ \beta_1' = Z_3 f(\alpha), \\ \beta_2' = Z_2 f(\alpha)g(\beta_1), \\ \beta_3' = Z_1 f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2), \end{cases}$$

$$\Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + \ldots + Z_4^2)\tilde{\delta}(\alpha) + b_1F(\alpha)\delta(\alpha), \quad \tilde{f}(\alpha) = \frac{\mu - \delta^2(\alpha)}{\tilde{\delta}(\alpha)},$$

$Z = (Z_1, \ldots, Z_4)$, $z_k = Z_k v$, $k = 1, \ldots, 4$, $b \geqslant 0$, $\delta(\alpha)$, $f(\alpha)$, $g(\beta_1)$, $h(\beta_2)$ — некоторые гладкие функции, как системы при отсутствии внешнего поля сил, в которых также присутствуют коэффициенты при параметре $b \geqslant 0$. Но данные коэффициенты не нарушают консервативности, поскольку данные системы обладают полным набором (шестью) гладких первых интегралов (см. [16, 21, 23]).

2. Системы произвольного нечетного порядка при отсутствии внешнего силового поля. Перейдем теперь к системам произвольного нечетного порядка. Пусть v, α, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$ — фазовые переменные в системе, правые части которой — однородные полиномы степени 2 по переменным v, z (см. также [1, 2, 29, 30]) с коэффициентами, зависящими от α, β. Тогда, выбирая в качестве нового времени переменную q ($dq = v\,dt$, $d/dq = \langle\,'\,\rangle$,

$v \neq 0$), будем рассматривать систему $(2n+1)$-го порядка

$$v' = \Psi(\alpha, Z)v, \tag{9}$$

$$l \begin{cases} \alpha' = -Z_n + b(Z_1^2 + \ldots + Z_n^2)\delta(\alpha), \\ Z_n' = \Gamma_{11}^{\alpha} f_1^2(\alpha) Z_{n-1}^2 + \Gamma_{22}^{\alpha} f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) Z_{n-2}^2 + \ldots + \\ \quad + \ldots + \Gamma_{n-1,n-1}^{\alpha} f_{n-1}^2(\alpha) g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \ldots i_1^2(\beta_{n-2}) Z_1^2 - Z_n \Psi(\alpha, Z), \\ Z_{n-1}' = \left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)\right] Z_{n-1} Z_n - \Gamma_{22}^1(\alpha,\beta) \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) Z_{n-2}^2 - \\ \quad - \ldots - \Gamma_{n-1,n-1}^1(\alpha,\beta) \dfrac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \ldots i_1^2(\beta_{n-2}) Z_1^2 - Z_{n-1}\Psi(\alpha, Z), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Z_2' = \left[2\Gamma_{\alpha,n-2}^{n-2}(\alpha,\beta) + Df_{n-2}(\alpha)\right] Z_2 Z_n - \left[2\Gamma_{1,n-2}^{n-2}(\alpha,\beta) + Dg_{n-3}(\beta_1)\right] f_1(\alpha) Z_2 Z_{n-1} - \\ \quad - \ldots - \left[2\Gamma_{n-3,n-2}^{n-2}(\alpha,\beta) + Dr_1(\beta_{n-3})\right] f_{n-3}(\alpha) g_{n-4}(\beta_1) h_{n-5}(\beta_2) \ldots s_1(\beta_{n-4}) Z_2 Z_3 - \\ \quad - \Gamma_{n-1,n-1}^{n-2}(\alpha,\beta) \dfrac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)} \dfrac{g_{n-2}^2(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)} \dfrac{h_{n-3}^2(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)} \ldots \dfrac{r_2^2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})} i_1^2(\beta_{n-2}) Z_1^2 - Z_2 \Psi(\alpha, Z), \\ Z_1' = \left[2\Gamma_{\alpha,n-1}^{n-1}(\alpha,\beta) + Df_{n-1}(\alpha)\right] Z_1 Z_n - \left[2\Gamma_{1,n-1}^{n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)\right] f_1(\alpha) Z_1 Z_{n-1} - \\ \quad - \left[2\Gamma_{2,n-1}^{n-1}(\alpha,\beta) + Dh_{n-3}(\beta_2)\right] f_2(\alpha) g_1(\beta_1) Z_1 Z_{n-2} - \\ \quad - \ldots - \left[2\Gamma_{n-2,n-1}^{n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})\right] \times \\ \qquad\qquad \times f_{n-2}(\alpha) g_{n-3}(\beta_1) h_{n-4}(\beta_2) \ldots r_1(\beta_{n-3}) Z_1 Z_2 - Z_1 \Psi(\alpha, Z), \\ \beta_1' = Z_{n-1} f_1(\alpha), \\ \beta_2' = Z_{n-2} f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \\ \beta_3' = Z_{n-3} f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h_1(\beta_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_{n-1}' = Z_1 f_{n-1}(\alpha) g_{n-2}(\beta_1) h_{n-3}(\beta_2) \ldots i_1(\beta_{n-2}), \end{cases} \tag{10}$$

$$\Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + \ldots + Z_n^2)\tilde{\delta}(\alpha), \quad \tilde{\delta}(\alpha) = \frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha}, \quad DQ(w) = \frac{d \ln |Q(w)|}{dw},$$

$Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$, $z_s = Z_s v$, $s = 1, \ldots, n$, $b \geqslant 0$, $\delta(\alpha)$, $f_k(\alpha)$, $k = 1, \ldots, n-1$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \ldots, n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \ldots, n-3, \ldots, i_1(\beta_{n-2})$ — некоторые гладкие функции, как систему при отсутствии внешнего поля сил. При этом уравнение (9) отделяется, что дает возможность рассматривать уравнения (10) в качестве независимой системы (с n степенями свободы) на $2n$-мерном многообразии $N^{2n}\{Z_n, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\} = TM^n\{Z_n, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}$ (касательном расслоении гладкого n-мерного многообразия $M^n\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}$, см. также [25, 27, 33]).

Рассмотрим структуру системы (10). Она для простоты соответствует следующим уравнениям геодезических линий на касательном расслоении $TM^n\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}_1, \ldots, \dot{\beta}_{n-1};\ \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}$ многообразия $M^n\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}$ (в частности, сферы или более общих поверхностей вращения — с $n(n-1)$ ненулевыми коэффициентами связности):

$$\ddot{\alpha} + \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + \ldots + \Gamma_{n-1,n-1}^{\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \tag{11a}$$

$$\ddot{\beta}_1 + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + \ldots + \Gamma_{n-1,n-1}^1(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \tag{11b}$$

$$\ddot{\beta}_2 + 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma_{12}^2(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \Gamma_{33}^2(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 + \\ + \ldots + \Gamma_{n-1,n-1}^2(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \tag{11c}$$

$$\ddot{\beta}_3 + 2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + 2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 + \Gamma^3_{44}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_4^2 + \\ + \ldots + \Gamma^3_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \tag{11d}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ddot{\beta}_{n-2} + 2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-2} + 2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-2} + \\ + \ldots + 2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-3}\dot{\beta}_{n-2} + \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \tag{11e}$$

$$\ddot{\beta}_{n-1} + 2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-1} + 2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-1} + \\ + \ldots + 2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-2}\dot{\beta}_{n-1} = 0. \tag{11f}$$

Действительно, выбрав новые координаты $Z_1, \ldots, Z_n$ в касательном пространстве в виде

$$\begin{aligned} \alpha' &= -Z_n, \\ \beta_1' &= Z_{n-1} f_1(\alpha), \\ \beta_2' &= Z_{n-2} f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \\ \beta_3' &= Z_{n-3} f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h_1(\beta_2), \\ &\ldots \\ \beta_{n-1}' &= Z_1 f_{n-1}(\alpha) g_{n-2}(\beta_1) h_{n-3}(\beta_2) \ldots i_1(\beta_{n-2}), \end{aligned} \tag{12}$$

получим соотношения на них в виде (ср. с системой (10))

$$Z_1' = \left[2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) + Df_{n-1}(\alpha)\right] Z_1 Z_n - \left[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)\right] f_1(\alpha) Z_1 Z_{n-1} - \\ - \left[2\Gamma^{n-1}_{2,n-1}(\alpha,\beta) + Dh_{n-3}(\beta_2)\right] f_2(\alpha) g_1(\beta_1) Z_1 Z_{n-2} - \\ - \ldots - \left[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})\right] f_{n-2}(\alpha) g_{n-3}(\beta_1) h_{n-4}(\beta_2) \ldots r_1(\beta_{n-3}) Z_1 Z_2, \tag{13a}$$

$$Z_2' = \left[2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta) + Df_{n-2}(\alpha)\right] Z_2 Z_n - \left[2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta) + Dg_{n-3}(\beta_1)\right] f_1(\alpha) Z_2 Z_{n-1} - \\ - \ldots - \left[2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta) + Dr_1(\beta_{n-3})\right] f_{n-3}(\alpha) g_{n-4}(\beta_1) h_{n-5}(\beta_2) \ldots s_1(\beta_{n-4}) Z_2 Z_3 - \\ - \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)} \frac{g_{n-2}^2(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)} \frac{h_{n-3}^2(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)} \ldots \frac{r_2^2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})} i_1^2(\beta_{n-2}) Z_1^2, \tag{13b}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Z_{n-1}' = \left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)\right] Z_{n-1} Z_n - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) Z_{n-2}^2 - \\ - \ldots - \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \ldots i_1^2(\beta_{n-2}) Z_1^2, \tag{13c}$$

$$Z_n' = \Gamma^\alpha_{11} f_1^2(\alpha) Z_{n-1}^2 + \Gamma^\alpha_{22} f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) Z_2^2 + \\ + \ldots + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1} f_{n-1}^2(\alpha) g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \ldots i_1^2(\beta_{n-2}) Z_1^2, \tag{13d}$$

при этом уравнения (11) почти всюду эквивалентны совокупности (12), (13), которая, прежде всего, присутствует в системе (10).

Далее, в системе (10) также присутствуют коэффициенты при параметре $b \geqslant 0$. Но они не нарушают консервативности, поскольку система (9), (10) при некоторых естественных условиях обладает полным набором $(n+2)$ гладких первых интегралов (то, что полный набор состоит не из $2n$, а из $n+2$ первых интегралов, будет показано ниже).

Следующие утверждения для систем произвольного нечетного порядка доказываются аналогично соответствующим утверждениям для систем девятого порядка (см. [37]).

Предложение 1. *Если всюду на своей области определения справедлива система равенств*

$$2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) f_1^2(\alpha) \equiv 0, \tag{14a}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)+Df_{n-1}(\alpha)+\\ +\Gamma^{\alpha}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f^2_{n-1}(\alpha)g^2_{n-2}(\beta_1)h^2_{n-3}(\beta_2)\dots i^2_1(\beta_{n-2})\equiv 0, \tag{14b}$$

$$\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+Dg_1(\beta_1)\right]f^2_1(\alpha)+\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)f^2_2(\alpha)g^2_1(\beta_1)\equiv 0, \tag{14c}$$

....

$$\left[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)+Dg_{n-2}(\beta_1)\right]f^2_1(\alpha)+\\ +\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f^2_{n-1}(\alpha)g^2_{n-2}(\beta_1)h^2_{n-3}(\beta_2)\dots i^2_1(\beta_{n-2})\equiv 0, \tag{14d}$$

....

$$\left[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)+Di_1(\beta_{n-2})\right]f^2_{n-2}(\alpha)g^2_{n-3}(\beta_1)h^2_{n-4}(\beta_2)\dots r^2_1(\beta_{n-3})+\\ +\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f^2_{n-1}(\alpha)g^2_{n-2}(\beta_1)h^2_{n-3}(\beta_2)\dots i^2_1(\beta_{n-2})\equiv 0, \tag{14e}$$

то система (9), (10) *имеет аналитический первый интеграл вида*

$$\Phi_1(v;Z_n,\dots,Z_1)=v^2(Z^2_1+\dots+Z^2_n)=C^2_1=\mathrm{const}. \tag{15}$$

На первый взгляд, вопрос наличия первого интеграла достаточно простого вида (15) не «заслуживает» решения такой достаточно сложной системы квазилинейных уравнений (14) (которая содержит, вообще говоря, уравнения в частных производных). В работе будет применен подход, позволяющий с помощью решения системы (14) успешно находить полные наборы первых интегралов систем с диссипацией.

Можно доказать отдельную теорему существования решения $f_k(\alpha)$, $k=1,\dots,n-1$, $g_l(\beta_1)$, $l=1,\dots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m=1,\dots,n-3,\dots,i_1(\beta_{n-2})$ системы (14) квазилинейных уравнений для наличия аналитического первого интеграла (15) для системы (12), (13) уравнений геодезических (11). Но в дальнейшем при изучении динамических систем с диссипацией полная группа условий (14) нам не потребуется.

Тем не менее в дальнейшем будем предполагать в уравнениях (12) выполнение условий

$$f_1(\alpha)=\dots=f_{n-1}(\alpha)=f(\alpha); \tag{16}$$

при этом функции $g_l(\beta_1)$, $l=1,\dots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m=1,\dots,n-3,\dots,i_1(\beta_{n-2})$ должны удовлетворять преобразованным уравнениям из (14):

$$\begin{cases} 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+Dg_1(\beta_1)+\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)g^2_1(\beta_1)\equiv 0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ 2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)+Dg_{n-2}(\beta_1)+\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)g^2_{n-2}(\beta_1)h^2_{n-3}(\beta_2)\dots i^2_1(\beta_{n-2})\equiv 0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ 2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)+Di_1(\beta_{n-2})g^2_{n-3}(\beta_1)h^2_{n-4}(\beta_2)\dots r^2_1(\beta_{n-3})+\\ \qquad +\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)g^2_{n-2}(\beta_1)h^2_{n-3}(\beta_2)\dots i^2_1(\beta_{n-2})\equiv 0. \end{cases} \tag{17}$$

Таким образом, функции $g_l(\beta_1)$, $l=1,\dots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m=1,\dots,n-3,\dots,i_1(\beta_{n-2})$ пока зависят от коэффициентов связности через систему (17), а ограничения на функцию $f(\alpha)$ будут даны ниже.

Предложение 2. *Если выполнены свойства* (16), (17), *при этом справедливы равенства*

$$\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)=\dots=\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)=\Gamma_1(\alpha), \tag{18}$$

то система (9), (10) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_2(v;Z_{n-1},\dots,Z_1;\alpha)=v^2\sqrt{Z^2_1+\dots+Z^2_{n-1}}\,\delta(\alpha)=C_2=\mathrm{const}; \tag{19}$$

при этом функция $\delta(\alpha)$ *должна удовлетворять равенству*

$$\delta(\alpha)=A_1f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\},\quad A_1=\mathrm{const}. \tag{20}$$

Предложение 3. *Если выполнены условия предложения* 2, *а также*
$$g_1(\beta_1) = \ldots = g_{n-2}(\beta_1) = g(\beta_1), \tag{21}$$
и при этом справедливы равенства
$$\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) = \ldots = \Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) = \Gamma_2(\beta_1), \tag{22}$$
то система (9), (10) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:
$$\Phi_3(v; Z_{n-2},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1) = v^2\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-2}^2}\,\delta(\alpha)\Psi_1(\beta_1) = C_3 = \mathrm{const}, \tag{23}$$
$$\Psi_1(\beta_1) = g(\beta_1)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)db\right\}.$$

Далее применяем по индукции вышеизложенные рассуждения и приходим к следующему утверждению.

Предложение 4. *Если выполнены условия предложений* 2, 3 *и при этом справедливо равенство*
$$\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) = \Gamma_{n-1}(\beta_2), \tag{24}$$
то система (9), (10) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:
$$\Phi_n(v; Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = v^2 Z_1\delta(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\ldots\Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) = C_n = \mathrm{const}, \tag{25}$$
$$\Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) = i_1(\beta_{n-2})\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}}\Gamma_{n-1}(b)db\right\}.$$

Предложение 5. *Пусть выполнены свойства* (16), (21), *нивелирующие индексы у функций* $f_k(\alpha)$, $k=1,\ldots,n-1$, $g_l(\beta_1)$, $l=1,\ldots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m=1,\ldots,n-3,\ldots,i_1(\beta_{n-2})$, *и*
$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) = \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1) = \ldots = \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\ldots = \Gamma_n(\alpha). \tag{26}$$
Тогда система (9), (10) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:
$$\Phi_0(v; Z_n;\alpha) = v^2(1-2bZ_n\delta(\alpha)) = C_0 = \mathrm{const}, \tag{27}$$
если функция $\delta(\alpha)$ *удовлетворяет равенству*
$$\delta(\alpha) = A_2\exp\left\{-\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_n(b)f^2(b)db\right\},\quad A_2 = \mathrm{const}.$$

В частности, если выполнены свойства (14), (16), (18), (20), (21), (26), то система (9), (10) имеет гладкий первый интеграл вида (27).

Предложение 6. *Если выполнены условия предложений* 3, 4, *то система* (9), (10) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:
$$\Phi_{n+1}(\beta_{n-2},\beta_{n-1},C_{n-1},C_n) = \beta_{n-1} + \int\limits_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}}\frac{C_n i(b)}{\sqrt{C_{n-1}^2\Psi_{n-2}^2(b)-C_n^2}}\,db = C_{n+1} = \mathrm{const}, \tag{28}$$
где после взятия интеграла (28) *вместо постоянных* C_{n-1}, C_n *можно подставить левые части соответствующих равенств.*

Прямым следствием предложений 1—6 является основная теорема данного раздела.

Теорема 1. *Если выполнены условия предложений* 1–6, *то система* (9), (10) *обладает полным набором* $(n+2)$ *гладких независимых первых интегралов вида* (15), (19), (23), (25), (27), (28).

3. Введение внешнего силового поля и унимодулярные преобразования для систем произвольного нечетного порядка. Модифицируем систему (9), (10) при условиях (16), (18), (21), (22), (24), (26) при наличии двух ключевых параметров $b, b_1 \geqslant 0$, введя внешнее силовое поле. Если ввести такое поле, добавив коэффициент $F(\alpha)$ лишь в уравнение на Z_n' системы (29), (30) и даже положив при этом $b_1 = 0$, то полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность будет при дополнительном условии: $b = 0$. Но мы расширим введение силового поля, положив $b_1 > 0$. Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения $T^*M^n\{Z_n, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}$ примет вид

$$v' = \Psi(\alpha, Z)v, \tag{29}$$

$$\begin{cases} \alpha' = -Z_n + b(Z_1^2 + \ldots + Z_n^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\tilde{f}(\alpha), \\ Z_n' = F(\alpha) + \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) Z_{n-1}^2 + \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) g^2(\beta_1) Z_2^2 + \\ \qquad + \ldots + \Gamma_{n-1,n-1}^{\alpha}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2}) Z_1^2 - Z_n \Psi(\alpha, Z), \\ Z_{n-1}' = \big[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\big] Z_{n-1} Z_n - \Gamma_{22}^1(\alpha,\beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) Z_{n-2}^2 - \\ \qquad - \ldots - \Gamma_{n-1,n-1}^1(\alpha,\beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2}) Z_1^2 - Z_{n-1}\Psi(\alpha, Z), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Z_2' = \big[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\big] Z_2 Z_n - \big[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)\big] f(\alpha) Z_2 Z_{n-1} - \\ \qquad - \ldots - \big[2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3}) + Dr(\beta_{n-3})\big] f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\ldots s(\beta_{n-4}) Z_2 Z_3 - \\ \qquad - \Gamma_{n-1,n-1}^{n-2}(\alpha,\beta) f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\ldots r(\beta_{n-3}) i^2(\beta_{n-2}) Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z), \\ Z_1' = \big[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\big] Z_1 Z_n - \big[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)\big] f_1(\alpha) Z_1 Z_{n-1} - \\ \qquad - \big[2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2)\big] f(\alpha) g(\beta_1) Z_1 Z_{n-2} - \\ \qquad - \ldots - [2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di(\beta_{n-2})] \times \\ \qquad\qquad \times f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\ldots r(\beta_{n-3}) Z_1 Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z), \\ \beta_1' = Z_{n-1} f(\alpha), \\ \beta_2' = Z_{n-2} f(\alpha) g(\beta_1), \\ \beta_3' = Z_{n-3} f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_{n-1}' = Z_1 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\ldots i(\beta_{n-2}), \end{cases} \tag{30}$$

$$\Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + \ldots + Z_n^2)\tilde{\delta}(\alpha) + b_1 F(\alpha)\delta(\alpha), \quad \tilde{f}(\alpha) = \frac{\mu - \delta^2(\alpha)}{\tilde{\delta}(\alpha)},$$

$\mu = \mathrm{const}$. При этом коэффициенты консервативной (внутренней) составляющей силового поля содержат параметр b, а неконсервативной составляющей внешнего поля — параметр b_1.

Силовое поле в уравнениях на v', $Z_1', \ldots, Z_n'$ определяется функцией $\Psi(\alpha, Z)$. Опишем введение силового поля в виде двумерного столбца, в первой строке которого стоят соответствующие коэффициенты из функции $\Psi(\alpha, Z)$, а во второй строке — соответствующие коэффициенты из уравнения на α'. Таким образом, совместное силовое поле (в котором присутствуют три параметра $b, b_1 \geqslant 0$, $\mu \in \mathbb{R}$) будет иметь вид

$$U \begin{pmatrix} b(Z_1^2 + \ldots + Z_n^2) \\ b_1 F(\alpha) \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} -\tilde{\delta}(\alpha) & \delta(\alpha) \\ \delta(\alpha) & \tilde{f}(\alpha) \end{pmatrix},$$

где U — преобразование с определителем, равным $-\mu$, и являющимся унимодулярным преобразованием при $\mu = \pm 1$. Такое преобразование вносит в систему диссипацию (как одного знака, так и другого; см. также [35, 36]).

4. Интегрирование системы произвольного нечетного порядка с диссипацией. Перейдем теперь к интегрированию искомой системы $(2n+1)$-го порядка (29), (30) при выполнении свойств (17). Она также допускает отделение независимой подсистемы $(2n-1)$-го порядка.

Введем также (по аналогии с (17)) ограничение и на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять преобразованному первому равенству из (14):

$$2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha) \equiv 0. \tag{31}$$

Для полного интегрирования системы (30) необходимо знать, вообще говоря, $(2n-1)$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$w_n = Z_n, \quad w_{n-1} = \sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2}, \quad w_{n-2} = \frac{Z_2}{Z_1},$$
$$w_{n-3} = \frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}, \quad \ldots, \quad w_1 = \frac{Z_{n-1}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_2^{n-2}}}$$

система (30) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \alpha' = -w_n + b(w_n^2 + w_{n-1}^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\tilde{f}(\alpha), \\ w_n' = F(\alpha) + \Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha)w_{n-1}^2 - w_n\Psi(\alpha, w), \\ w_{n-1}' = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] w_{n-1}w_n - w_{n-1}\Psi(\alpha, w), \end{cases} \tag{32}$$

$$\begin{cases} w_s' = \pm w_{n-1}\sqrt{1+w_s^2} f(\alpha)\ldots \left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + \dfrac{d\ln|j(\beta_s)|}{d\beta_s}\right], \\ \beta_s' = \pm \dfrac{w_s w_{n-1}}{\sqrt{1+w_s^2}} f(\alpha)\ldots, \quad s = 1, \ldots, n-2, \end{cases} \tag{33}$$

$$\beta_{n-1}' = \pm \frac{w_{n-1}}{\sqrt{1+w_{n-2}^2}} f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots i(\beta_{n-2}), \tag{34}$$

$$\Psi(\alpha, w) = -b(w_n^2 + w_{n-1}^2)\tilde{\delta}(\alpha) + b_1 F(\alpha)\delta(\alpha), \quad \tilde{f}(\alpha) = \frac{\mu - \delta^2(\alpha)}{\tilde{\delta}(\alpha)},$$

где в системе (33) многоточием обозначены одинаковые члены, а функция $j(\beta_s)$ — одна из функций $g, h, \ldots$, зависящая от соответствующего угла β_s.

Видно, что для полной интегрируемости системы (30) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (32), по одному — для систем (33) (меняя в них независимые переменные; их $n-2$ штук), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (34) (т.е. всего $n+1$).

Теорема 2. *Пусть для некоторых $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ выполняются равенства*

$$\Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha) = \kappa\frac{d}{d\alpha}\ln|\delta(\alpha)|, \quad F(\alpha) = \lambda\frac{d}{d\alpha}\frac{\delta^2(\alpha)}{2}. \tag{35}$$

Тогда система (29), (30) *при выполнении свойств* (17), (31) *обладает* $n+2$ *независимыми* (*вообще говоря, трансцендентными в смысле комплексного анализа*) *первыми интегралами* (см. [5, 22]).

Первое равенство из (35) можно назвать *геометрическим*, а второе — *энергетическим.*

Доказательство. Для начала поставим в соответствие рассматриваемой подсистеме третьего порядка (32) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned}
\frac{dw_n}{d\alpha} &= \frac{F(\alpha) + \Gamma_n(\alpha) f^2(\alpha) w_{n-1}^2 + b w_n (w_n^2 + w_{n-1}^2)\tilde{\delta}(\alpha) - b_1 w_n F(\alpha)\delta(\alpha)}{-w_n + b(w_n^2 + w_{n-1}^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\tilde{f}(\alpha)}, \\
\frac{dw_{n-1}}{d\alpha} &= \frac{\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] w_{n-1} w_n + b w_{n-1}(w_n^2 + w_{n-1}^2)\tilde{\delta}(\alpha) - b_1 w_{n-1} F(\alpha)\delta(\alpha)}{-w_n + b(w_n^2 + w_{n-1}^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\tilde{f}(\alpha)}.
\end{aligned} \tag{36}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_{n-1} = u_1 \delta(\alpha), \quad w_n = u_2 \delta(\alpha), \tag{37}$$

пользуясь (35), приводим систему (36) к следующему виду:

$$\begin{aligned}
\delta \frac{du_2}{d\delta} + u_2 &= \frac{\lambda + b u_2 (u_1^2 + u_2^2)\delta^2 - b_1 \lambda u_2 \delta^2 + \kappa u_1^2}{-u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\delta^2 + b_1 \lambda(\mu - \delta^2)}, \\
\delta \frac{du_1}{d\delta} + u_1 &= \frac{b u_1 (u_1^2 + u_2^2)\delta^2 - b_1 \lambda u_1 \delta^2 - \kappa u_1 u_2}{-u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\delta^2 + b_1 \lambda(\mu - \delta^2)}.
\end{aligned} \tag{38}$$

В дальнейшем система (38) приводится к уравнению первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda - b_1 \lambda \mu u_2 + u_2^2 + \kappa u_1^2}{(1 - \kappa) u_1 u_2 - b_1 \lambda \mu u_1}. \tag{39}$$

Уравнение (39) имеет вид уравнения Абеля (см. [5]). Для примера, при $\kappa = -1$ оно имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 - b_1 \lambda \mu u_2 + \lambda}{u_1} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{40}$$

который в прежних переменных имеет вид

$$\Theta_1(w_n, w_{n-1}; \alpha) = G_1\left(\frac{w_n}{\delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\delta(\alpha)}\right) = \frac{w_n^2 + w_{n-1}^2 - b_1 \lambda \mu w_n \delta(\alpha) + \lambda \delta^2(\alpha)}{w_{n-1}\delta(\alpha)} = C_1 = \mathrm{const}. \tag{41}$$

В общем случае первые интегралы выписываются громоздко. В частности, если $\kappa = -1$, то явный вид одного из первых интегралов только что приведен.

При помощи интеграла (41) получается и дополнительный первый интеграл для системы (32):

$$\Theta_2(w_n, w_{n-1}; \alpha) = G_2\left(\delta(\alpha), \frac{w_n}{\delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\delta(\alpha)}\right) = C_2 = \mathrm{const}. \tag{42}$$

Выражение первого интеграла (42) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\delta(\alpha)$. Например, при $\kappa = -1$ этот первый интеграл найдется из уравнения Бернулли

$$\begin{gathered}
\frac{d\delta}{du_n} = \frac{(b_1 \lambda \mu - u_n)\delta + b\delta^3 (U^2(C_1, u_n) + u_n^2) - b_1 \lambda \delta^3}{\lambda - b_1 \lambda \mu u_n + u_n^2 - U^2(C_1, u_n)}, \\
U(C_1, u_n) = \frac{1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(\lambda - b_1 \lambda \mu u_n + u_n^2)}\right\}, \quad u_n = \frac{w_n}{\delta(\alpha)}.
\end{gathered}$$

При этом после взятия этого интеграла вместо C_1 можно подставить левую часть равенства (41) (или (40)).

Первые интегралы для независимых подсистем (33) (после замен независимых переменных в них) будут иметь вид

$$\Theta_{2+s}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\Phi_s(\beta_s)} = C_{2+s} = \mathrm{const}, \quad s = 1, \ldots, n-2; \tag{43}$$

о функциях $\Psi_s(\beta_s)$ см. (23), (25). Дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (34), находится по аналогии с (28):

$$\Theta_{n+1}(\beta_{n-2},\beta_{n-1},C_{n-1},C_n)=\beta_{n-1}\pm\int\limits_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}}\frac{C_n i(b)}{C_{n-1}^2\Psi_{n-2}^2(b)-C_n^2}\,db=C_{n+1}=\text{const},$$

где после взятия этого интеграла вместо постоянных C_{n-1}, C_n можно подставить левые части соответствующих равенств (43).

Кроме того, у системы (29), (30) существует гладкий первый интеграл (по аналогии с (27), «привязывающий» уравнение (29)), который, например, при $b=b_1$, $\mu=1$ имеет вид

$$\Theta_0(v;w_n,w_{n-1};\alpha)=v^2(1-2bw_n\delta(\alpha)+b^2(w_n^2+w_{n-1}^2))=C_0=\text{const}. \qquad \square$$

Справедлива и теорема, обратная к теореме 2.

Теорема 3. *Условия* (17), (31), (35) (*например, при* $\kappa=-1$) *являются необходимыми условиями существования первого интеграла* (41) *для системы* (29), (30).

5. Строение первых интегралов для систем произвольного нечетного порядка с диссипацией. Если α — периодическая координата периода 2π, то система (29), (30) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним (см. [26, 28]). При этом при $F(\alpha)\equiv 0$ она превращается в систему консервативную (9), (10). Последняя, в частности, обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (15), (19). Более того, если функция $F(\alpha)$ не равна тождественно нулю, но $b_1=0$, то система (29), (30) при втором условии из (35) обладает первым интегралом вида

$$\Theta_0(v;Z_n,\ldots,Z_1;\alpha)=v^2(Z_1^2+\ldots+Z_n^2+\lambda\delta^2(\alpha))=\text{const}. \tag{44}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (44), (19) также является первым интегралом системы (29), (30), если функция $F(\alpha)$ не равна тождественно нулю, но $b_1=0$. При $b_1>0$ каждая из функций

$$\Theta_{b_1}(v;Z_n,\ldots,Z_1;\alpha)=v^2(Z_1^2+\ldots+Z_n^2-b_1\lambda\mu Z_n\delta(\alpha)+\lambda\delta^2(\alpha)) \tag{45}$$

и (19) по отдельности не являются первыми интегралами системы (29), (30). Однако отношение функций (45), (19) является первым интегралом (41) системы (29), (30) (при $\kappa=-1$) при любом $b_1>0$.

Вообще же, как и указывалось ранее, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств.

6. Некоторые многомерные приложения. Выделим существенный случай для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на $(n-1)$-мерной сфере, и функции $\delta(\alpha)$:

$$f(\alpha)=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\quad \delta(\alpha)=\sin\alpha. \tag{46}$$

Случай (46) формирует класс систем (29), (30) при $\mu=1$, соответствующих движению n-мерного динамически симметричного твердого тела на нулевых уровнях циклических интегралов в неконсервативном поле сил (ср. с [9, 10]):

$$v'=v\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z), \tag{47}$$

$$\alpha'=-Z_{n-1}+b\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\sin\alpha+bF(\alpha)\cos\alpha, \tag{48}$$

$$Z'_{n-1}=F(\alpha)-\left(\sum_{s=1}^{n-2}Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+bZ_{n-1}\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\cos\alpha-bZ_{n-1}F(\alpha)\sin\alpha, \tag{49}$$

$$Z'_{n-2} = Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \left(\sum_{s=1}^{n-3} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + bZ_{n-2}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - bZ_{n-2}F(\alpha)\sin\alpha, \quad (50)$$

$$Z'_{n-3} = Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \left(\sum_{s=1}^{n-4} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} +$$
$$+bZ_{n-3}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - bZ_{n-3}F(\alpha)\sin\alpha, \quad (51)$$

$$\ldots$$

$$Z'_1 = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\} + bZ_1\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - bZ_1F(\alpha)\sin\alpha, \quad (52)$$

$$\beta'_1 = Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad (53)$$

$$\beta'_2 = -Z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \quad (54)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\beta'_{n-3} = (-1)^n Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}}, \quad (55)$$

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1} Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}, \quad (56)$$

где

$$\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z) = -b(Z_1^2+\ldots+Z_{n-1}^2)\cos\alpha + bF(\alpha)\sin\alpha.$$

В частности, при $\delta(\alpha)\equiv F(\alpha)\equiv 0$ рассматриваемая система описывает геодезический поток на $(n-1)$-мерной сфере.

Итак, система (47)—(56) может быть рассмотрена на своем фазовом $(2(n-1)+1)$-мерном многообразии

$$W_1 = \mathbb{R}_+^1\{v\}\times T_*\mathbf{S}^{n-1}\{Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}, \quad (57)$$

т.е. на прямом произведении числового луча на касательное расслоение к $(n-1)$-мерной сфере.

Видно, что в системе (47)—(56) порядка $2(n-1)+1$ образовалась независимая система (48)—(56) порядка $2(n-1)$ на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$. При этом в независимой системе (48)—(56) порядка $2(n-1)$ образовалась еще одна независимая система (48)—(55) порядка $2n-3$ на своем $(2n-3)$-мерном многообразии.

В случае (46), если $\delta(\alpha)=F(\alpha)/\cos\alpha$, система описывает движение n-мерного твердого тела в силовом поле $F(\alpha)$ под действием следящей силы (см. [8, 9, 18–20]). В частности, если $F(\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha$, $\delta(\alpha)=\sin\alpha$, то система эквивалентна обобщенному (сферическому) n-мерному маятнику, помещенному в некоторое неконсервативное поле, и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций (см. [1, 18]):

$$\ddot\xi + b_*\dot\xi\cos\xi + \sin\xi\cos\xi - \Big[\dot\eta_1^{\,2} + \dot\eta_2^{\,2}\sin^2\eta_1 + \dot\eta_3^{\,2}\sin^2\eta_1\sin^2\eta_2 +$$
$$+\ldots+\dot\eta_{n-2}^2\sin^2\eta_1\ldots\sin^2\eta_{n-3}\Big]\frac{\sin\xi}{\cos\xi} = 0, \quad (58a)$$

$$\ddot\eta_1 + b_*\dot\eta_1\cos\xi + \dot\xi\dot\eta_1\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} - \Big[\dot\eta_2^{\,2} + \dot\eta_3^{\,2}\sin^2\eta_2 + \dot\eta_4^{\,2}\sin^2\eta_2\sin^2\eta_3 +$$
$$+\ldots+\dot\eta_{n-2}^2\sin^2\eta_2\ldots\sin^2\eta_{n-3}\Big]\sin\eta_1\cos\eta_1 = 0, \quad (58b)$$

$$\ddot{\eta}_2 + b_* \dot{\eta}_2 \cos\xi + \dot{\xi}\dot{\eta}_2 \frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\dot{\eta}_1\dot{\eta}_2\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} - \Big[\dot{\eta}_3{}^2 + \dot{\eta}_4{}^2\sin^2\eta_3 + \\ + \dot{\eta}_5{}^2\sin^2\eta_3\sin^2\eta_4 + \ldots + \dot{\eta}_{n-2}^2\sin^2\eta_3\ldots\sin^2\eta_{n-3}\Big]\sin\eta_2\cos\eta_2 = 0, \quad (58c)$$

$$\ddot{\eta}_3 + b_* \dot{\eta}_3 \cos\xi + \dot{\xi}\dot{\eta}_3 \frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\dot{\eta}_1\dot{\eta}_3\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + 2\dot{\eta}_2\dot{\eta}_3\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2} - \Big[\dot{\eta}_4{}^2 + \dot{\eta}_5{}^2\sin^2\eta_4 + \\ + \dot{\eta}_6{}^2\sin^2\eta_4\sin^2\eta_5 + \ldots + \dot{\eta}_{n-2}^2\sin^2\eta_4\ldots\sin^2\eta_{n-3}\Big]\sin\eta_3\cos\eta_3 = 0, \quad (58d)$$

. . . .

$$\ddot{\eta}_{n-4} + b_* \dot{\eta}_{n-4} \cos\xi + \dot{\xi}\dot{\eta}_{n-4} \frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\dot{\eta}_1\dot{\eta}_{n-4}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + \\ + \ldots + 2\dot{\eta}_{n-5}\dot{\eta}_{n-4}\frac{\cos\eta_{n-5}}{\sin\eta_{n-5}} - \Big[\dot{\eta}_{n-3}^2 + \dot{\eta}_{n-2}^2\sin^2\eta_{n-3}\Big]\sin\eta_{n-4}\cos\eta_{n-4} = 0, \quad (58e)$$

$$\ddot{\eta}_{n-3} + b_* \dot{\eta}_{n-3} \cos\xi + \dot{\xi}\dot{\eta}_{n-3} \frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\dot{\eta}_1\dot{\eta}_{n-3}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + \\ + \ldots + 2\dot{\eta}_{n-4}\dot{\eta}_{n-3}\frac{\cos\eta_{n-4}}{\sin\eta_{n-4}} - \dot{\eta}_{n-2}^2\sin\eta_{n-3}\cos\eta_{n-3} = 0, \quad (58f)$$

$$\ddot{\eta}_{n-2} + b_* \dot{\eta}_{n-2} \cos\xi + \dot{\xi}\dot{\eta}_{n-2} \frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\dot{\eta}_1\dot{\eta}_{n-2}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + \\ + \ldots + 2\dot{\eta}_{n-3}\dot{\eta}_{n-2}\frac{\cos\eta_{n-3}}{\sin\eta_{n-3}} = 0, \quad b_* > 0. \quad (58g)$$

Данная система описывает закрепленный пятимерный маятник, помещенный в поток набегающей среды при отсутствии зависимости момента сил от угловой скорости, т.е. механическую систему в неконсервативном поле сил. Вообще говоря, порядок такой системы должен быть равен $2(n-1)$, но фазовая переменная η_{n-2} является циклической, что и приводит к расслоению фазового пространства и понижению порядка. Ее фазовым пространством является касательное расслоение

$$T\mathbf{S}^{n-1}\{\dot{\xi}, \dot{\eta}_1, \ldots, \dot{\eta}_{n-2}, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}\} \quad (59)$$

к $(n-1)$-мерной сфере $\mathbf{S}^{n-1}\{\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}\}$, при этом уравнения, переводящие систему (58) в систему на касательном расслоении к двумерной сфере

$$\dot{\eta}_2 \equiv \dot{\eta}_3 \equiv \ldots \equiv \dot{\eta}_{n-2} \equiv 0, \quad (60)$$

и уравнения больших кругов

$$\dot{\eta}_1 \equiv 0, \quad \dot{\eta}_2 \equiv 0, \quad \ldots, \quad \dot{\eta}_{n-2} \equiv 0 \quad (61)$$

задают семейства интегральных многообразий.

Справедливо также важное замечание, сделанное ранее для систем меньшего порядка (см. [24, 25]). Если функция $\delta(\alpha)$ не является периодической, то почти всегда рассматриваемая система является системой с переменной диссипацией с ненулевым средним (т.е. она является «собственно» диссипативной). Тем не менее, и в этом случае (благодаря теоремам 2 и 3) можно получить явный вид трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Последнее также является новым нетривиальным случаем интегрируемости многомерных диссипативных систем в явном виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Докл. РАН. — 2001. — *380*, № 1. — С. 47–50.
2. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2002. — *383*, № 5. — С. 635–637.
3. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
4. *Дубровин Б. А., Новиков С. П.* О скобках Пуассона гидродинамического типа// Докл. АН СССР. — 1984. — *219*, № 2. — С. 228–237.
5. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971.
6. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — *38*, № 1. — С. 3–67.
7. *Козлов В. В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — *79*, № 3. — С. 307–316.
8. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 4. — С. 3–229.
9. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// в кн.: Полн. собр. соч. Т. 1. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
10. *Чаплыгин С. А.* Избранные труды. — М.: Наука, 1976.
11. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
12. *Шамолин М. В.* Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента// Прикл. мат. мех. — 1993. — *57*, № 4. — С. 40–49.
13. *Шамолин М. В.* Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1996. — *4*. — С. 57–69.
14. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209–210.
15. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — *364*, № 5. — С. 627–629.
16. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — *375*, № 3. — С. 343–346.
17. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете вращательных производных момента сил по угловой скорости// Докл. РАН. — 2005. — *403*, № 4. — С. 482–485.
18. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 5. — С. 169–170.
19. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — *425*, № 3. — С. 338–342.
20. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости в пространственной динамике твердого тела// Докл. РАН. — 2010. — *431*, № 3. — С. 339–343.
21. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — *437*, № 2. — С. 190–193.
22. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — *440*, № 2. — С. 187–190.
23. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *444*, № 5. — С. 506–509.
24. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *442*, № 4. — С. 479–481.
25. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — *453*, № 1. — С. 46–49.
26. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — *449*, № 4. — С. 416–419.

27. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — *457*, № 5. — С. 542–545.
28. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — *20*, № 4. — С. 3–231.
29. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — *461*, № 5. — С. 533–536.
30. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — *464*, № 6. — С. 688–692.
31. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости систем с диссипацией на касательных расслоениях к двумерной и трехмерной сферам// Докл. РАН. — 2016. — *471*, № 5. — С. 547–551.
32. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — *474*, № 2. — С. 177–181.
33. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *482*, № 5. — С. 527–533.
34. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *479*, № 3. — С. 270–276.
35. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *485*, № 5. — С. 583–587.
36. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *487*, № 4. — С. 381–386.
37. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *489*, № 6. — С. 592–598.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: `shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru`