



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2020-26-3-30-39

УДК 517+531.01

Дата: поступления статьи: 17.01.2020
после рецензирования: 18.02.2020
принятия статьи: 28.02.2020

М.В. Шамолин

Институт механики Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация
E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru. ORCID:
<http://orcid.org/0000-0002-9534-0213>

ЗАДАЧИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ И ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ. ЧАСТЬ 5. ЗАДАЧА ДИАГНОСТИРОВАНИЯ (СЛУЧАЙ ТРАЕКТОРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ С ОШИБКОЙ)

АННОТАЦИЯ

Данная статья является пятой работой цикла по дифференциальной и топологической диагностике. В работе дается оценка погрешностей метода полей направлений в случае не точных траекторных измерений, а траекторных измерений с ошибкой, ограниченной по модулю заданной гладкой функцией времени, и в случае, если эта ошибка является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с фиксированными параметрами. Показано, что и в этих более сложных случаях можно указать такое “наилучшее” число необходимых траекторных измерений, при котором предложенные алгоритмы диагностирования будут работать конструктивно, а неисправность будет определяться однозначно.

Ключевые слова: задача диагностирования, алгоритмы диагностирования, траекторное измерение с шумом.

Цитирование. Шамолин М.В. Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Часть 5. Задача диагностирования (случай траекторных измерений с ошибкой) // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2020. Т. 26, № 3. С. 30–39. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-3-30-39>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Шамолин М.В., 2020

Шамолин Максим Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института механики, академик РАЕН, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 119192, Российская Федерация, г. Москва, Мичуринский пр., 1.

1. Случай траекторных измерений с ошибкой

До сих пор рассматривалась задача диагностики систем управления для случая точных траекторных измерений. Но на практике решение задачи контроля и поиска неисправностей сопровождается наличием случайных возмущений и, в частности, случайных возмущений, накладываемых на вектор диагностирования, который формируется из измеряемых координат вектора состояния.

Задача контроля для случая точных траекторных измерений сформулирована и решена выше с достаточной полнотой. Сформулируем некоторые промежуточные результаты, которые показывают, что и задача диагностирования в случае траекторных измерений с шумом может быть решена однозначно.

Сначала, в рамках теорем диагностирования предыдущих работ [1–4], дадим оценку погрешности в случае траекторных измерений с ошибкой, ограниченной по модулю.

Полученные оценки справедливы и в случае, если в рассмотрение вводится вектор диагностирования $z(t)$, составленный из измеряемых координат вектора состояния.

Мы не будем останавливаться на доказательстве полученных оценок при выборе числа измерений фазовых траекторий на некотором интервале времени $[0, \tau]$: это сравнительно просто можно сделать в

рамках доказательства теоремы диагностирования. Сразу перейдем к рассмотрению общего подхода в диагностике в случае траекторных измерений с шумом [5; 6].

Сначала отметим случай меньшей размерности вектора диагностирования

$$z(t) = (x_{d_1}, \dots, x_{d_q}) = (z_1, \dots, z_q), \quad q = 1, \dots, n, \quad (1.1)$$

то есть случай, когда

$$S_j^N = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q |z_{ijk} - z_{ik}|^2, \quad q < n, \quad (1.2)$$

или

$$S_j^N = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q |z_{ik} - z_{i-1k} - \Delta_i z_{jk}|^2, \quad q < n, \quad (1.3)$$

поскольку компоненты вектора диагностирования несут достаточную информацию о характере функций $f_j (j = 1, \dots, l)$ в правых частях уравнений

$$x' = f_j(x, t), \quad j = 1, \dots, l. \quad (1.4)$$

Рассмотрим несколько видоизмененный функционал (1.3), который для простоты запишем в виде [7–9]

$$S_{gj} = \sum_{i=1}^N |\bar{x}_i - \bar{x}_{i-1} + \Delta_i x_j|, \quad j = 0, \dots, l, \quad (1.5)$$

где $\Delta_i x_j$ описывается общей одношаговой формулой

$$\Delta_i x_j = h \Phi_j(\bar{x}_{i-1}, h) \quad (1.6)$$

и, как наиболее простой, формулой Эйлера

$$\Phi_j(\bar{x}_{i-1}, h) = f_j(\bar{x}_{i-1}). \quad (1.7)$$

Для измеренных значений введем обозначения

$$\bar{x}(t) = x(t) + \xi(t), \quad (1.8)$$

где $x(t)$ — действительное положение системы в момент времени t , а $\xi(t)$ — ошибки измерений, ограниченные по модулю

$$|\xi(t)| \leq \zeta(t) \quad (1.9)$$

заданными функциями времени $\zeta(t)$.

В соответствии с (1.6)–(1.8) составим суммы (1.5) в виде

$$S_{gj} = \sum_{i=1}^N |x_i - x_{i-1} + \xi_i - \xi_{i-1} - h f_j(x_{i-1} + \xi_{i-1})|. \quad (1.10)$$

В выражении (1.10) функции $f_j, j = 0, \dots, l$, разложим по формуле Лагранжа

$$f_j(x_{i-1} + \xi_{i-1}) = f_j(x_{i-1}) + \frac{\partial f_j}{\partial x} \Big|_{\xi_{i-1}^*} \xi_{i-1}, \quad (1.11)$$

где ξ_{i-1}^* лежит на отрезке прямой, соединяющей точки x_{i-1} и $x_{i-1} + \xi_{i-1}$.

Сумму (1.10) с учетом (1.11) запишем в следующем виде:

$$S_{gj} = \sum_{i=1}^N \left| x_i - x_{i-1} - h f_j(x_{i-1}) + \xi_i - \left(E + h \frac{\partial f_j}{\partial x} \Big|_{\xi_{i-1}^*} \right) \xi_{i-1} \right|, \quad (1.12)$$

где E — единичная матрица.

До сих пор мы ограничивались рассмотрением формулы Эйлера (1.7). Учтем следующее приближение в разложении по формуле Тейлора и оценим его влияние на сумму (1.12), то есть оценим долю произведенного выше усечения [10–12].

Имеем

$$x_i - x_{i-1} = h f_g(x_{i-1}) + \frac{h^2}{2} f_g'(x(t)) \Big|_{t=t_i^*}, \quad (1.13)$$

где t_i^* — некоторая точка между t_{i-1} и t_i .

Подставим (1.13) в (1.12). Тогда

$$S_{gj} = \sum_{i=1}^N \left| h(f_g(x_{i-1}) - f_j(x_{i-1})) + \frac{h^2}{2} f_g'(x(t)) \Big|_{t_i^*} + \right.$$

$$+\xi_i - \left(E + h \frac{\partial f_j}{\partial x} \Big|_{\xi_{i-1}^*} \right) \xi_{i-1} \Big| \quad (1.14)$$

2. Два принципиальных случая

Рассмотрим далее два случая.

1. Пусть j совпадает с действительным функциональным состоянием рассматриваемого объекта, то есть $j = g$. В этом случае

$$S_{gj} = \sum_{i=1}^N \left| \frac{h^2}{2} f'_g(x(t)) \Big|_{t_i^*} + \xi_i - \left(E + h \frac{\partial f_j}{\partial x} \Big|_{\xi_{i-1}^*} \right) \xi_{i-1} \right| \quad (2.1)$$

Функции f_j дифференцируемы и имеют все непрерывные частные производные при любом $j = 0, \dots, l$.

Поэтому, используя теорему о дифференцировании сложной функции, учитывая определение нормы матрицы и линейность отображения, задаваемого матрицей, получим следующую оценку для величины $|f'_g(x(t))|$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{df_g(x(t))}{dt} \Big|_{t_i^*} \right| &= \left| \frac{\partial f_g}{\partial t} \Big|_{x_i^*} \right| = \left| \frac{\partial f_g}{\partial x} \Big|_{x_i^*} f_g(x_i^*) \right| \leq \\ &\leq \max_{x \in D^*} \left(\left| \frac{\partial f_g}{\partial x} \Big|_x \right| |f_g(x)| \right) \leq L_g < +\infty \end{aligned} \quad (2.2)$$

и оценку для члена, представляющего ошибку усечения:

$$\left| \frac{h^2}{2} f'_g(x(t)) \Big|_{t_i^*} \right| \leq \frac{h^2}{2} L_g. \quad (2.3)$$

Здесь x_i^* — некоторая точка траектории, соответствующая моменту времени $t = t_i^*$, D^* — замкнутая область, содержащая все отрезки траектории от τ_0 до τ ,

$$L_g = \max_{x \in D^*} |f'_g(x)|.$$

Дадим теперь оценку ошибки измерения [13–15].

Так как величины $|f_g|$ и $\left\| \frac{\partial f_g}{\partial x} \right\|$ ограничены в D^* , то ошибка измерения оценивается следующим образом:

$$\left| h \frac{\partial f_g}{\partial x} \Big|_{\xi_{i-1}^*} \xi_{i-1} \right| \leq h \left\| \frac{\partial f_g}{\partial x} \right\|_{D^*} \xi_{i-1} \leq hl_g \zeta_{\max}, \quad \zeta_{\max} = \max_{[0, \tau]} \zeta(t). \quad (2.4)$$

Максимум

$$l_g = \max_{x \in D^*} \left\| \frac{\partial f_g}{\partial x} \right\|$$

существует, так как D^* — замкнутая область и f_g — регулярная функция.

Во всяком случае

$$\left\| \frac{\partial f_g}{\partial x} \right\| \leq \sqrt{\sum_{k,p} \left| \frac{\partial f_{gk}}{\partial x_p} \right|^2}.$$

В силу (2.4) будет ограниченной ошибка одного шага измерения

$$\begin{aligned} \left| \xi_i - \left(E + h \frac{\partial f_g}{\partial x} \Big|_{\xi_{i-1}^*} \right) \xi_{i-1} \right| &\leq |\xi_i| + \left| \left(E + h \frac{\partial f_g}{\partial x} \Big|_{\xi_{i-1}^*} \right) \xi_{i-1} \right| \leq \\ &\leq |\xi_i| + |\xi_{i-1}| + hl_g \zeta_{\max} \leq 2\zeta_{\max} + hl_g \zeta_{\max}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

В силу (2.3) и (2.5) получим оценку суммы (2.1) (так как $Nh = \tau$):

$$\begin{aligned} S_{gj} &\leq N \frac{h^2}{2} L_g + 2N \zeta_{\max} + Nhl_g \zeta_{\max} = \\ &= \frac{\tau}{2} L_g h + 2\tau \zeta_{\max} \frac{1}{h} + \tau l_g \zeta_{\max}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Из (2.6) следует, что в рассматриваемом случае $S_{gj} \rightarrow +\infty$ при $h \rightarrow 0$ из-за накопления модулей ошибки измерения. А вот при $h \rightarrow 0$ слагаемое $\tau l_g \zeta_{\max}$ ошибки измерения составляет все меньшую и меньшую часть S_{gj} [16–18].

2. Пусть номер системы j не совпадает с действительным функциональным состоянием объекта, то есть $j \neq g$. В этом случае, в соответствии с (1.14),

$$\left| h \left(f_g(x_{i-1}) - f_j(x_{i-1}) \right) + \frac{h^2}{2} f'_g(x) \Big|_{x_{i-1}^*} \right| \leq hL_{gj} + \frac{h^2}{2} L_g$$

и, значит,

$$\begin{aligned} S_{gj} &\leq NhL_{gj} + N \frac{h^2}{2} L_g + 2N\zeta_{\max} + Nhl_g\zeta_{\max} = \\ &= \tau L_{gj} + \frac{\tau}{2} L_g h + 2\tau\zeta_{\max} \frac{1}{h} + \tau l_g \zeta_{\max}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где

$$L_{gj} = \max_{x \in D^*} |f_g(x) - f_j(x)|.$$

Таким образом, и в этом случае за счет накопления ошибки измерения в (2.7) величина $S_{gj} \rightarrow +\infty$ при $h \rightarrow 0$. Ошибка усечения в случае $j \neq g$ стремится к

$$\tau(L_{gj} + l_g\zeta_{\max}).$$

Так как ошибка измерения стремится к $+\infty$ при $N \rightarrow +\infty$, а ошибка усечения при $N \rightarrow +\infty$ составляет все меньшую и меньшую часть S_{gj} , то при $h \rightarrow 0$ вероятность разделения действительной траектории объекта с происшедшей неисправностью и траекторий j систем стремится к нулю.

Возникает задача о выборе такого наименьшего значения $h = h^*$, при котором еще возможно разделение траекторий. В соответствии с (2.6)

$$\begin{aligned} \min_h S_{gj} &= \min_h \tau \left(\frac{1}{2} L_g h + 2 \frac{\zeta_{\max}}{h} + l_g \zeta_{\max} \right) = \\ &= \tau \left(\sqrt{\frac{\zeta_{\max}}{L_g}} + \sqrt{\frac{L_g}{\zeta_{\max}}} + l_g \zeta_{\max} \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

достигается при

$$h = \bar{h} = 2 \sqrt{\frac{\zeta_{\max}}{L_g}}.$$

Значение наилучшего значения $N = N^*$ будет, соответственно, равно

$$N = \bar{N} = 2\tau \sqrt{\frac{L_g}{\zeta_{\max}}}.$$

Таким образом, как в случае точных траекторных измерений, так и в случае траекторных измерений с ошибкой, ограниченной по модулю известной функцией времени, можно для каждого $j = 1, \dots, l$, в соответствии с (1.5), найти такие величины

$$S_{gj}, M_j^* = \max_{x_0^j \in \pi_k^j} S_{gj}, h_j^* = \min_h S_{hj}, N_j^*, \tau_j^*,$$

что траектории систем с номерами $j = 1, \dots, l$ с помощью алгоритмов диагностирования, сформулированных в предыдущем разделе, будут разделяться однозначно [19–21].

Вместо сумм (1.5), в которых производится суммирование модулей отклонений полей направлений, будем рассматривать суммы самих отклонений. Составим следующие суммы:

$$\begin{aligned} S_{gj} &= \sum_{i=1}^N (\bar{x}_i - \bar{x}_{i-1} - hf_j(\bar{x}_{i-1})) = (\bar{x}_N - \bar{x}_0) - \sum_{i=1}^N hf_j(\bar{x}_{i-1}) = \\ &= (x_N - x_0) + (\xi_N - \xi_0) - \sum_{i=1}^N h \left(f_j(x_{i-1}) + \frac{\partial f_j}{\partial x} \Big|_{x_{i-1}^*} \xi_{i-1} \right) = \\ &= \left(x_N - x_0 - \sum_{i=1}^N hf_j(x_{i-1}) \right) + \left(\xi_N - \xi_0 - \sum_{i=1}^N h \frac{\partial f_j}{\partial x} \Big|_{x_{i-1}^*} \xi_{i-1} \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Величина

$$\sum_{i=1}^N hf_j(x_{i-1})$$

в (2.9) есть интегральная сумма. Разлагая ее на каждом из интервалов времени $[t_{i-1}, t_i]$ по формуле Тейлора и затем суммируя, получим

$$\sum_{i=1}^N h f_j(x_{i-1}) = \int_{\tau_0}^{\tau} f_j(x(t)) dt - \sum_{i=1}^N \frac{h^2}{2} \frac{\partial f_j}{\partial x} \Big|_{x_{i-1}^{**}} f_j(x_{i-1}^*),$$

где x_{i-1}^{**} — набор N некоторых “средних точек”.

Следовательно, возвращаясь к (2.9), получим

$$\begin{aligned} S_{gj} &= (x_N - x_0 - \int_{\tau_0}^{\tau} f_j(x(t)) dt + \sum_{i=1}^N \frac{h^2}{2} \frac{\partial f_j}{\partial x} \Big|_{x_{i-1}^{**}} f_j(x_{i-1}^*)) + \\ &\quad + (\xi_N - \xi_0 - \sum_{i=1}^N h \frac{\partial f_j}{\partial x} \Big|_{x_{i-1}^*} \xi_{i-1}) = \\ &= \int_{\tau_0}^{\tau} (f_g(x(t)) - f_j(x(t))) dt + \sum_{i=1}^N \frac{h^2}{2} \frac{\partial f_j}{\partial x} \Big|_{x_{i-1}^{**}} f_j(x_{i-1}^*) + \\ &\quad + (\xi_N - \xi_0 - \sum_{i=1}^N h \frac{\partial f_j}{\partial x} \Big|_{x_{i-1}^*} \xi_{i-1}). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Так как нормы $|f_j|$ и $\left\| \frac{\partial f_j}{\partial x} \right\|$ ограничены, то ошибка усечения (в случае $j = g$) в (2.10) стремится к нулю при $h \rightarrow 0$, а ошибка измерения ограничена. Ошибка измерения с уменьшением h так же, как и с уменьшением N , будет уменьшаться.

При $j \neq g$ ошибка измерения остается того же порядка, а ошибка усечения при $h \rightarrow 0$ стремится к

$$I_{gj} = \int_{\tau_0}^{\tau} (f_g(x(t)) - f_j(x(t))) dt. \quad (2.11)$$

Таким образом,

$$S_{gj} = I_{gj} + \bar{\zeta}.$$

Если $I_{gj} \gg \bar{\zeta}$, то разделение траекторий с помощью функционала (2.11) и сформулированных ранее алгоритмов будет осуществляться однозначно.

3. Дальнейшие вероятностные оценки

Рассмотрим далее случай траекторных измерений с шумом. До сих пор предполагалось, что ошибка измерения $\xi(t)$ в (1.8) ограничена по модулю заданной функцией времени (1.9). Предположим теперь, что эта ошибка является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с дисперсией σ^2 . Оценим дисперсию случайной ошибки измерения [22–24]:

$$\begin{aligned} D \left(\xi_i - \left(E + h \frac{\partial f_g}{\partial x} \Big|_{\xi_{i-1}^*} \right) \xi_{i-1} \right) &= D \xi_i + D \left(E + h \frac{\partial f_g}{\partial x} \Big|_{\xi_{i-1}^*} \right) \xi_{i-1} \leq \\ &\leq \sigma^2 + \sigma^2 (1 + h l_g)^2 \geq 2\sigma^2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Таким образом, средняя ошибка одного шага измерения имеет порядок $\sigma\sqrt{2}$. Учитывая (2.3) и (3.1), можно провести следующую оценку:

$$\begin{aligned} S_{gg} &\leq \sum_{i=1}^N |x_i - x_{i-1} - h f_g(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^N \left| \xi_i - \left(E + h \frac{\partial f_g}{\partial x} \Big|_{\xi_{i-1}^*} \right) \xi_{i-1} \right| \cong \\ &\cong N \left(\frac{h^2}{2} L_g + \sigma\sqrt{2} \right) = \tau \left(\frac{1}{2} L_g h + \frac{1}{h} \sigma\sqrt{2} \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Выражение (3.2) показывает, что $S_{gg} \rightarrow +\infty$ при $h \rightarrow 0$.

В случае $j \neq g$, в соответствии с (1.14), можно провести оценку следующего вида:

$$S_{gj} \cong N h L_{gj} + N \frac{h^2}{2} L_g + N \sigma \sqrt{2 + 2h l_g + h^2 l_g^2} =$$

$$= \tau L_{gj} + \frac{1}{2} \tau h L_g + \frac{1}{h} \tau \sigma \sqrt{2 + 2hl_g + h^2 l_g^2}. \quad (3.3)$$

Таким образом, и в этом случае за счет накопления случайной ошибки измерения $S_{gj} \rightarrow +\infty$ при $h \rightarrow 0$.

Ошибка усечения при этом стремится к τL_{gj} . Так как средняя ошибка измерения стремится к бесконечности при $N \rightarrow +\infty$, а ошибка усечения при $N \rightarrow +\infty$ составляет все меньшую и меньшую часть от S_{gj} , то при $h \rightarrow 0$ вероятность разделения траекторий систем стремится к нулю [25; 26].

Выберем такое наименьшее значение $h = h^*$, при котором еще возможно разделение траекторий. Оценим порядок наилучшего значения $h = h^*$. Минимум

$$S_{gg} \cong \min_h \tau \left(\frac{h}{2} L_g + \frac{1}{h} \sigma \sqrt{2} \right) = \tau \sqrt{2\sqrt{2}\sigma L_g}$$

достигается при

$$h = h^* \cong \sqrt{\frac{2\sqrt{2}\sigma}{L_g}}.$$

Соответственно, порядок наилучшего значения N таков:

$$N = N^* \cong \tau \sqrt{\frac{L_g}{2\sqrt{2}\sigma}}.$$

Таким образом, дана оценка для наилучших значений $h = h^*$, $N = N^*$ и, значит, $\tau = \tau^*$. Если при этих наилучших значениях ошибка усечения достаточно мала, то диагностика неисправностей с помощью функционалов (1.5) и, значит, функционалов (1.12) в случае траекторных измерений с шумом позволяет получить в некотором смысле наилучший апостериорный набор возникших неисправностей.

Если раньше, как показано в случае точных траекторных измерений (предыдущая работа данного цикла), пользуясь в алгоритмах диагностирования константами M_j или S_g , мы не могли отбросить верную гипотезу, то в случае траекторных измерений с шумом при любом выборе констант алгоритма диагностирования всегда будет существовать такая возможность [27; 28].

Зададимся достаточно малой ненулевой допустимой вероятностью ε . Для разделения траекторий выберем постоянные M_j такие, что для любой траектории j -й системы

$$P\{S_{jj} \geq M_j\} < \varepsilon.$$

Иначе говоря, вероятность ложного срабатывания должна находиться в допустимых границах. При этом в случае траекторных измерений с шумом будем пользоваться теми же алгоритмами диагностирования, что и в случае точных траекторных измерений.

Перейдем теперь к рассмотрению метода интегралов в случае траекторных измерений с шумом.

Как уже отмечалось, ошибка усечения в (2.10) ($j = g$) не превосходит

$$\tau \frac{h}{2} L_g,$$

и эта ошибка стремится к нулю при $h \rightarrow 0$.

Средняя ошибка обусловлена суммой

$$h \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_g}{\partial x} \Big|_{\xi_{i-1}^*} \xi_{i-1}$$

и по теореме о сложении дисперсий независимых случайных величин будет меньше или равна $h\sigma\sqrt{N}l_g$, а, следовательно, средняя ошибка измерения не будет превышать величины

$$\sigma\sqrt{2} + h\sigma\sqrt{N}l_g = \sigma\sqrt{2} + \sigma\sqrt{\tau h} l_g \quad (3.4)$$

и будет стремиться к $\sigma\sqrt{2}$ при $h \rightarrow 0$.

Формула (3.4) показывает, что средняя ошибка измерения зависит от постоянного слагаемого $\sigma\sqrt{2}$ и от $\sigma\sqrt{\tau h} l_g$. С уменьшением h ошибка, обусловленная шумом, уменьшается, и можно ожидать, что при

$$h < \frac{1}{\tau l_g^2}$$

будут достигаться достаточно хорошие результаты по разделению систем [29, 30].

В случае $j \neq g$, как показывает выражение (2.10) для S_{gj} , ошибка измерения остается того же порядка, а ошибка усечения при $h \rightarrow 0$ стремится к интегралу (2.11). При $N \rightarrow \infty$ величина $S_{gg} \rightarrow \bar{\zeta}$, где $\bar{\zeta}$ — случайная величина, распределенная по нормальному закону с дисперсией $2\sigma^2$, а

$$S_{gj} \rightarrow I_{gj} + \bar{\zeta}.$$

Если I_{gj} значительно больше дисперсии случайной величины $\bar{\zeta}$, то разделение траекторий систем с помощью интеграла (2.11) в случае траекторных измерений с шумом будет осуществляться с высокой точностью. Константы M_j могут быть найдены, исходя из условия [32; 32]

$$P\{|S_{jj}| \geq M_j\} < \varepsilon.$$

В дальнейшей работе данного цикла перейдем к статистическому решению задачи дифференциальной диагностики.

Литература

- [1] Шамолин М.В. Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Часть 1. Уравнения движения и классификация неисправностей // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2019. Т. 25, № 1. С. 32–43. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-1-32-43>.
- [2] Шамолин М.В. Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Часть 2. Задача дифференциальной диагностики // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2019. Т. 25, № 3. С. 22–31. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-3-22-32>.
- [3] Шамолин М.В. Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Часть 3. Задача контроля // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2019. Т. 25, № 4. С. 36–47. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-4-36-47>.
- [4] Шамолин М.В. Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Часть 4. Задача диагностирования (случай точных траекторных измерений) // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2020. Т. 26, № 1. С. 52–68. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-1-52-68>.
- [5] Борисенок И.Т., Шамолин М.В. Решение задачи дифференциальной диагностики // Фундамент. и прикл. матем. 1999. Т. 5, вып. 3. С. 775–790. URL: <http://mech.math.msu.su/fpm/rus/99/993/99309h.htm>.
- [6] Шамолин М.В. Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. Изд. 2-е, перераб. и доп. Москва: Экзамен, 2007.
- [7] Shamolin M.V. Foundations of Differential and Topological Diagnostics // Journal of Mathematical Sciences. 2003. Vol. 114, № 1. P. 976–1024. DOI: <http://doi.org/10.1023/A:1021807110899>.
- [8] Пархоменко П.П., Сагомоян Е.С. Основы технической диагностики. Москва: Энергия, 1981. 464 с. URL: https://www.studmed.ru/parhomenko-pp-red-osnovy-tehnicheskoy-diagnostiki-kniga-1-modeli-obektov-metody-i-algoritmy-diagnoza_5853e5d7550.html.
- [9] Мироновский Л.А. Функциональное диагностирование динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1980. № 8. С. 96–121. URL: <http://www.mathnet.ru/links/7fcb6f177c8e813562091e7dfd0c246e/at7158.pdf>.
- [10] Окунев Ю.М., Парусников Н.А. Структурные и алгоритмические аспекты моделирования для задач управления. Москва: Изд-во МГУ, 1983.
- [11] Чикин М.Г. Системы с фазовыми ограничениями // Автоматика и телемеханика. 1987. № 10. С. 38–46. URL: <http://www.mathnet.ru/links/452c6d0e7940585ef1a5ac072eb3a581/at4566.pdf>.
- [12] Жуков В.П. О достаточных и необходимых условиях асимптотической устойчивости нелинейных динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1994. № 3. С. 24–36. URL: <http://www.mathnet.ru/links/81f9329984d942fd0c9d9e7acb76ba02/at3855.pdf>.
- [13] Жуков В.П. О достаточных и необходимых условиях грубости нелинейных динамических систем в смысле сохранения характера устойчивости // Автоматика и телемеханика. 2008. № 1. С. 30–38. URL: <http://www.mathnet.ru/links/53c5f1aa005b34282375f54680f5931b/at587.pdf>.
- [14] Жуков В.П. О редукции задачи исследования нелинейных динамических систем на устойчивость вторым методом Ляпунова // Автоматика и телемеханика. 2005. № 12. С. 51–64. URL: <http://www.mathnet.ru/links/f904640916f619f8b2c9c084418c0f9b/at1475.pdf>.
- [15] Борисенок И.Т., Шамолин М.В. Решение задачи дифференциальной диагностики методом статистических испытаний // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2001. № 1. С. 29–31. ГКДЖ <http://www.mathnet.ru/links/8939ed942473758ad32df38e1ec6061a/vmumm1441.pdf>.
- [16] Beck A., Teboulle M. Mirror Descent and Nonlinear Projected Subgradient Methods for Convex Optimization // Operations Research Letters. 2003. Vol. 31, № 3. P. 167–175. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0167-6377\(02\)00231-6](https://doi.org/10.1016/S0167-6377(02)00231-6).
- [17] Ben-Tal A., Margalit T., Nemirovski A. The Ordered Subsets Mirror Descent Optimization Method with Applications to Tomography // SIAM J. Optim. 2001. Vol. 12, Issue 1. P. 79–108. DOI: <https://doi.org/10.1137/S1052623499354564>.

- [18] Su W., Boyd S., Candes E. A Differential Equation for Modeling Nesterov's Accelerated Gradient Method: Theory and Insights // *J. Machine Learning Res.* 2016. № 17(153). P. 1–43. URL: <https://arxiv.org/pdf/1503.01243.pdf>.
- [19] Шамолин М.В. Диагностика гиросtabilизированной платформы, включенной в систему управления движением летательного аппарата // *Электронное моделирование.* 2011. Т. 33, № 3. С. 121–126. URL: <http://dspace.nbu.gov.ua/bitstream/handle/123456789/61768/10-Shamolin.pdf?sequence=1>.
- [20] Шамолин М.В. Диагностика движения летательного аппарата в режиме планирующего спуска // *Электронное моделирование.* 2010. Т. 32, № 5. С. 31–44. URL: <http://dspace.nbu.gov.ua/bitstream/handle/123456789/61768/10-Shamolin.pdf?sequence=1>.
- [21] Fleming W.H. Optimal Control of Partially Observable Diffusions // *SIAM Journal on Control.* 1968. Vol. 6, Issue 2. P. 194–214. DOI: <https://doi.org/10.1137/0306015>.
- [22] Choi D.H., Kim S.H., Sung D.K. Energy-efficient Maneuvering and Communication of a Single UAV-based Relay // *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems.* 2014. Vol. 50, issue 3. P. 2320–2327. DOI: <https://doi.org/10.1109/TAES.2013.130074>.
- [23] Ho D.-T., Grotli E.I., Sujit P.B., Johansen T.A., Sousa J.B. Optimization of Wireless Sensor Network and UAV Data Acquisition // *Journal of Intelligent & Robotic Systems.* 2015. Vol. 78, Issue 1. P. 159–179. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10846-015-0175-5>.
- [24] Ceci C., Gerardi A., Tardelli P. Existence of Optimal Controls for Partially Observed Jump Processes // *Acta Applicandae Mathematica.* 2002. Vol. 74, Issue 2. P. 155–175. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1020669212384>.
- [25] Rieder U., Winter J. Optimal control of Markovian jump processes with partial information and applications to a parallel queueing model // *Mathematical Methods of Operations Research.* 2009. Vol. 70. P. 567–596. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00186-009-0284-7>.
- [26] Power Control in Wireless Cellular Networks / M. Chiang [et al.] // *Foundations and Trends in Networking.* 2008. Vol. 2, № 4. P. 381–533. URL: <https://www.princeton.edu/~chiangm/powercontrol.pdf>.
- [27] Power control in wireless cellular networks / E. Altman [et al.] // *IEEE Trans. Autom. Contr.* 2009. Vol. 54, Issue 10. P. 2328–2340. DOI: <https://doi.org/10.1109/TAC.2009.2028960>.
- [28] Ober R.J. Balanced parameterization of classes of linear systems // *SIAM Journal on Control and Optimization.* 1991. Vol. 29, issue 6. P. 1251–1287. DOI: <https://doi.org/10.1137/0329065>.
- [29] Ober R.J., McFarlane D. Balanced canonical forms for minimal systems: a normalized coprime factor approach // *Linear Algebra and its Applications.* 1989. Vols. 122–124. P. 23–64. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0024-3795\(89\)90646-0](http://dx.doi.org/10.1016/0024-3795(89)90646-0).
- [30] Antoulas A.C., Sorensen D.C., Zhou Y. On the decay rate of Hankel singular values and related issues // *Systems & Control Letters.* 2002. Vol. 46, № 5. P. 323–342. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0167-6911\(02\)00147-0](http://doi.org/10.1016/S0167-6911(02)00147-0).
- [31] Wilson D.A. The Hankel operator and its induced norms // *International Journal of Control.* 1985. Vol. 42, Issue 1. P. 65–70. DOI: <https://doi.org/10.1080/00207178508933346>.
- [32] Anderson B.D.O., Jury E.I., Mansour M. Schwarz matrix properties for continuous and discrete time systems // *International Journal of Control.* 1976. Vol. 23, Issue 1. P. 1–16. DOI: <https://doi.org/10.1080/00207177608922133>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2020-26-1-52-68

Submitted: 17.01.2020

Revised: 18.02.2020

Accepted: 28.02.2020

M. V. Shamolin

Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation.

E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9534-0213>

PROBLEMS OF DIFFERENTIAL AND TOPOLOGICAL DIAGNOSTICS. PART 5. THE CASE OF TRAJECTORIAL MEASUREMENTS WITH ERROR

ABSTRACT

Proposed work is the fifth work of the cycle on differential and topological diagnostics. The article gives an estimate of the errors method of direction fields in the case of not accurate trajectory measurements, but trajectory measurements with an error are limited by the modulus of a given a smooth function of time, and in case this error is a random variable distributed according to the normal law with fixed parameters. We show that in these more complex cases, you can specify the “best” number of required trajectory measurements, in which the proposed algorithms of diagnostics will work constructively, and the malfunction will be determined unambiguously.

Key words: diagnostic problem, diagnostic algorithms, trajectory measurements with error.

Citation. Shamolin M.V. Problems of differential and topological diagnostics. Part 5. The case of trajectorial measurements with error. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2020, vol. 26, no. 3, pp. 30–39. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-3-30-39>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Shamolin M.V., 2020

Shamolin Maxim Vladimirovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, leading researcher of the Institute of Mechanics, academic of the Russian Academy of Natural Sciences, Lomonosov Moscow State University, 1, Michurinsky Prospekt, Moscow, 119192, Russian Federation.

References

- [1] Shamolin M.V. Problems of differential and topological diagnostics. Part 1. Motion equations and classification of malfunctions. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2019, vol. 25, no. 1, pp. 32–43. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-1-32-43>. (In Russ.)
- [2] Shamolin M.V. Problems of differential and topological diagnostics. Part 2. Problem of differential diagnostics. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 22–31. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-3-22-32>. (In Russ.)
- [3] Shamolin M.V. Problems of differential and topological diagnostics. Part 3. The checking problem. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 36–47. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-4-36-47>. (In Russ.)
- [4] Shamolin M.V. Problems of differential and topological diagnostics. Part 4. The case of exact trajectorial measurements. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 52–68. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-1-52-68>.
- [5] Borisenok I.T., Shamolin M.V. Resolving a problem of differential diagnostics. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* [Fundamental and Applied Mathematics], 1999, vol. 5, no. 3, pp. 775–790. Available at: <http://mech.math.msu.su/fpm/rus/99/993/99309h.htm>. (In Russ.)
- [6] Shamolin M.V. Certain Problems of differential and topological diagnostics. Edition 2nd, revised and enlarged. Moscow: Ekzamen, 2007. Available at: <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Shamolin2007-2ru.pdf>. (In Russ.)
- [7] Shamolin M.V. Foundations of Differential and Topological Diagnostics. *Journal of Mathematical Sciences*, 2003, vol. 114, no. 1, pp. 976–1024. DOI: <http://doi.org/10.1023/A:1021807110899>.
- [8] Parkhomenko P.P., Sagomonian E.S. Foundations of technical diagnostics. Moscow: Energiia, 1981, 464 p. Available at: https://www.studmed.ru/parhomenko-pp-red-osnovy-tehnicheskoy-diagnostiki-kniga-1-modeli-obektov-metody-i-algoritmy-diagnoza_5853e5d7550.html. (In Russ.)
- [9] Mironovskii L.A. Functional diagnosis of dynamic systems. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 1980, no. 8, pp. 96–121. Available at: <http://www.mathnet.ru/links/7fcb6f177c8e813562091e7dfd0c246e/at7158.pdf>. (In Russ.)
- [10] Okunev Yu.M., Parusnikov N.A. Structural and algorithmic aspects of modeling for control problems. Moscow: Izd-vo MGU, 1983. (In Russ.)
- [11] Chikin M.G. Phase-constrained systems. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 1987, no. 10, pp. 38–46. Available at: <http://www.mathnet.ru/links/452c6d0e7940585ef1a5ac072eb3a581/at4566.pdf>. (In Russ.)
- [12] Zhukov V.P. Sufficient and necessary conditions for the asymptotic stability of nonlinear dynamical systems. [Automation and Remote Control], 1994, vol. 55, no. 3, pp. 321–330. Available at: <https://zbmath.org/?q=an:0847.93053> (English, Russian original)
- [13] Zhukov V.P. On the sufficient and necessary conditions for robustness of the nonlinear dynamic systems in terms of stability retention. *Automation and Remote Control*, 2008, vol. 69, no. 1, pp. 27–35. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117908010037> (English, Russian original)
- [14] Zhukov V.P. Reduction of Stability Study of Nonlinear Dynamic Systems by the Second Lyapunov Method. *Automation and Remote Control*, 2005, vol. 66, no. 12, pp. 1916–1928. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10513-005-0224-9> (English, Russian original)
- [15] Borisenok I.T., Shamolin M.V. Solving the problem of differential diagnostics by the method of statistical tests. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika*, 2001, no. 1, pp. 29–31. Available at: <http://www.mathnet.ru/links/8939ed942473758ad32df38e1ec6061a/vmumm1441.pdf>. (in Russ.)

- [16] Beck A., Teboulle M. Mirror descent and nonlinear projected subgradient methods for convex optimization. *Operations Research Letters*, 2003, vol. 31, issue 3, pp. 167–175. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0167-6377\(02\)00231-6](https://doi.org/10.1016/S0167-6377(02)00231-6).
- [17] Ben-Tal A., Margalit T., Nemirovski A. The Ordered Subsets Mirror Descent Optimization Method with Applications to Tomography. *SIAM Journal on Optimization*, 2001, vol. 12, issue 1, pp. 79–108. DOI: <https://doi.org/10.1137/S1052623499354564>.
- [18] Su W., Boyd S., Candes E. A Differential Equation for Modeling Nesterov’s Accelerated Gradient Method: Theory and Insights. *Journal of Machine Learning Research*, 2016, no. 17(153), pp. 1–43. Available at: <https://arxiv.org/pdf/1503.01243.pdf>.
- [19] Shamolin M.V. Diagnostics of gyro-stabilized platform, included in the aircraft motion control system. *Elektronnoe modelirovanie* [Electronic Modeling], 2011, vol. 33, no. 3, pp. 121–126. Available at: <http://dspace.nbuu.gov.ua/bitstream/handle/123456789/61768/10-Shamolin.pdf?sequence=1>. (In Russ.)
- [20] Shamolin M.V. Diagnostics of Aircraft Motion in Planning Descent Mode. *Elektronnoe modelirovanie* [Electronic Modeling], 2010, vol. 32, no. 5, pp. 31–44. Available at: <http://dspace.nbuu.gov.ua/bitstream/handle/123456789/61677/04-Shamolin1.pdf?sequence=1>. (In Russ.)
- [21] Fleming W.H. Optimal Control of Partially Observable Diffusions. *SIAM Journal on Control*, 1968, vol. 6, issue 2, pp. 194–214. DOI: <https://doi.org/10.1137/0306015>.
- [22] Choi D.H., Kim S.H., Sung D.K. Energy-efficient maneuvering and communication of a single UAV-based relay. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2014, vol. 50, issue 3, pp. 2320–2327. DOI: <https://doi.org/10.1109/TAES.2013.130074>.
- [23] Ho D.-T., Grotli E.I., Sujit P.B., Johansen T.A., Sousa J.B. Optimization of Wireless Sensor Network and UAV Data Acquisition. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 2015, vol. 78, issue 1, pp. 159–179. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10846-015-0175-5>.
- [24] Ceci C., Gerardi A., Tardelli P. Existence of Optimal Controls for Partially Observed Jump Processes. *Acta Applicandae Mathematica*, 2002, vol. 74, issue 2, pp. 155–175. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1020669212384>.
- [25] Rieder U., Winter J. Optimal control of Markovian jump processes with partial information and applications to a parallel queueing model. *Mathematical Methods of Operations Research*, 2009, vol. 70, pp. 567–596. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00186-009-0284-7>.
- [26] Chiang M., Tan C.W., Hande P., Lan T. Power Control in Wireless Cellular Networks. *Foundations and Trends in Networking*, 2008, vol. 2, no. 4, pp. 381–533. Available at: <https://www.princeton.edu/~chiangm/powercontrol.pdf>.
- [27] Altman E., Avrachenkov K., Menache I., Miller G., Prabhu B.J., Shwartz A. Dynamic Discrete Power Control in Cellular Networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, vol. 54, issue 10, pp. 2328–2340. DOI: <https://doi.org/10.1109/TAC.2009.2028960>.
- [28] Ober R.J. Balanced Parameterization of Classes of Linear Systems. *SIAM Journal on Control Optimization*, 1991, vol. 29, issue 6, pp. 1251–1287. DOI: <https://doi.org/10.1137/0329065>.
- [29] Ober R.J., McFarlane D. Balanced canonical forms for minimal systems: a normalized coprime factor approach. *Linear Algebra and its Applications*, 1989, vol. 122–124, pp. 23–64. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0024-3795\(89\)90646-0](http://dx.doi.org/10.1016/0024-3795(89)90646-0).
- [30] Antoulas A.C., Sorensen D.C., Zhou Y. On the decay rate of Hankel singular values and related issues. *Systems & Control Letters*, 2002, vol. 46, no. 5, pp. 323–342. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0167-6911\(02\)00147-0](http://doi.org/10.1016/S0167-6911(02)00147-0).
- [31] Wilson D.A. The Hankel operator and its induced norms. *International Journal of Control*, 1985, vol. 42, issue 1, pp. 65–70. DOI: <https://doi.org/10.1080/00207178508933346>.
- [32] Anderson B.D.O., Jury E.I., Mansour M. Schwarz matrix properties for continuous and discrete time systems. *International Journal of Control*, 1976, vol. 23, issue 1, pp. 1–16. DOI: <https://doi.org/10.1080/00207177608922133>.