ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 497, с. 23–30

МАТЕМАТИКА

УДК 517+531.01

НОВЫЕ СЛУЧАИ ОДНОРОДНЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ

© 2021 г. М. В. Шамолин[1],*

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 27.01.2021 г.
Поступило 27.01.2021 г.
После доработки 27.01.2021 г.
Принято к публикации 14.02.2021 г.

В работе показана интегрируемость некоторых классов однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким четырехмерным многообразиям. При этом силовые поля приводят к появлению диссипации переменного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Ключевые слова: динамическая система, интегрируемость, диссипация, трансцендентный первый интеграл

DOI: 10.31857/S2686954321020041

Изучение интегрируемости автономных систем на четырехмерном конфигурационном многообразии M^4 приводит к изучению систем восьмого порядка на касательном расслоении TM^4. При этом ключевым, наряду с геометрией многообразия M^4, является структура силового поля, присутствующего в системе. Например, задача о движении пятимерного маятника на обобщенном сферическом шарнире в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе на касательном расслоении к четырехмерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительными группами симметрий [1, 2]. Системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [2, 3].

Известны также задачи о движении точки по четырехмерным поверхностям вращения, в пространстве Лобачевского той же размерности и т.д. Но иногда в системах с диссипацией все-таки удается найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных, в смысле комплексного анализа, функций, поскольку полный список даже непрерывных автономных первых интегралов найти не удастся. Данные результаты важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного силового поля.

В работе показана интегрируемость некоторых классов однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким четырехмерным многообразиям. При этом силовые поля приводят к появлению диссипации переменного знака и обобщают ранее рассмотренные [2, 3].

1. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

Как известно, в случае четырехмерного риманова многообразия M^4 с координатами (α, β), $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, и аффинной связностью $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$ уравнения геодезических линий на касательном расслоении $TM^4\{\alpha^\bullet, \beta_1^\bullet, \beta_2^\bullet, \beta_3^\bullet; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ $\alpha = x^1$, $\beta_1 = x^2$, $\beta_2 = x^3$, $\beta_3 = x^4$, $x = (x^1, x^2, x^3, x^4)$, примут следующий вид (дифференцирование берется по натуральному параметру):

$$x^{i\bullet\bullet} + \sum_{j,k=1}^{4} \Gamma^i_{jk}(x) x^{j\bullet} x^{k\bullet} = 0, \quad i = 1,\ldots,4. \tag{1}$$

Изучим структуру уравнений (1) при изменении координат на касательном расслоении TM^4. Для этого рассмотрим замену координат касательного пространства:

$$x^{i\bullet} = \sum_{j=1}^{4} R^{ij} z_j, \tag{2}$$

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: shamolin@imec.msu.ru*

которую можно обратить: $z_j = \sum_{i=1}^{4} T_{ji} x^{i\bullet}$, при этом R^{ij}, T_{ji}, $i, j = 1, \ldots, 4$, – функции от x, а также $RT = E$, где $R = (R^{ij})$, $T = (T_{ji})$. Назовем также уравнения (2) новыми кинематическими соотношениями, т.е. линейными соотношениями на касательном расслоении TM^4. Справедливы равенства:

$$z_i^\bullet = \sum_{j,k=1}^{4} T_{ij,k} x^{j\bullet} x^{k\bullet} - \sum_{j,p,q=1}^{4} T_{ij} \Gamma^j_{pq} x^{p\bullet} x^{q\bullet}, \tag{3}$$

где $T_{ji,k} = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x^k}$, $j, i, k = 1, \ldots, 4$, при этом в системе (3) вместо $x^{i\bullet}$, $i = 1, \ldots, 4$, надо подставить формулы (2), и правые части составной системы (2), (3) являются однородными формами соответствующих степеней по квазискоростям $z_1, \ldots, z_4$.

П р е д л о ж е н и е 1. *Система* (1) *в той области, где* $\det R(\alpha, \beta) \neq 0$, *эквивалентна составной системе* (2), (3).

Таким образом, результат перехода от уравнений геодезических (1) к эквивалентной системе (2), (3) зависит как от замены (2) (т.е. вводимых кинематических соотношений), так и от аффинной связности $\Gamma^i_{jk}(\alpha, \beta)$.

Рассмотрим далее достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\alpha^\bullet = z_4 f_4(\alpha), \quad \beta_1^\bullet = z_3 f_1(\alpha),$$
$$\beta_2^\bullet = z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \quad \beta_3^\bullet = z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2), \tag{4}$$

где $f_k(\alpha)$, $k = 1, 2, 3$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2$, $h(\beta_2)$ – гладкие функции, не равные тождественно нулю. Такие координаты $z_1, \ldots, z_4$ в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются следующие уравнения геодезических [4, 5], например, с 13 ненулевыми коэффициентами связности (в частности, на четырехмерных поверхностях вращения, в пространстве Лобачевского и т.д.):

$$\begin{gathered}
\alpha^{\bullet\bullet} + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet 2} + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\beta_1^{\bullet 2} + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\beta_2^{\bullet 2} + \\
+ \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)\beta_3^{\bullet 2} = 0, \\
\beta_1^{\bullet\bullet} + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\alpha^\bullet\beta_1^\bullet + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\beta_2^{\bullet 2} + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\beta_3^{\bullet 2} = 0, \\
\beta_2^{\bullet\bullet} + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\alpha^\bullet\beta_2^\bullet + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\beta_1^\bullet\beta_2^\bullet + \\
+ \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\beta_3^{\bullet 2} = 0, \\
\beta_3^{\bullet\bullet} + 2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\alpha^\bullet\beta_3^\bullet + 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\beta_1^\bullet\beta_3^\bullet + \\
+ 2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\beta_2^\bullet\beta_3^\bullet = 0,
\end{gathered} \tag{5}$$

т.е. остальные коэффициенты связности равны нулю. В случае (4) уравнения (3) примут вид

$$\begin{gathered}
z_1^\bullet = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + Df_3(\alpha)\right] z_1 z_4 - \\
- f_1(\alpha)\left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + Dg_2(\beta_1)\right] z_1 z_3 - \\
- f_2(\alpha) g_1(\beta_1)\left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + Dh(\beta_2)\right] z_1 z_2, \\
z_2^\bullet = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + Df_2(\alpha)\right] z_2 z_4 - \\
- f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + Dg_1(\beta_1)\right] z_2 z_3 - \\
- \frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2) \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta) z_1^2, \\
z_3^\bullet = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)\right] z_3 z_4 - \\
- \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) z_2^2 - \\
- \frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta) z_1^2, \\
z_4^\bullet = -f_4(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + Df_4(\alpha)\right] z_4^2 - \\
- \frac{f_1^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) z_3^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) z_2^2 - \\
- \frac{f_3^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta) z_1^2,
\end{gathered} \tag{6}$$

$Dj(\gamma) = \frac{d \ln |j(\gamma)|}{d\gamma}$, и уравнения (5) геодезических почти всюду эквивалентны составной системе (4), (6) на многообразии $TM^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$.

Для полного интегрирования системы (4), (6) необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. При этом первые интегралы (в частности, и для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее.

П р е д л о ж е н и е 2. *Если всюду справедлива система дифференциальных равенств*

$$\begin{gathered}
\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + Df_4(\alpha) \equiv 0, \\
f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)\right] + f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) \equiv 0, \\
f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + Df_2(\alpha)\right] + \\
+ f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) \equiv 0, \\
f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + Df_3(\alpha)\right] + \\
+ f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta) \equiv 0, \\
f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + Dg_1(\beta_1)\right] + \\
+ f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) \equiv 0, \\
f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + Dg_2(\beta_1)\right] + \\
+ f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta) \equiv 0,
\end{gathered} \tag{7}$$

$$f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\left[2\Gamma_{23}^3(\alpha,\beta) + Dh(\beta_2)\right] + \\ + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\alpha,\beta) \equiv 0,$$

то система (4), (6) *имеет аналитический первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_1(z_4,\ldots,z_1) = z_1^2 + \ldots + z_4^2 = C_1^2 = \text{const}. \qquad (8)$$

П р и м е р ы. Уравнения (5) геодезических в четырехмерном пространстве Лобачевского в модели Клейна примут вид

$$\begin{gathered} \alpha^{\cdot\cdot} - \frac{1}{\alpha}(\alpha^{\cdot 2} - \beta_1^{\cdot 2} - \beta_2^{\cdot 2} - \beta_3^{\cdot 2}) = 0, \\ \beta_k^{\cdot\cdot} - \frac{2}{\alpha}\alpha^{\cdot}\beta_k^{\cdot} = 0, \quad k = 1,\ 2,\ 3. \end{gathered} \qquad (9)$$

Можно выписать 7-параметрическую систему, эквивалентную уравнениям (9) геодезических и имеющая первый интеграл вида (8). Аналогичными свойствами обладают уравнения геодезических и на четырехмерных поверхностях вращения.

Система равенств (7) может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (8) (или см. ниже (21)) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [5, 6]). Поиск же как первого интеграла (8), так и других (см. далее) опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий.

Можно доказать отдельную теорему существования решения $f_k(\alpha)$, $k = 1, 2, 3$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2$, $h(\beta_2)$ системы (7) для наличия аналитического интеграла (8) для исследуемой системы (4), (6) уравнений геодезических. Но в дальнейшем при изучении динамических систем с диссипацией не всегда все условия (7) нам потребуются. Тем не менее, в дальнейшем будем предполагать в уравнениях (4) выполнение условия

$$f_1(\alpha) \equiv f_2(\alpha) \equiv f_3(\alpha) = f(\alpha), \qquad (10)$$

при этом функции $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2$, $h(\beta_2)$ должны удовлетворять, вообще говоря, преобразованным уравнениям из (7):

$$\begin{gathered} 2\Gamma_{12}^2(\alpha,\beta) + Dg_1(\beta_1) + g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha,\beta) \equiv 0, \\ 2\Gamma_{13}^3(\alpha,\beta) + Dg_2(\beta_1) + g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\alpha,\beta) \equiv 0, \\ g_1^2(\beta_1)\left[2\Gamma_{23}^3(\alpha,\beta) + Dh(\beta_2)\right] + \\ + g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\alpha,\beta) \equiv 0. \end{gathered} \qquad (11)$$

Таким образом, функции $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2$, $h(\beta_2)$ зависят от коэффициентов связности, а ограничения на функции $f(\alpha)$, $f_4(\alpha)$ будут даны ниже.

П р е д л о ж е н и е 3. *Если выполнены свойства* (10), (11), *при этом справедливы равенства*

$$\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha,\beta) \equiv \Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha,\beta) \equiv \Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha,\beta) = \Gamma_1(\alpha), \qquad (12)$$

то система (4), (6) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида:*

$$\begin{gathered} \Phi_2(z_3, z_2, z_1; \alpha) = \\ = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}\,\Phi_0(\alpha) = C_2 = \text{const}, \\ \Phi_0(\alpha) = f(\alpha)\exp\left\{2\int_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\}. \end{gathered} \qquad (13)$$

П р е д л о ж е н и е 4. *Если выполнены условия предложения* 3, *а также*

$$g_1(\beta_1) \equiv g_2(\beta_1) = g(\beta_1), \qquad (14)$$

при этом справедливы равенства

$$\Gamma_{12}^2(\alpha,\beta) \equiv \Gamma_{13}^3(\alpha,\beta) = \Gamma_2(\beta_1), \qquad (15)$$

то система (4), (6) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида:*

$$\begin{gathered} \Phi_3(z_2, z_1; \alpha, \beta_1) = \\ = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}\,\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1) = C_3 = \text{const}, \\ \Psi_1(\beta_1) = g(\beta_1)\exp\left\{2\int_{\beta_{10}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)db\right\}. \end{gathered} \qquad (16)$$

П р е д л о ж е н и е 5. *Если выполнены условия предложений* 3, 4, *при этом справедливо равенство*

$$\Gamma_{23}^3(\alpha,\beta) = \Gamma_3(\beta_2), \qquad (17)$$

то система (4), (6) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\begin{gathered} \Phi_4(z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) = \\ = z_1\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\Psi_2(\beta_2) = C_4 = \text{const}, \end{gathered} \qquad (18)$$

$$\Psi_2(\beta_2) = h(\beta_2)\exp\left\{2\int_{\beta_{20}}^{\beta_2}\Gamma_3(b)db\right\}.$$

П р е д л о ж е н и е 6. *Если выполнены условия предложений* 3–5, *то система* (4), (6) *имеет первый интеграл следующего вида*:

$$\begin{gathered} \Phi_5(\beta_2, \beta_3) = \\ = \beta_3 \pm \int_{\beta_{20}}^{\beta_2}\frac{C_4 h(b)}{\sqrt{C_3^2\Psi_2^2(b) - C_4^2}}db = C_5 = \text{const}, \end{gathered} \qquad (19)$$

где, после взятия интеграла (19), *вместо постоянных* C_3, C_4 *можно подставить левые части равенств* (16), (18) *соответственно.*

Т е о р е м а 1. *Если выполнены условия предложений* 2–6, *то система* (4), (6) *обладает пятью независимыми первыми интегралами вида* (8), (13), (16), (18), (19).

То, что полный набор при некоторых условиях состоит из пяти, а не из семи первых интегралов, будет показано ниже.

2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

Модифицируем (4), (6), получив систему консервативную. А именно, введем гладкое (внешнее) силовое поле в проекциях на оси $z_k^{\bullet}$, $k = 1, \ldots, 4$, соответственно: $F_1(\beta_3)f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2)$, $F_2(\beta_2)f_2(\alpha)g_1(\beta_1)$, $F_3(\beta_1)f_1(\alpha)$, $F_4(\alpha)f_4(\alpha)$. Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ примет вид

$$
\begin{aligned}
\alpha^{\bullet} &= z_4 f_4(\alpha),\\
z_4^{\bullet} &= F_4(\alpha)f_4(\alpha) - f_4(\alpha)\left[\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + Df_4(\alpha)\right]z_4^2 - \\
&- \frac{f_1^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)z_3^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta)z_2^2 - \\
&- \frac{f_3^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^{\alpha}_{33}(\alpha,\beta)z_1^2,\\
z_3^{\bullet} &= F_3(\beta_1)f_1(\alpha) - f_4(\alpha)[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)]z_3z_4 - \\
&- \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z_2^2 - \\
&- \frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)z_1^2,\\
z_2^{\bullet} &= F_2(\beta_2)f_2(\alpha)g_1(\beta_1) - \\
&- f_4(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + Df_2(\alpha)\right]z_2z_4 - \\
&- f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + Dg_1(\beta_1)\right]z_2z_3 - \\
&- \frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)}h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)z_1^2,\\
z_1^{\bullet} &= F_1(\beta_3)f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2) - \\
&- f_4(\alpha)\left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + Df_3(\alpha)\right]z_1z_4 - \\
&- f_1(\alpha)\left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + Dg_2(\beta_1)\right]z_1z_3 - \\
&- f_2(\alpha)g_1(\beta_1)\left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + Dh(\beta_2)\right]z_1z_2,\\
\beta_1^{\bullet} &= z_3 f_1(\alpha), \quad \beta_2^{\bullet} = z_2 f_2(\alpha)g_1(\beta_1),\\
\beta_3^{\bullet} &= z_1 f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2),
\end{aligned}
\tag{20}
$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$
\begin{aligned}
&\alpha^{\bullet\bullet} - F_4(\alpha)f_4^2(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet 2} + \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)\beta_1^{\bullet 2} + \\
&+ \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta)\beta_2^{\bullet 2} + \Gamma^{\alpha}_{33}(\alpha,\beta)\beta_3^{\bullet 2} = 0,\\
&\beta_1^{\bullet\bullet} - F_3(\beta_1)f_1^2(\alpha) + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet}\beta_1^{\bullet} + \\
&+ \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\beta_2^{\bullet 2} + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\beta_3^{\bullet 2} = 0,\\
&\beta_2^{\bullet\bullet} - F_2(\beta_2)f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1) + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet}\beta_2^{\bullet} + \\
&+ 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\beta_1^{\bullet}\beta_2^{\bullet} + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\beta_3^{\bullet 2} = 0,\\
&\beta_3^{\bullet\bullet} - F_1(\beta_3)f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2) + 2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet}\beta_3^{\bullet} + \\
&+ 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\beta_1^{\bullet}\beta_3^{\bullet} + 2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\beta_2^{\bullet}\beta_3^{\bullet} = 0.
\end{aligned}
$$

П р е д л о ж е н и е 7. *Если всюду справедлива система равенств* (7), *то система* (20) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$
\begin{aligned}
&\Phi_1(z_4, \ldots, z_1; \alpha, \beta) = \\
&= z_1^2 + \ldots + z_4^2 + V(\alpha,\beta) = C_1 = \text{const},\\
&V(\alpha,\beta) = V_4(\alpha) + \sum_{k=1}^{3} V_{4-k}(\beta_k) = \\
&= -2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F_4(a)da - 2\sum_{k=1}^{3}\int\limits_{\beta_{k0}}^{\beta_k} F_{4-k}(b)db.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Следующие утверждения справедливы в более общем виде, но мы ограничимся следующим.

П р е д л о ж е н и е 8. *Пусть* $F_{4-k}(\beta_k) \equiv 0$, $k = 1, 2, 3$. *Если выполнены условия предложений* 3–5, *то система* (20) *имеет четыре гладких первых интеграла вида* (13), (16), (18), (19).

Т е о р е м а 2. *Пусть* $F_{4-k}(\beta_k) \equiv 0$, $k = 1, 2, 3$. *Если выполнены условия предложений* 7, 8, *то система* (20) *обладает пятью независимыми первыми интегралами вида* (21), (13), (16), (18), (19).

То, что полный набор при некоторых условиях состоит из пяти, а не из семи первых интегралов, будет показано ниже.

3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В СИЛОВОМ ПОЛЕ С ДИССИПАЦИЕЙ

Теперь несколько модифицируем (20) при условиях (10)–(12), (14), (15), (17), а также при $F_{4-k}(\beta_k) \equiv 0$, $k = 1, 2, 3$. При этом получим систему со знакопеременной диссипацией, наличие которой характеризует не только коэффициент $b\delta(\alpha)$, $b > 0$, в первом уравнении (22), но и следующая зависимость (внешнего) силового поля в проекциях на оси $z_k^{\bullet}$, $k = 1, \ldots, 4$, соответственно: $z_1F^1(\alpha)$, $z_2F^1(\alpha)$, $z_3F^1(\alpha)$, $F_4(\alpha)f_4(\alpha) + z_4F_4^1(\alpha)$. Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ примет вид

$$
\begin{aligned}
\alpha^{\bullet} &= z_4 f_4(\alpha) + b\delta(\alpha),\\
z_4^{\bullet} &= F_4(\alpha)f_4(\alpha) - f_4(\alpha)\left[\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + Df_4(\alpha)\right]z_4^2 -
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
-\frac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)z_3^2-\frac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta)z_2^2-\\
-\frac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^{\alpha}_{33}(\alpha,\beta)z_1^2+z_4F_4^1(\alpha),\\
\overset{\bullet}{z_3}=-f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha)+Df(\alpha)\right]z_3z_4-\\
-f(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z_2^2-\\
-f(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)z_1^2+z_3F^1(\alpha),\\
\overset{\bullet}{z_2}=-f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha)+Df(\alpha)\right]z_2z_4- \qquad (22)\\
-f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1)+Dg(\beta_1)\right]z_2z_3-\\
-f(\alpha)g(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)z_1^2+z_2F^1(\alpha),\\
\overset{\bullet}{z_1}=-f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha)+Df(\alpha)\right]z_1z_4-\\
-f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1)+Dg(\beta_1)\right]z_1z_3-\\
-f(\alpha)g(\beta_1)\left[2\Gamma_3(\beta_2)+Dh(\beta_2)\right]z_1z_2+z_1F^1(\alpha),\\
\overset{\bullet}{\beta_1}=z_3f(\alpha),\quad \overset{\bullet}{\beta_2}=z_2f(\alpha)g(\beta_1),\\
\overset{\bullet}{\beta_3}=z_1f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2),
\end{gathered}
$$

и она почти всюду эквивалентна системе на вторые производные от α, β, в которой явно выделяется знакопеременная диссипация [2, 3].

Перейдем теперь к интегрированию системы восьмого порядка (22) при выполнении группы условий (11) и при выполнении равенств

$$
\begin{gathered}
\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)\equiv\Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1)\equiv\\
\equiv\Gamma^{\alpha}_{33}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)=\Gamma_4(\alpha).
\end{gathered}
$$

Пусть при этом функция $f_4(\alpha)$ удовлетворяет первому из группы равенств (7). Введем также (по аналогии с (11)) ограничение и на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять следующему преобразованному равенству из (7):

$$
f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha)+Df(\alpha)\right]+\Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha)\equiv 0,
$$

и происходит отделение независимой подсистемы седьмого порядка:

$$
\begin{gathered}
\overset{\bullet}{\alpha}=z_4f_4(\alpha)+b\delta(\alpha),\\
\overset{\bullet}{z_4}=F_4(\alpha)f_4(\alpha)-\frac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma_4(\alpha)(z_3^2+z_2^2+z_1^2)+z_4F_4^1(\alpha),\\
\overset{\bullet}{z_3}=-f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha)+Df(\alpha)\right]z_3z_4-\\
-f(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\beta_1)z_2^2-\\
-f(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\beta_1,\beta_2)z_1^2+z_3F^1(\alpha),\\
\overset{\bullet}{z_2}=-f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha)+Df(\alpha)\right]z_2z_4-\\
-f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1)+Dg(\beta_1)\right]z_2z_3-\\
-f(\alpha)g(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\beta_1,\beta_2)z_1^2+z_2F^1(\alpha),\\
\overset{\bullet}{z_1}=-f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha)+Df(\alpha)\right]z_1z_4-\\
-f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1)+Dg(\beta_1)\right]z_1z_3-\\
-f(\alpha)g(\beta_1)\left[2\Gamma_3(\beta_2)+Dh(\beta_2)\right]z_1z_2+z_1F^1(\alpha),\\
\overset{\bullet}{\beta_1}=z_3f(\alpha),\quad \overset{\bullet}{\beta_2}=z_2f(\alpha)g(\beta_1),\\
\overset{\bullet}{\beta_3}=z_1f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2).
\end{gathered}
$$

Для полного интегрирования данной системы необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных $w_4=z_4$, $w_3=\sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2}$, $w_2=\frac{z_2}{z_1}$, $w_1=\frac{z_3}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}}$, последняя система распадается следующим образом:

$$
\begin{gathered}
\overset{\bullet}{\alpha}=w_4f_4(\alpha)+b\delta(\alpha),\\
\overset{\bullet}{w_4}=F_4(\alpha)f_4(\alpha)-\frac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma_4(\alpha)w_3^2+w_4F_4^1(\alpha),\qquad (23)\\
\overset{\bullet}{w_3}=\frac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma_4(\alpha)w_3w_4+w_3F^1(\alpha),
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\overset{\bullet}{w_2}=(\pm)w_3\sqrt{1+w_2^2}f(\alpha)g(\beta_1)\left[2\Gamma_3(\beta_2)+Dh(\beta_2)\right],\\
\overset{\bullet}{\beta_2}=(\pm)\frac{w_2w_3}{\sqrt{1+w_2^2}}f(\alpha)g(\beta_1),
\end{gathered}\qquad (24)
$$

$$
\begin{gathered}
\overset{\bullet}{w_1}=(\pm)w_3\sqrt{1+w_1^2}f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1)+Dg(\beta_1)\right],\\
\overset{\bullet}{\beta_1}=(\pm)\frac{w_1w_3}{\sqrt{1+w_1^2}}f(\alpha),
\end{gathered}\qquad (25)
$$

$$
\overset{\bullet}{\beta_3}=(\pm)\frac{w_3}{\sqrt{1+w_2^2}}f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2).\qquad (26)
$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (23)–(26) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (23), по одному – для систем (24) и (25) (меняя в них независимые переменные), и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (26) (т.е. всего пять).

Будем также предполагать, что для некоторого $\kappa\in\mathbf{R}$ выполнено равенство

$$
\begin{gathered}
\frac{f^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)}\Gamma_4(\alpha)=\kappa\frac{d}{d\alpha}\ln|\Delta(\alpha)|,\\
\Delta(\alpha)=\frac{\delta(\alpha)}{f_4(\alpha)},
\end{gathered}\qquad (27)
$$

а для некоторых $\lambda_4^0, \lambda_k^1 \in \mathbf{R}$ выполнены равенства

$$F_4(\alpha) = \lambda_4^0 \frac{d}{d\alpha}\frac{\Delta^2(\alpha)}{2},$$
$$F_k^1(\alpha) = \lambda_k^1 f_4(\alpha)\frac{d}{d\alpha}\Delta(\alpha), \quad k = 1,\ldots,4. \tag{28}$$

Здесь $F_1^1(\alpha) = F_2^1(\alpha) = F_3^1(\alpha) = F^1(\alpha)$, т.е. $\lambda_1^1 = \lambda_2^1 = \lambda_3^1 = \lambda^1$. Условие (27) назовем "геометрическим", а условия из группы (28) – "энергетическими".

Условие (27) названо геометрическим, в том числе, потому, что накладывает условие на коэффициент связности $\Gamma_4(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\Delta(\alpha)$. Условия же группы (28) названы энергетическими, в том числе, потому, что силы становятся, в некотором смысле, "потенциальными" по отношению к функциям $\Delta^2(\alpha)/2$ и $\Delta(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции $\Delta(\alpha)$). При этом функция $\Delta(\alpha)$ и вводит в систему диссипацию разных знаков.

Т е о р е м а 3. *Пусть выполняются условия* (27) *и* (28). *Тогда система* (23)–(26) *обладает полным набором – пятью независимыми, вообще говоря, трансцендентными* [7, 8] *первыми интегралами.*

В общем случае первые интегралы выписываются громоздко (поскольку приходится интегрировать уравнение Абеля [9]). В частности, если $\kappa = -1$, явный вид ключевого первого интеграла таков:

$$\Theta_1(w_4, w_3; \alpha) = G_1\left(\frac{w_4}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\Delta(\alpha)}\right) = \frac{f_4^2(\alpha)(w_4^2 + w_3^2) + (b - \lambda^1)w_4\delta(\alpha)f_4(\alpha) - \lambda_4^0\delta^2(\alpha)}{w_3\delta(\alpha)f_4(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \tag{29}$$

При этом дополнительный первый интеграл системы (23) имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_4, w_3; \alpha) = G_2\left(\Delta(\alpha), \frac{w_4}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\Delta(\alpha)}\right) = C_2 = \text{const}. \tag{30}$$

Первые интегралы для систем (24) и (25) будут иметь вид

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, 2, \tag{31}$$

о функциях $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1, 2$, см. (16), (18). А дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (26), находится по аналогии с (19):

$$\Theta_5(\beta_2, \beta_3) = \beta_3 \pm \int_{\beta_{20}}^{\beta_2} \frac{C_4 h(b)}{\sqrt{C_3^2\Psi_2^2(b) - C_4^2}} db = C_5 = \text{const}, \tag{32}$$

при этом после взятия этого интеграла вместо постоянных C_3, C_4 можно подставить соответствующие левые части равенств (31).

Выражение первых интегралов (29)–(32) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\Delta(\alpha)$. Действительно, при $\kappa = -1$ дополнительный первый интеграл системы (23) найдется из квадратуры

$$d\ln|\Delta(\alpha)| = \frac{(b - u_4)du_4}{2W(u_4) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4W(u_4)}\}/2},$$
$$W(u_4) = u_4^2 + (b - \lambda^1)u_4 - \lambda_4^0, \quad u_4 = \frac{w_4}{\Delta(\alpha)}.$$

При этом после интегрирования вместо C_1 можно подставить (29). Правая часть данной квадратуры выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая – в зависимости о функции $\Delta(\alpha)$.

Справедлива и теорема, в некотором смысле обратная к теореме 3.

Т е о р е м а 4. *Условия* (27), (28) (*например, при* $\kappa = -1$) *являются необходимыми условиями существования первого интеграла* (29) *для системы* (23)–(26).

4. СТРУКТУРА ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДЛЯ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ

Если α – периодическая координата периода 2π, то система (23)–(26) в условиях теоремы 3 становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним [2, 10]. При этом при $b = -\lambda^1$ она превращается в систему консервативную, которая обладает двумя гладкими первыми интегралами:

$$\Phi_1(-b; w_4, w_3; \alpha) = w_3^2 + w_4^2 + 2bw_4\Delta(\alpha) - \lambda_4^0\Delta^2(\alpha) = \text{const}, \tag{33}$$

$$\Phi_2(w_3; \alpha) = w_3\Delta(\alpha) = \text{const}. \tag{34}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (33), (34) также является первым интегралом системы (23)–(26) при $b = -\lambda^1$. Но при $b \neq -\lambda^1$ каждая из функций

$$\Phi_1(\lambda^1; w_4, w_3; \alpha) = \\ = w_3^2 + w_4^2 + (b - \lambda^1) w_4 \Delta(\alpha) - \lambda_4^0 \Delta^2(\alpha) \qquad (35)$$

и (34) по отдельности не является первым интегралом системы (23)–(26). Однако отношение функций (35), (34) является первым интегралом системы (23)–(26) (при $\kappa = -1$) при любом b.

Вообще же, для систем любого порядка с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств [11, 12].

5. СИСТЕМЫ НА РАССЛОЕНИИ К ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ СФЕРЕ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Выше уже были выделены в качестве примеров два класса многообразий (поверхности вращения и пространства Лобачевского), для которых применима предлагаемая методика интегрирования систем с диссипацией. Теперь отметим однопараметрическое семейство функций $f(\alpha)$ и $f_4(\alpha)$, определяющей метрику на четырехмерной сфере:

$$f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sqrt{1 + \mu_1 \sin^2\alpha}}, \quad \mu_1 \in \mathbf{R},$$
$$f_4(\alpha) \equiv -1,$$

при этом выделим два существенных подслучая:

$$\mu_1 = 0, \qquad (36)$$

$$\mu_1 = -1. \qquad (37)$$

Случай (36) формирует класс систем, соответствующих движению динамически симметричного пятимерного твердого тела на нулевых уровнях циклических интегралов, вообще говоря, в неконсервативном поле сил, при дополнительной зависимости силового поля от (тензора второго ранга) угловой скорости [2, 10]. Случай (37) формирует класс систем, соответствующих движению точки на четырехмерной сфере с естественной метрикой, индуцированной метрикой всеобъемлющего пятимерного евклидова пространства. В частности, при $\delta(\alpha) = F_4(\alpha) \equiv 0$ рассматриваемая система описывает геодезический поток на четырехмерной сфере. В случае (36) если $\delta(\alpha) = F_4(\alpha)/\cos\alpha$, то система описывает движение пятимерного твердого тела в силовом поле $F_4(\alpha)$ под действием следящей силы [2, 3]. В частности, если $F_4(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha$, $\delta(\alpha) = \sin\alpha$, то система описывает обобщенный сферический маятник, помещенный в поток набегающей среды в пятимерном пространстве, и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [2, 3, 10, 11].

Если функция $\delta(\alpha)$ не является периодической, то рассматриваемая диссипативная система является системой с переменной диссипацией с ненулевым средним (т.е. она является собственно диссипативной). Тем не менее, и в этом случае (благодаря теоремам 3 и 4) можно получить явный вид трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Последнее также определяет новые нетривиальные случаи интегрируемости динамических систем с диссипацией на касательном расслоении гладкого четырехмерного многообразия в явном виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шамолин М.В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53. Вып. 3. С. 209–210.
2. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере // ДАН. 2017. Т. 474. № 2. С. 177–181.
3. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия // ДАН. 2018. Т. 479. № 3. С. 270–276.
4. *Козлов В.В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // Прикл. матем. и механ. 2015. Т. 79. № 3. С. 307–316.
5. *Клейн Ф.* Неевклидова геометрия. Пер. с нем. Изд. 4, испр., обновл. М.: URSS, 2017. 352 с.
6. *Вейль Г.* Симметрия. М.: URSS, 2007.
7. *Козлов В.В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи матем. наук. 1983. Т. 38. Вып. 1. С. 3–67.
8. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.-Л.: ОГИЗ, 1947.
9. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
10. *Трофимов В.В., Шамолин М.В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. и прикл. матем. 2010. Т. 16. Вып. 4. С. 3–229.
11. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия // ДАН. 2018. Т. 482. № 5. С. 527–533.
12. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1987.

NEW CASES OF HOMOGENEOUS INTEGRABLE SYSTEMS WITH DISSIPATION ON THE TANGENT BUNDLES OF THREE-DIMENSIONAL MANIFOLDS

M. V. Shamolin[a]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

The integrability of certain classes of homogeneous dynamical systems is shown on the tangent bundles to four-dimensional manifolds. In this case, the force fields have the so-called variable dissipation and generalize the previously considered fields.

Keywords: dynamical system, integrability, dissipation, transcendental first integral