М. В. Шамолин, Предельные множества дифференциальных уравнений около сингулярных особых точек, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 187, 119–128

DOI: https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-187-119-128

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 187 (2020). С. 119–128
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-187-119-128

УДК 517.925

ПРЕДЕЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОКОЛО СИНГУЛЯРНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК

© 2020 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. Предложена методика исследования систем возле сингулярных особых точек, т.е. точек, в окрестности которых невозможно разложить в ряд векторное поле системы. Применяются методы теории многомерных топографических систем Пуанкаре для поиска притягивающих режимов в системе.

Ключевые слова: динамическая система, сингулярная особая точка, предельный цикл.

LIMIT SETS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS NEAR SINGULAR CRITICAL POINTS

© 2020 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. We suggest a method of the study of dynamical systems near singular critical points, i.e., points in whose neighborhoods the vector field of the system cannot be expanded into a series. We apply methods of the theory of multidimensional topographic Poincaré systems for the search of attracting regimes in the system.

Keywords and phrases: dynamical system, singular critical point, limit cycle.

AMS Subject Classification: 34C07, 37G10

Введение. Классические методы нахождения замкнутых траекторий систем обыкновенных дифференциальных уравнений около (регулярных) особых точек восходят к работам А. Пуанкаре (1892 г.; см. [20]). Позже исследования по данному вопросу были продолжены в работах А. А. Андронова [1,2], Хопфа [50] и других авторов (например, известная бифуркация рождения цикла из слабого фокуса).

Отличительной особенностью работ отмеченных авторов является исследование окрестностей векторных полей систем именно около регулярной особой точки, т.е. там, где правые части систем имеют достаточное количество непрерывных производных (см. также [3, 5, 7]).

В работе предлагается некоторая методика исследования систем возле сингулярных особых точек, в окрестности которых по некоторым причинам невозможно разложить в ряд векторное поле системы. Применяются методы теории многомерных топографических систем Пуанкаре.

Работа посвящена исследованию систем обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка около сингулярных особых точек, т.е. точек, лежащих на многообразиях, на которых векторные поля систем не определены. Изучаются возможности существования замкнутых орбит или более общих предельных множеств, многообразие типов которых обеспечено достаточно высоким (третьим) порядком самих систем (см. также [4, 6, 9]).

Предполагается наличие интегральной плоскости вблизи сингулярной особой точки, что естественно, поскольку при понижении порядка системы до второго имеющиеся особенности правых частей в данной точке, как правило, исчезают. Рассматриваемая ситуация часто встречается в приложениях.

Указывается на тесную связь полученных методов исследования с методом многомерных топографических систем Пуанкаре и продолжается деятельность по развитию этого метода, начатого в предыдущих работах автора (см. [25,26,28,29,34,36,42]). Для маятниковых систем определенного вида (встречающихся, кстати, в динамике твердого тела) указан явный вид семейства поверхностей трехмерных топографических систем, позволяющих «отлавливать» предельные множества.

1. Некоторые типы особенностей. Предположим, что плоскость

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_3 = 0\} \tag{1}$$

является интегральной для системы с гладкими правыми частями

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = X_1(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_2 = X_2(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_3 = X_3(x_1, x_2, x_3), \end{cases} \tag{2}$$

и после формального доопределения последней на всей плоскости (1) получаем независимую подсистему второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \Phi_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = \Phi_2(x_1, x_2), \end{cases} \tag{3}$$

при этом

$$X_1(x_1, x_2, 0) = \Phi_1(x_1, x_2), \quad X_2(x_1, x_2, 0) = \Phi_2(x_1, x_2), \quad X_3(x_1, x_2, 0) \equiv 0.$$

Предположим также, что у системы (2) существует изолированная особая точка (начало координат). При этом на плоскости $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 = 0\}$ правая часть системы, вообще говоря, не определена, например, в правой части присутствует особенность типа $f(x_1, x_2, x_3)/x_1$, где $f(x_1, x_2, x_3)$ — достаточно гладкая функция около начала координат.

В приложениях могут возникать случаи, когда правая часть системы возле особой точки или не имеет производных, или их нахождение сильно затруднительно, поскольку возникает проблема «доопределения по непрерывности» правых частей системы в самих особых точках.

2. Пример из динамики. Если на плоскости (1) у системы (3) вблизи начала координат есть предельный цикл, то возникает вопрос: появятся ли у общей системы третьего порядка в области

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 > 0, \ x_3 > 0\}$$

какие-либо нетривиальные предельные множества? В общем случае данный вопрос достаточно сложный, но, используя трехмерную топографическую систему Пуанкаре [34] как совокупность (двумерных) поверхностей уровня функции

$$V(x_1, x_2, x_3) = x_1^{2k} + x_2^{2k} + x_3^{2k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

вблизи начала координат и исследуя знак скалярного произведения

$$\big(\operatorname{grad} V(x_1, x_2, x_3), v(x_1, x_2, x_3)\big),$$

где $v = v(x_1, x_2, x_3)$ — векторное поле исследуемой системы третьего порядка, можно «поймать» предельные циклы не только вблизи особой точки.

Рассмотрим сначала пример системы третьего порядка, возникающей в динамике твердого тела в неконсервативном поле (см. [37, 38, 40]). Систему

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -Z_2 + \sigma(Z_1^2 + Z_2^2)\sin\alpha + \sigma n_0^2 \sin\alpha\cos^2\alpha + \dfrac{B}{m}\sin\alpha\cos\alpha, \\ \dot{Z}_2 = n_0^2 \sin\alpha\cos\alpha - Z_2\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) - Z_1^2 \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ \dot{Z}_1 = -Z_1\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) + Z_1 Z_2 \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \sigma, n_0, B, m > 0, \end{cases} \tag{4}$$

$$\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) = -\sigma(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha + \sigma n_0^2 \sin^2\alpha\cos\alpha - \frac{B}{m}\cos^2\alpha$$

рассмотрим в слое

$$\Pi_{(0,\pi)} = \big\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbb{R}^3 : \ Z_1 > 0, \ 0 < \alpha < \pi\big\}.$$

Если формально систему (4) доопределить по непрерывности при $Z_1 = 0$, то плоскость $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbb{R}^3 : \ Z_1 = 0\}$ является интегральной. На ней «отщепившаяся» система второго порядка

$$\begin{cases} \dot\alpha = -\Omega + \sigma\Omega^2\sin\alpha + \sigma n_0^2\sin\alpha\cos^2\alpha + \dfrac{B}{m}\sin\alpha\cos\alpha, \\ \dot\Omega = n_0^2\sin\alpha\cos\alpha + \Omega\{\sigma\Omega^2\cos\alpha - \sigma n_0^2\sin^2\alpha\cos\alpha + \dfrac{B}{m}\cos^2\alpha\} \end{cases} \tag{5}$$

на двумерном цилиндре $\{(\alpha, \Omega) \in \mathbb{R}^2 : \ \alpha \bmod 2\pi\}$ имеет бесконечное число топологически различных фазовых портретов (см. [30, 32]), и при некоторых условиях вокруг точки $(\pi, 0)$ могут возникнуть предельные циклы (см. [32]).

Возникает вопрос: появятся ли у системы (4) в слое $\Pi_{(0,\pi)}$ около особой точки $(\pi, 0, 0)$ какие-либо замкнутые траектории или, вообще говоря, предельные множества?

Воспользуемся методом многомерных топографических систем Пуанкаре (см. [34]). Рассмотрим поверхность уровня (топографическую систему) неотрицательной функции (Ляпунова)

$$V_0(\alpha, Z_1, Z_2) = Z_1^2 + Z_2^2 + n_0^2\sin^2\alpha$$

во всем пространстве $\mathbb{R}^3\{\alpha, Z_1, Z_2\}$. Поверхности уровня функции V_0 заполняются фазовыми траекториями системы

$$\begin{cases} \dot\alpha = -Z_2, \\ \dot Z_2 = n_0^2\sin\alpha\cos\alpha - Z_1^2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ \dot Z_1 = Z_1 Z_2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \end{cases}$$

которую рассматриваем в качестве системы сравнения для (4).

Скалярное произведение градиента $\operatorname{grad} V_0(\alpha, Z_1, Z_2)$ на векторное поле системы (4) в координатах (α, Z_1, Z_2) является знакопеременной характеристической функцией $\chi(\alpha, Z_1, Z_2)$ и равно

$$2(Z_1^2 + Z_2^2)\left[\sigma(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha + \frac{B}{m}\cos^2\alpha\right] + 2\sigma n_0^4\sin^2\alpha\cos^3\alpha + 2\frac{B}{m}n_0^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$$

Так, например, в слое

$$\Pi_{(0,\pi/2)} = \big\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbb{R}^3 : \ Z_1 > 0, \ 0 < \alpha < \pi/2\big\}$$

функция $\chi(\alpha, Z_1, Z_2)$ строго положительна, а в слое

$$\Pi_{(\pi/2,\pi)} = \big\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbb{R}^3 : \ Z_1 > 0, \ \pi/2 < \alpha < \pi\big\}$$

она может менять знак. Действительно, если $\sigma n_0 < 2$, то при условии $2B/(mn_0) = \sigma n_0 + \varepsilon$, где ε — малое положительное число, происходит следующее. В некоторой малой окрестности точки $(\pi, 0, 0)$ характеристическая функция χ положительно определена (см. [34]), что и подтверждает отталкивающий характер (сингулярной) особой точки $(\pi, 0, 0)$. Но при этом существует такой сферический слой, в который через его внутреннюю и внешнюю границы фазовые траектории системы (4) только входят. Поскольку вблизи $(\pi, 0, 0)$ других особых точек системы (4) нет, в рассматриваемой сферическом слое существует нетривиальное ω-предельное множество. Можно показать, что в данном случае это предельное множество — притягивающий предельный цикл.

3. Более общий случай системы третьего порядка. Приведенные рассуждения распространяются и на более общий случай маятниковых систем вида

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = -x_1 + \delta F_\varphi(\varphi, x_1, x_2), \\ \dot{x}_1 = F(\varphi) - x_2^2 \operatorname{ctg}\varphi + \delta F_1(\varphi, x_1, x_2, \operatorname{ctg}\varphi), \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 \operatorname{ctg}\varphi + \delta F_2(\varphi, x_1, x_2, \operatorname{ctg}\varphi), \end{cases}$$

где $F'(0) > 0$, $F_i(s_1, s_2, s_3, s_4)$ — гладкие функции (вблизи начала координат), $\partial F_i(s_1, s_2, s_3, s_4)/\partial s_4$ — полиномы по s_4 степени s^i, $i = 1, 2$, $\delta \in \mathbb{R}$. При этом функцию V следует искать в виде

$$V = f_\varphi(\varphi, x_1, x_2)\sin^2\varphi + f_1(\varphi, x_1, x_2)x_1^{2k} + f_2(\varphi, x_1, x_2)x_2^{2k},$$

при этом f_φ, f_1, f_2 — гладкие положительные функции и $2k \geqslant s + 1$, $s = \max\limits_{i=1,2} s^i$, $k \in \mathbb{N}$.

4. Системы на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере. Рассмотрим следующую систему порядка $2(n-1)$ (см. также [47]):

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_{n-1} + bg(\alpha), \\ \dot{z}_{n-1} = F(\alpha) - (z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2)f(\alpha), \\ \dot{z}_{n-2} = z_{n-2}z_{n-1}f(\alpha) + (z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2)f(\alpha), \\ \dot{z}_{n-3} = z_{n-3}z_{n-1}f(\alpha) - z_{n-3}z_{n-2}f(\alpha)\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - (z_1^2 + \ldots + z_{n-4}^2)f(\alpha)\dfrac{1}{\sin\beta_1}\dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{z}_1 = z_1 f(\alpha)\left\{\displaystyle\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}, \end{cases} \qquad (6)$$

$$\begin{cases} \dot{\beta}_1 = z_{n-2}f(\alpha), \\ \dot{\beta}_2 = -z_{n-3}f(\alpha)\dfrac{1}{\sin\beta_1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{\beta}_{n-2} = (-1)^{n+1}z_1 f(\alpha)\dfrac{1}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}, \end{cases} \qquad (7)$$

с параметром $b \geqslant 0$, на касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^{n-1}\{z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ к $(n-1)$-мерной сфере

$$\mathbb{S}^{n-1}\bigl\{(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) :\ 0 \leqslant \alpha, \beta_1,\ \ldots,\ \beta_{n-3} \leqslant \pi,\ \beta_{n-2} \bmod 2\pi\bigr\}.$$

Функции $F(\alpha)$, $f(\alpha)$, и $g(\alpha)$ — периодические, достаточно гладкие, за исключением, быть может, точек $\alpha = 0 \bmod \pi/2$.

Функция $f(\alpha)$ определяет метрику на сфере, а функции $F(\alpha)$ и $g(\alpha)$ — силовое поле. Первое уравнение системы (6) и система (7) задают координаты в касательном пространстве к сфере (являются обобщенными кинематическими соотношениями). При этом система (6), (7) без последнего уравнения является независимой подсистемой порядка $2n-3$ (ввиду цикличности переменной β_{n-2}).

Видно, что, поскольку мы имеем дело с конечномерной сферой, то функция $f(\alpha)$ в точках вырождения сферических координат (в классических обозначениях это северный и южный полюса сферы — точки $\alpha = 0 \bmod \pi$) может иметь особенности. Причем эти особенности — полюсы (а не существенно особые точки, в смысле комплексного анализа [24, 35, 45]), т.е. предел функции $f(\alpha)$ в этих точках бесконечен. Кроме того, в рассматриваемой системе имеются еще коэффициенты (зависящие от углов β_s, $s = 1, \ldots, n-3$), которые также имеют особенности — полюсы.

4.1. Первые интегралы и силовые поля. При $b = 0$ система (6), (7) является консервативной и обладает полным набором (n штук) первых интегралов [47]:

$$\begin{gathered}
\Phi_1(z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha) = z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2 + 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(\xi)d\xi = C_1 = \text{const}, \\
\Phi_2(z_{n-2}, \ldots, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2} \exp\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi)d\xi = C_2 = \text{const}, \\
\Phi_3(z_{n-3}, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1) = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2} \exp\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi)d\xi \cdot \sin\beta_1 = C_3 = \text{const}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Phi_{n-2}(z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-4}) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \exp\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi)d\xi \cdot \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-4} = C_{n-2} = \text{const}, \\
\Phi_{n-1}(z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-3}) = z_1 \exp\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi)d\xi \cdot \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-3} = C_{n-1} = \text{const}, \\
\Phi_n(z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C_n = \text{const}.
\end{gathered} \tag{8}$$

При $b > 0$ система (6), (7) перестает быть консервативной и является динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним (см. [15, 21, 27, 31, 39, 41]).

Выделим два существенных случая для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на сфере:

$$f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{9}$$

а также

$$f(\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha\sin\alpha}. \tag{10}$$

Случай (9) формирует класс систем, соответствующих пространственному движению динамически симметричного n-мерного твердого тела на нулевых уровнях первых интегралов (т.е. при наличии дополнительных групп симметрий), вообще говоря, в неконсервативном поле сил (см. [46, 47]). Случай (10) формирует класс систем, соответствующих движению материальной точки на $(n-1)$-мерной сфере также, вообще говоря, в неконсервативном поле сил. При этом в последнем случае метрика на сфере индуцируется евклидовой метрикой объемлющего n-мерного пространства. В частности, при $g(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ система (6), (7) описывает геодезический поток на $(n-1)$-мерной сфере.

Более того, в случае (9), если $g(\alpha) = F(\alpha)/\cos\alpha$, то система (6), (7) описывает движение свободного n-мерного твердого тела в силовом поле $F(\alpha)$ под действием следящей силы (см. [42]). В частности, если

$$F(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha, \quad g(\alpha) = \sin\alpha, \tag{11}$$

то система (6), (7) описывает также закрепленный n-мерный маятник на обобщенном сферическом шарнире, помещенный в поток набегающей среды, заполняющей n-мерное пространство (см. [47, 48]), и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда функция имеет существенно особые точки, соответствующие имеющимся притягивающим или отталкивающим предельным множествам системы (6), (7).

4.2. Поведение траекторий возле сингулярной особой точки. Система (6), (7), в силу наличия особенности в точках $\alpha = 0 \bmod \pi$ формально не имеет в начале координат положения равновесия. Но если изучить поведение векторного поля системы (6), (7) в окрестности начала координат, то можно сделать вывод, что само поле по модулю стремится к нулю почти вдоль любого направления в данной окрестности.

Поэтому доопределим векторное поле системы (6), (7) по непрерывности в начале координат, получив в нем положение равновесия нашего векторного поля (впрочем, как и в точке с координатой $\alpha = \pi$).

Проиллюстрируем теперь, как в данном случае применяется метод многомерных топографических систем Пуанкаре для исследования устойчивости по части переменных $(z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha)$ тривиального решения системы (6), (7), которое соответствует устранимой особенности векторного поля данной системы.

Из списка первых интегралов (8) нас будет интересовать первый из них:

$$\Phi_1(z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha) = z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2 + 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(\xi)d\xi = C_1 = \mathrm{const}\,. \tag{12}$$

Пусть для определенности $F'(0) > 0$. Тогда в окрестности начала координат справедливо разложение

$$\int\limits_0^{\alpha} F(\xi)d\xi = \frac{F'(0)}{2}\alpha^2 + \bar{o}(\alpha^2).$$

Воспользуемся и в данном случае методом многомерных топографических систем (Пуанкаре) (см. [34]). Рассмотрим поверхность уровня (топографическую систему) неотрицательной функции (Ляпунова)

$$V_0(\alpha, z_1, \ldots, z_{n-1}) = \Phi_1(z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha)$$

в окрестности начала координат. Поверхности уровня Функции V_0 заполняются фазовыми траекториями системы (6), (7) при $b = 0$, которую рассматриваем в качестве системы сравнения для (6), (7).

Скалярное произведение градиента $\operatorname{grad} V_0(\alpha, z_1, \ldots, z_{n-1})$ на векторное поле системы (6), (7) в координатах $(\alpha, z_1, \ldots, z_{n-1})$ является знакопеременной характеристической функцией $\chi(\alpha, z_1, \ldots, z_{n-1})$ и равно $\chi(\alpha, z_1, \ldots, z_{n-1}) = 2bF(\alpha)g(\alpha)$, что является гладкой функцией (в случае гладкости силового поля возле начала координат) и не зависит от особенностей векторного поля рассматриваемой системы.

Итак, если в некоторой малой проколотой окрестности начала координат (при $b > 0$) выполнено неравенство $F(\alpha)g(\alpha) \neq 0$, то вопрос об устойчивости тривиального решения системы (6), (7) решается однозначно.

Действительно, характеристическая функция $\chi(\alpha, z_1, \ldots, z_{n-1})$ знакоопределена. Если положительно, то это подтверждает отталкивающий характер (сингулярной) особой точки — начала координат. Если отрицательно, то это подтверждает притягивающий характер данной особой точки.

5. Теоремы устойчивости тривиального решения по части переменных в многомерной динамике.

Рассмотрим далее некоторые динамические уравнения движения n-мерного твердого тела, рассмотренные в [47, 48]. Для наглядности силовое поле выбрано в виде (11), а функция $f(\alpha)$, «отвечающая» за геометрию, — в виде (9).

Более общий случай может быть рассмотрен аналогичным образом (см. также монографию автора [48]).

5.1. Система на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере без внутреннего силового поля. Рассмотрим следующую систему динамических уравнений движения на касательном расслоении к многомерной сфере (см. [48]):

$$\alpha' = -(1 + \mu_2\mu_3)\, z_{n-1} + \mu_2 \sin\alpha, \tag{13}$$

$$z_{n-1}' = \sin\alpha\cos\alpha - (1 + \mu_2\mu_3)\,(z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \mu_3 z_{n-1}\cos\alpha, \tag{14}$$

$$z'_{n-2} = (1+\mu_2\mu_3)\, z_{n-2}z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} +$$
$$+ (1+\mu_2\mu_3)\,(z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \mu_3 z_{n-2}\cos\alpha, \tag{15}$$

$$z'_{n-3} = (1+\mu_2\mu_3)\, z_{n-3}z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - (1+\mu_2\mu_3)\, z_{n-3}z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} -$$
$$- (1+\mu_2\mu_3)\,(z_1^2+\ldots+z_{n-4}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} - \mu_3 z_{n-3}\cos\alpha, \tag{16}$$

. . . .

$$z'_1 = (1+\mu_2\mu_3)\, z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\} - \mu_3 z_1\cos\alpha, \tag{17}$$

$$\beta'_1 = (1+\mu_2\mu_3)\, z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{18}$$

$$\beta'_2 = -\,(1+\mu_2\mu_3)\, z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{19}$$

. . . .

$$\beta'_{n-3} = (-1)^n\,(1+\mu_2\mu_3)\, z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}}, \tag{20}$$

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1}\,(1+\mu_2\mu_3)\, z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}, \tag{21}$$

где имеются два ключевых безразмерных параметра $\mu_2, \mu_3 > 0$, возникающую в динамике n-мерного твердого тела, находящегося в неконсервативном поле сил (см. [47]).

Исследуем устойчивость ее тривиального решения по отношению к возмущениям переменных α, z_1, …, z_{n-1} (если, конечно, доопределить данную систему по непрерывности в начале координат вышуказанным способом).

Рассмотрим функцию

$$V(\alpha, z_1, \ldots, z_{n-1}) = (1+\mu_2^2)(z_{n-1}^2+\ldots+z_1^2) - 2\mu_2 z_{n-1}\sin\alpha + \sin^2\alpha, \tag{22}$$

которая является положительно определенной функцией в окрестности начала координат при любом $\mu_2 \geqslant 0$.

Теорема 1. *Функция* (22) *является для системы* (13)–(21) *функцией Ляпунова* (*Четаева*), *т.е. ее производная в силу системы* (13)–(21) *отрицательно определена при* $\mu_2 < \mu_3$ *и положительно определена при* $\mu_2 > \mu_3$.

Следствие 1. *При* $\mu_2 < \mu_3$ *система* (13)–(21) *имеет в начале координат* (*после доопределения правых частей в нем*) *притягивающую особую точку, а при* $\mu_2 > \mu_3$ *— отталкивающую.*

Доказательство. Действительно, производная функции (22) в силу системы (13)–(21) представляется в виде

$$2(\mu_2-\mu_3)(z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2)\cos\alpha. \qquad \square$$

5.2. Система на касательном расслоении к $(n-1)$*-мерной сфере с внутренним силовым полем.* Рассмотрим следующую систему динамических уравнений движения на касательном расслоении к многомерной сфере (см. [47, 48]):

$$\alpha' = -Z_{n-1} + \mu_2\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\sin\alpha + \mu_2\sin\alpha\cos^2\alpha - \mu_2\mu_3 Z_{n-1}\cos^2\alpha, \tag{23}$$

$$Z'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha - (1+\mu_2\mu_3)\left(\sum_{s=1}^{n-2}Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \mu_2 Z_{n-1}\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\cos\alpha -$$
$$-\mu_2 Z_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha + \mu_2\mu_3 Z_{n-1}^2\sin\alpha\cos\alpha - \mu_3 Z_{n-1}\cos\alpha, \tag{24}$$

$$Z'_{n-2} = (1+\mu_2\mu_3)\, Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (1+\mu_2\mu_3)\left(\sum_{s=1}^{n-3} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} +$$

$$+\mu_2 Z_{n-2}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - \mu_2 Z_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha + \mu_2\mu_3 Z_{n-2}Z_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha - \mu_3 Z_{n-2}\cos\alpha, \qquad (25)$$

$$Z'_{n-3} = (1+\mu_2\mu_3)\, Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - (1+\mu_2\mu_3)\, Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} -$$

$$-(1+\mu_2\mu_3)\left(\sum_{s=1}^{n-4} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \mu_2 Z_{n-3}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha -$$

$$-\mu_2 Z_{n-3}\sin^2\alpha\cos\alpha + \mu_2\mu_3 Z_{n-3}Z_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha - \mu_3 Z_{n-3}\cos\alpha, \qquad (26)$$

. . . .

$$Z'_1 = (1+\mu_2\mu_3)\, Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\} + \mu_2 Z_1\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha -$$

$$-\mu_2 Z_1\sin^2\alpha\cos\alpha + \mu_2\mu_3 Z_1 Z_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha - \mu_3 Z_1\cos\alpha, \qquad (27)$$

$$\beta'_1 = (1+\mu_2\mu_3)\, Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad (28)$$

$$\beta'_2 = -(1+\mu_2\mu_3)\, Z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \qquad (29)$$

. . . .

$$\beta'_{n-3} = (-1)^n\,(1+\mu_2\mu_3)\, Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}}, \qquad (30)$$

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1}\,(1+\mu_2\mu_3)\, Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}, \qquad (31)$$

возникающую в динамике n-мерного твердого тела, находящегося в неконсервативном поле сил (см. [47, 48]).

Исследуем устойчивость ее тривиального решения по отношению к возмущениям переменных $\alpha, Z_1, \ldots, Z_{n-1}$ (если, конечно, доопределить данную систему по непрерывности в начале координат вышуказанным способом).

Рассмотрим функцию

$$V(\alpha, Z_1, \ldots, Z_{n-1}) = (1+\mu_2^2)(Z_{n-1}^2 + \ldots + Z_1^2) - 2\mu_2 Z_{n-1}\sin\alpha + \sin^2\alpha, \qquad (32)$$

которая является положительно определенной функцией в окрестности начала координат при любом $\mu_2 \geqslant 0$.

Теорема 2. *Функция* (32) *является для системы* (23)–(31) *функцией Ляпунова* (*Четаева*), *т.е. ее производная в силу системы* (23)–(31) *отрицательно определена при* $\mu_2 < \mu_3$ *и положительно определена при* $\mu_2 > \mu_3$.

Следствие 2. *При* $\mu_2 < \mu_3$ *система* (23)–(31) *имеет в начале координат* (*после доопределения правых частей в нем*) *притягивающую особую точку, а при* $\mu_2 > \mu_3$ — *отталкивающую.*

Доказательство. Действительно, производная функции (32) в силу системы (23)–(31) представляется в виде

$$2(\mu_2 - \mu_3)(Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2) + o(\alpha^2 + Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2). \qquad (33)$$

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андронов А. А.* Собрание трудов. — М.: Изд-во АН СССР, 1956.
2. *Андронов А. А., Леонтович Е. А.* Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметра// Уч. записки ГГУ. — 1937. — *6*.

3. *Бендиксон И.* О кривых определяемых дифференциальными уравнениями// Усп. мат. наук. — 1941. — *9*. — С. 119–211.
4. *Биркгоф Дж.* Динамические системы. — М.-Л.: Гостехиздат, 1941.
5. *Брюно А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1979.
6. *Бурбаки Н.* Интегрирование. — М.: Наука, 1970.
7. *Годбийон К.* Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. — М.: Мир, 1973.
8. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. — М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
9. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. — М.-Л.: Гостехиздат, 1953.
10. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
11. *Иванова Т. А.* Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 2. — С. 43–51.
12. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — *38*, № 1. — С. 3–67.
13. *Ламб Г.* Гидродинамика. — М.: Физматгиз, 1947.
14. *Локшин Б. Я., Привалов В. А., Самсонов В. А.* Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. — М.: МГУ, 1986.
15. *Локшин Б. Я., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Маятниковые системы с динамической симметрией// Совр. мат. прилож. — 2016. — *100*. — С. 76–133.
16. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. — М.: Мир, 1986.
17. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику. — М.: Мир, 1975.
18. *Палис Ж., Ди Мелу В.* Геометрическая теория динамических систем. Введение. — М.: Мир, 1986.
19. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1967.
20. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. — М.-Л.: ОГИЗ, 1947.
21. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1989. — *3*. — С. 51–54.
22. *Трофимов В. В.* Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — *44*, № 5. — С. 1191–1199.
23. *Чаплыгин С. А.* Избранные труды. — М.: Наука, 1976.
24. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
25. *Шамолин М. В.* Замкнутые траектории различного топологического типа в задаче о движении тела в среде с сопротивлением// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1992. — *2*. — С. 52–56.
26. *Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в среде с сопротивлением// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1992. — *1*. — С. 52–58.
27. *Шамолин М. В.* Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента// Прикл. мат. мех. — 1993. — *57*, № 4. — С. 40–49.
28. *Шамолин М. В.* Применение методов топографических систем Пуанкаре и систем сравнения в некоторых конкретных системах дифференциальных уравнений// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1993. — *2*. — С. 66–70.
29. *Шамолин М. В.* Существование и единственность траекторий, имеющих в качестве предельных множеств бесконечно удаленные точки, для динамических систем на плоскости// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1993. — *1*. — С. 68–71.
30. *Шамолин М. В.* Новое двупараметрическое семейство фазовых портретов в задаче о движении тела в среде// Докл. РАН. — 1994. — *337*, № 5. — С. 611–614.
31. *Шамолин М. В.* Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1996. — *4*. — С. 57–69.
32. *Шамолин М. В.* Многообразие типов фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой// Докл. РАН. — 1996. — *349*, № 2. — С. 193–197.

33. *Шамолин М. В.* Определение относительной грубости и двупараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твердого тела// Усп. мат. наук. — 1996. — *51*, № 1. — С. 175–176.
34. *Шамолин М. В.* Пространственные топографические системы Пуанкаре и системы сравнения// Усп. мат. наук. — 1997. — *52*, № 3. — С. 177–178.
35. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209–210.
36. *Шамолин М. В.* О грубости диссипативных систем и относительной грубости и негрубости систем с переменной диссипацией// Усп. мат. наук. — 1999. — *54*, № 5. — С. 181–182.
37. *Шамолин М. В.* Новое семейство фазовых портретов в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 2000. — *371*, № 4. — С. 480–483.
38. *Шамолин М. В.* О предельных множествах дифференциальных уравнений около сингулярных особых точек// Усп. мат. наук. — 2000. — *55*, № 3. — С. 187–188.
39. *Шамолин М. В.* Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 1. — С. 169–170.
40. *Шамолин М. В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — *69*, № 6. — С. 1003–1010.
41. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 5. — С. 169–170.
42. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — *14*, № 3. — С. 3–237.
43. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — *65*, № 1. — С. 189–190.
44. *Шамолин М. В.* Многопараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2011. — № 3. — С. 24–30.
45. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *442*, № 4. — С. 479–481.
46. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — *68*, № 5 (413). — С. 185–186.
47. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — *453*, № 1. — С. 46–49.
48. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией// в кн.: Твердое тело в неконсервативном поле. — М.: ЛЕНАНД, 2019. — С. 456.
49. *Якоби К.* Лекции по динамике. — М.-Л.: ОНТИ, 1936.
50. *Hopf E.* Abzweigung einer periodischen Losung von einer stationaren Losung eines Differentialsystems// Ber. Math.-Phys. Kl. Sachs. Acad. Wiss. Leipzig. — 1942. — *94*. — P. 3–22.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: `shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru`