М. В. Шамолин, Случаи интегрируемости уравнений движения пятимерного твердого тела при наличии внутреннего и внешнего силовых полей, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 187, 82–118

DOI: https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-187-82-118

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 187 (2020). С. 82–118
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-187-82-118

УДК 517, 531.01

СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ПЯТИМЕРНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ НАЛИЧИИ ВНУТРЕННЕГО И ВНЕШНЕГО СИЛОВЫХ ПОЛЕЙ

© 2020 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. При изучении случаев интегрируемости многомерного твердого тела в неконсервативных силовых полях автором реализуются два подхода. Первый подход касается систем, в которых неконсервативность силового поля порождается введением дополнительных коэффициентов в кинематические соотношения; особняком здесь стоят случаи $n = 5$ и $n = 6$. Второй же подход основывается на одновременном воздействии двух силовых полей — внутреннем (консервативном) и внешнем (неконсервативном). Данная работа посвящена такому особенному случаю, когда $n = 5$.

***Ключевые слова*:** многомерное твердое тело, уравнения движения, неконсервативное поле сил, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

EXAMPLES OF INTEGRABLE EQUATIONS OF MOTION OF A FIVE-DIMENSIONAL RIGID BODY IN THE PRESENCE OF INTERNAL AND EXTERNAL FORCE FIELDS

© 2020 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. In the study of integrable systems that describe multidimensional rigid bodies in nonconservative force fields, two approaches are used. The first approach is concerned with systems in which the nonconservativity of force fields is related to additional coefficients in the cinematical relations; note that $n = 5$ and $n = 6$ are special cases. The second approach is based on the simultaneous influence of two force fields: internal (conservative) and external (nonconservative). This paper is devoted to the special case where $n = 5$.

***Keywords and phrases*:** multidimensional rigid body, equations of motion, conservative force field, integrability, transcendental first integral.

***AMS Subject Classification*:** 58-xx, 70-xx

СОДЕРЖАНИЕ

В работе систематизируются результаты по исследованию уравнений движения динамически симметричного n-мерного твердого тела, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид заимствован из динамики реальных твердых тел, взаимодействующих с сопротивляющейся средой по законам струйного обтекания, при котором на тело действует неконсервативная следящая сила, заставляющая во все время движения центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно, что означает наличие в системе неконсервативной пары сил. Иногда изложение идет при любом n, но упор делается на случай $n = 5$.

1. Более общая задача о движении со следящей силой

1.1. Динамическая часть уравнений движения. Рассмотрим движение однородного динамически симметричного твердого тела с «передним торцом» ($(n-1)$-мерным диском, «взаимодействующим со средой, заполняющей n-мерное пространство») в поле силы $\mathbf{S}$ сопротивления в условиях квазистационарности (см. [63, 67, 68, 71, 72]).

Пусть $(v, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$ — (обобщенные) сферические координаты вектора скорости некоторой характерной точки D твердого тела (D — центр $(n-1)$-мерного диска, лежащий на оси динамической симметрии тела), Ω — тензор угловой скорости тела, $Dx_1 \ldots x_n$ — система координат, связанная с телом, при этом ось симметрии CD совпадает с осью Dx_1 (C — центр масс), а оси $Dx_2, Dx_3, \ldots, Dx_n$ лежат в гиперплоскости диска, $I_1, I_2, I_3 = I_2, \ldots, I_n = I_2$, m — инерционно-массовые характеристики.

Примем следующие разложения в проекциях на оси системы координат $Dx_1 \ldots x_n$:

$$\mathbf{DC} = \{-\sigma, 0, \ldots, 0\}, \quad \mathbf{v}_D = v\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}), \tag{1.1.1}$$

где

$$\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\beta_1 \\ \sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 \\ \ldots \\ \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2} \\ \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2} \end{pmatrix} \tag{1.1.2}$$

— единичный вектор по оси вектора $\mathbf{v}$.

При этом примем также разложение для функции воздействия среды на n-мерное тело:

$$\mathbf{S} = \{-S, 0, \ldots, 0\}, \tag{1.1.3}$$

т.е. в данном случае внешняя сила $\mathbf{F} = \mathbf{S}$.

Тогда может быть получена часть динамических уравнений движения тела (в том числе, и в случае аналитических функций Чаплыгина [42, 43], см. далее), которая описывает движение центра масс и соответствует пространству $\mathbb{R}^n$, при этом касательные силы воздействия среды на $(n-1)$-мерный диск отсутствуют. В интересующем нас случае $n = 5$ данная система примет вид

$$\begin{gathered}\dot{v}\cos\alpha - \dot{\alpha}v\sin\alpha - \omega_{10}v\sin\alpha\cos\beta_1 + \omega_9 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 - \\ -\omega_7 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \omega_4 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \\ +\sigma(\omega_{10}^2 + \omega_9^2 + \omega_7^2 + \omega_4^2) = \frac{F_x}{m} = -\frac{S}{m},\end{gathered} \tag{1.1.4}$$

$$\begin{gathered}\dot{v}\sin\alpha\cos\beta_1 + \dot{\alpha}v\cos\alpha\cos\beta_1 - \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\sin\beta_1 + \\ +\omega_{10}v\cos\alpha - \omega_8 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \omega_6 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 - \\ -\omega_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 - \sigma(\omega_9\omega_8 + \omega_6\omega_7 + \omega_3\omega_4) - \sigma\dot{\omega}_{10} = 0,\end{gathered} \tag{1.1.5}$$

$$\begin{gathered}\dot{v}\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \dot{\alpha}v\cos\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\cos\beta_2 - \\ -\dot{\beta}_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 - \omega_9 v\cos\alpha + \omega_8 v\sin\alpha\cos\beta_1 - \omega_5 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \\ +\omega_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 - \sigma(\omega_8\omega_{10} - \omega_5\omega_7 - \omega_2\omega_4) + \sigma\dot{\omega}_9 = 0,\end{gathered} \tag{1.1.6}$$

$$\dot{v}\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \dot{\alpha}v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 +$$

$$+\dot\beta_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\cos\beta_3-\dot\beta_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3+\omega_7 v\cos\alpha-\omega_6 v\sin\alpha\cos\beta_1+$$

$$+\omega_5 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2-\omega_1 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3+\sigma(\omega_6\omega_{10}+\omega_5\omega_9-\omega_1\omega_4)-\sigma\dot\omega_7=0, \quad (1.1.7)$$

$$\dot v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3+\dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3+\dot\beta_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3+$$

$$+\dot\beta_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\sin\beta_3+\dot\beta_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3-\omega_4 v\cos\alpha+\omega_3 v\sin\alpha\cos\beta_1-$$

$$-\omega_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2+\omega_1 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3-\sigma(\omega_3\omega_{10}+\omega_2\omega_9+\omega_1\omega_7)+\sigma\dot\omega_4=0, \quad (1.1.8)$$

где

$$S=s(\alpha)v^2, \qquad \sigma=CD, \quad v>0. \quad (1.1.9)$$

Далее, вспомогательная матрица для вычисления момента силы сопротивления (приложенной в точке N) примет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & \ldots & x_{nN} \\ -S & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.1.10)$$

тогда может быть получена часть *динамических уравнений* движения тела, которая описывает движение тела вокруг центра масс и соответствуют алгебре Ли $\mathfrak{so}(n)$. В случае $n=5$ данная система примет вид (см. также [10, 11, 16, 17, 32, 40]):

$$(\lambda_4+\lambda_5)\dot\omega_1+(\lambda_4-\lambda_5)(\omega_4\omega_7+\omega_3\omega_6+\omega_2\omega_5)=0, \quad (1.1.11)$$

$$(\lambda_3+\lambda_5)\dot\omega_2+(\lambda_5-\lambda_3)(\omega_1\omega_5-\omega_3\omega_8-\omega_4\omega_9)=0, \quad (1.1.12)$$

$$(\lambda_2+\lambda_5)\dot\omega_3+(\lambda_2-\lambda_5)(\omega_4\omega_{10}-\omega_2\omega_8-\omega_1\omega_6)=0, \quad (1.1.13)$$

$$(\lambda_1+\lambda_5)\dot\omega_4+(\lambda_5-\lambda_1)(\omega_3\omega_{10}+\omega_2\omega_9+\omega_1\omega_7)=-x_{5N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \quad (1.1.14)$$

$$(\lambda_3+\lambda_4)\dot\omega_5+(\lambda_3-\lambda_4)(\omega_7\omega_9+\omega_6\omega_8+\omega_1\omega_2)=0, \quad (1.1.15)$$

$$(\lambda_2+\lambda_4)\dot\omega_6+(\lambda_4-\lambda_2)(\omega_5\omega_8-\omega_7\omega_{10}-\omega_1\omega_3)=0, \quad (1.1.16)$$

$$(\lambda_1+\lambda_4)\dot\omega_7+(\lambda_1-\lambda_4)(\omega_1\omega_4-\omega_6\omega_{10}-\omega_5\omega_9)=x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \quad (1.1.17)$$

$$(\lambda_2+\lambda_3)\dot\omega_8+(\lambda_2-\lambda_3)(\omega_9\omega_{10}+\omega_5\omega_6+\omega_2\omega_3)=0, \quad (1.1.18)$$

$$(\lambda_1+\lambda_3)\dot\omega_9+(\lambda_3-\lambda_1)(\omega_8\omega_{10}-\omega_5\omega_7-\omega_2\omega_4)=-x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \quad (1.1.19)$$

$$(\lambda_1+\lambda_2)\dot\omega_{10}+(\lambda_1-\lambda_2)(\omega_8\omega_9+\omega_6\omega_7+\omega_3\omega_4)=x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2. \quad (1.1.20)$$

Таким образом, фазовым пространством системы (1.1.4)–(1.1.8), (1.1.11)–(1.1.20) 15-го порядка является прямое произведение 5-мерного многообразия на алгебру Ли $\mathfrak{so}(5)$:

$$\mathbb{R}^1\times\mathbb{S}^4\times\mathfrak{so}(5). \quad (1.1.21)$$

1.2. Следствия динамической симметрии. Поскольку имеется динамическая симметрия

$$I_2=\ldots=I_n, \quad (1.2.1)$$

то система динамических уравнений обладает циклическими первыми интегралами

$$\omega_{k_1}\equiv\omega_{k_1}^0=\mathrm{const},\ldots,\omega_{k_s}\equiv\omega_{k_s}^0=\mathrm{const}, \quad s=\frac{(n-1)(n-2)}{2}. \quad (1.2.2)$$

При этом $k_1=1,\ldots,k_s$ — некоторые s неповторяющихся чисел из множества $W_1=\{1,2,\ldots,n(n-1)/2\}$.

В частности, система (1.1.4)–(1.1.8), (1.1.11)–(1.1.20) обладает первыми интегралами

$$\omega_1\equiv\omega_1^0, \quad \omega_2\equiv\omega_2^0, \quad \omega_3\equiv\omega_3^0, \quad \omega_5\equiv\omega_5^0, \quad \omega_6\equiv\omega_6^0, \quad \omega_8\equiv\omega_8^0, \quad (1.2.3)$$

рассматриваемыми на нулевых уровнях:

$$\omega_1^0=\omega_2^0=\omega_3^0=\omega_5^0=\omega_6^0=\omega_8^0=0. \quad (1.2.4)$$

Ненулевых же компонент $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_p}$ тензора Ω осталось

$$p = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} = n-1$$

штук (здесь $r_1, \ldots, r_p$ — оставшиеся p чисел из множества W_1, не равные $k_1, \ldots, k_s$), т.е. в нашем случае *четыре*.

1.3. Выбор следящей силы и новые квазискорости в системе. Если же рассматривается *более общая задача* о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$, лежащей на прямой $CD = Dx_1$ и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства ($\mathbf{V}_C$ — скорость центра масс, см. также [41, 45, 52, 55])

$$\mathbf{V}_C \equiv \mathbf{const}, \tag{1.3.1}$$

то в системе (1.1.4)–(1.1.8), (1.1.11)–(1.1.20)) вместо F_x должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил:

$$T - s(\alpha)v^2 \equiv 0. \tag{1.3.2}$$

Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы T в виде

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega) = s(\alpha)v^2, \qquad \mathbf{T} \equiv -\mathbf{S}. \tag{1.3.3}$$

Случай (1.3.3) выбора величины T следящей силы является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы меньшего порядка в системе (1.1.4)–(1.1.8), (1.1.11)–(1.1.20) после некоторого преобразования.

Укажем на достаточное условие такого отделения. Пусть выполнено следующее условие на величину T:

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega) =$$
$$= \sum_{i,j=0,\ i\leqslant j}^{n-1} \tau_{i,j}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)\omega_{r_i}\omega_{r_j} = T_1\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)v^2, \qquad \omega_0 = v. \tag{1.3.4}$$

Введем новые квазискорости. Для этого преобразуем величины $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_{n-1}}$ посредством композиции следующих $(n-2)$-х поворотов:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = T_{n-2,n-1}(-\beta_1) \circ T_{n-3,n-2}(-\beta_2) \circ \ldots \circ T_{1,2}(-\beta_{n-2}) \begin{pmatrix} \omega_{r_1} \\ \omega_{r_2} \\ \cdots \\ \omega_{r_{n-1}} \end{pmatrix}, \tag{1.3.5}$$

где матрица $T_{k,k+1}(\beta)$, $k = 1, \ldots, n-2$, получена из единичной наличием минора второго порядка $M_{k,k+1}$:

$$T_{k,k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{k,k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.3.6}$$

$$M_{k,k+1} = \begin{pmatrix} m_{k,k} & m_{k,k+1} \\ m_{k+1,k} & m_{k+1,k+1} \end{pmatrix}, \quad m_{k,k} = m_{k+1,k+1} = \cos\beta, \quad m_{k+1,k} = -m_{k,k+1} = \sin\beta.$$

В частности, для системы (1.1.4)–(1.1.8), (1.1.11)–(1.1.20) справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} z_1 &= \omega_4\cos\beta_3 + \omega_7\sin\beta_3, \\ z_2 &= (\omega_7\cos\beta_3 - \omega_4\sin\beta_3)\cos\beta_2 + \omega_9\sin\beta_2, \\ z_3 &= [(-\omega_7\cos\beta_3 + \omega_4\sin\beta_3)\sin\beta_2 + \omega_9\cos\beta_2]\cos\beta_1 + \omega_{10}\sin\beta_1, \\ z_4 &= [(\omega_7\cos\beta_3 - \omega_4\sin\beta_3)\sin\beta_2 - \omega_9\cos\beta_2]\sin\beta_1 + \omega_{10}\cos\beta_1. \end{aligned} \tag{1.3.7}$$

1.4. Редукции в системе и системы нормального вида. Динамическую часть уравнений движения в случаях (1.2.1), (1.2.2) можно переписать в виде

$$\dot v + \sigma\left(\sum_{s=1}^{n-1} z_s^2\right)\cos\alpha - \sigma\frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\sin\alpha\cdot\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right) =$$
$$= \frac{T_1\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)v^2 - s(\alpha)v^2}{m}\cos\alpha, \tag{1.4.1}$$
$$\dot\alpha v + z_{n-1}v - \sigma\left(\sum_{s=1}^{n-1} z_s^2\right)\sin\alpha - \sigma\frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\cos\alpha\cdot\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right) =$$
$$= \frac{s(\alpha)v^2 - T_1\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)v^2}{m}\sin\alpha, \tag{1.4.2}$$
$$\dot\beta_1\sin\alpha - z_{n-2}\cos\alpha - \frac{\sigma v}{(n-2)I_2}s(\alpha)\cdot\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right) = 0, \tag{1.4.3}$$
$$\dot\beta_2\sin\alpha\sin\beta_1 + z_{n-3}\cos\alpha - \frac{\sigma v}{(n-2)I_2}s(\alpha)\cdot\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right) = 0, \tag{1.4.4}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\dot\beta_{n-2}\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3} + (-1)^n z_1\cos\alpha -$$
$$-\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}s(\alpha)\cdot\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right) = 0, \tag{1.4.5}$$
$$\dot\omega_{r_1} = (-1)^n\frac{v^2}{(n-2)I_2}x_{nN}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha), \tag{1.4.6}$$
$$\dot\omega_{r_2} = (-1)^{n+1}\frac{v^2}{(n-2)I_2}x_{(n-1)N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha), \tag{1.4.7}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\dot\omega_{r_{n-1}} = \frac{v^2}{(n-2)I_2}x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha). \tag{1.4.8}$$

Здесь, как и ранее, введены следующие функции:

$$\begin{gathered}
\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right) = \left(\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\beta_1+\frac{\pi}{2},\beta_2,\ldots,\beta_{n-2}\right)\right),\\
\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right) = \left(\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\beta_2+\frac{\pi}{2},\beta_3,\ldots,\beta_{n-2}\right)\right),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\Delta_{v,n-3}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right) = \left(\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\ldots,\frac{\pi}{2},\beta_{n-3}+\frac{\pi}{2},\beta_{n-2}\right)\right),\\
\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right) = \left(\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\ldots,\frac{\pi}{2},\beta_{n-2}+\frac{\pi}{2}\right)\right),
\end{gathered} \tag{1.4.9}$$

а функция $\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v\right)$ представляется в виде

$$\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right) = |\mathbf{r}_N| = (\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N(\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})) =$$
$$= 0\cdot\cos\frac{\pi}{2} + \sum_{s=2}^{n} x_{sN}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)i_{sN}(\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}). \tag{1.4.10}$$

Здесь $i_{sN}(\beta_1,\dots,\beta_{n-2})$, $s=1,\dots,n$, $(i_{1N}(\beta_1,\dots,\beta_{n-2})\equiv 0)$ — компоненты единичного вектора по оси вектора $\mathbf{r}_N=\{0,x_{2N},\dots,x_{nN}\}$ на $(n-2)$-мерной сфере $\mathbb{S}^{n-2}\{\beta_1,\dots,\beta_{n-2}\}$, заданной равенством $\alpha=\pi/2$, как экваториальном сечении соответствующей $(n-1)$-мерной сферы $\mathbb{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2}\}$.

Таким образом, по-прежнему

$$\mathbf{i}_N(\beta_1,\dots,\beta_{n-2})=\mathbf{i}_v\left(\frac{\pi}{2},\beta_1,\dots,\beta_{n-2}\right), \tag{1.4.11}$$

а вектор $\mathbf{i}_v(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2})$ определяется в (1.1.2).

Зависимость от групп переменных $(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},\Omega/v)$ по-прежнему понимается как сложная зависимость от $(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},z_1/v,\dots,z_{n-1}/v)$ в силу (1.3.5).

Вводя далее новые безразмерные фазовые переменные и дифференцирование по формулам

$$z_k=n_1vZ_k,\ k=1,\dots,n-1,\quad \langle\cdot\rangle=n_1v\langle'\rangle,\quad n_1>0,\quad n_1=\text{const}, \tag{1.4.12}$$

приведем систему (1.4.1)–(1.4.8) к следующему виду:

$$v'=v\Psi(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},Z), \tag{1.4.13}$$

$$\begin{gathered}\alpha'=-Z_{n-1}+\sigma n_1\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\sin\alpha+\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}s(\alpha)\cos\alpha\cdot\Gamma_v(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},n_1Z)-\\-\frac{T_1(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},n_1Z)-s(\alpha)}{mn_1}\sin\alpha,\end{gathered} \tag{1.4.14}$$

$$\begin{gathered}Z'_{n-1}=\frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2n_1^2}\cdot\Gamma_v(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},n_1Z)-\left(\sum_{s=1}^{n-2}Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\\+\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^sZ_{n-1-s}\Delta_{v,s}(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},n_1Z)\right\}-\\-Z_{n-1}\cdot\Psi(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},Z),\end{gathered} \tag{1.4.15}$$

$$\begin{gathered}Z'_{n-2}=Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\left(\sum_{s=1}^{n-3}Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\times\\\times\left\{Z_{n-1}\Delta_{v,1}(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},n_1Z)+\sum_{s=2}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-1-s}\Delta_{v,s}(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},n_1Z)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right\}-\\-\frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2n_1^2}\cdot\Delta_{v,1}(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},n_1Z)-Z_{n-2}\cdot\Psi(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},Z),\end{gathered} \tag{1.4.16}$$

$$\begin{gathered}Z'_{n-3}=Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-\\-\left(\sum_{s=1}^{n-4}Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+\\+\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\{\Delta_{v,2}(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},n_1Z)\left[-Z_{n-1}+Z_{n-2}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right]+\\+\sum_{s=3}^{n-2}(-1)^sZ_{n-1-s}\Delta_{v,s}(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},n_1Z)\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\}+\\+\frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2n_1^2}\cdot\Delta_{v,2}(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},n_1Z)-Z_{n-3}\cdot\Psi(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},Z),\end{gathered} \tag{1.4.17}$$

. . . .

$$Z_1' = Z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \left\{ \sum_{s=1}^{n-2} (-1)^{s+1} Z_{n-s} \frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{s-1}} \right\} +$$

$$+ \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha} (-1)^{n+1} \Delta_{v,n-2}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) \left\{ \sum_{s=2}^{n-1} (-1)^s Z_{n+1-s} \frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{s-1}} \right\} +$$

$$+ (-1)^n \frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2 n_1^2} \Delta_{v,n-2}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) - Z_1 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z), \tag{1.4.18}$$

$$\beta_1' = Z_{n-2} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha} \Delta_{v,1}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z), \tag{1.4.19}$$

$$\beta_2' = -Z_{n-3} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta_1} + \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha \sin\beta_1} \Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z), \tag{1.4.20}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\beta_{n-2}' = (-1)^{n+1} Z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-3}} +$$

$$+ \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-3}} \Delta_{v,n-2}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z), \tag{1.4.21}$$

где

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z) = -\sigma n_1 \left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2 \right) \cos\alpha +$$

$$+ \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} s(\alpha) \sin\alpha \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) +$$

$$+ \frac{T_1(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \cos\alpha. \tag{1.4.22}$$

Видно, что в системе (1.4.13)–(1.4.21) порядка $2(n-1)+1$ может быть выделена независимая подсистема (1.4.14)–(1.4.21) порядка $2(n-1)$, которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем $2(n-1)$-мерном фазовом пространстве — касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^{n-1}\{Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbb{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$.

В частности, при выполнении условия (1.3.3) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы порядка $2(n-1)$ также возможен.

В дальнейшем также зависимость от групп переменных $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega/v)$ понимается как сложная зависимость от $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, z_1/v, \ldots, z_{n-1}/v)$ (от $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z_1, \ldots, n_1 Z_{n-1})$) в силу (1.3.5) и (1.4.12).

В частности, при $n=5$ система (1.4.13)–(1.4.21) примет следующий вид:

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z), \tag{1.4.23}$$

$$\alpha' = -Z_4 + \sigma n_1 \left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 \right) \sin\alpha + \frac{\sigma}{3I_2 n_1} s(\alpha) \cos\alpha \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_2, n_1 Z) -$$

$$- \frac{T_1(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \sin\alpha, \tag{1.4.24}$$

$$Z_4' = \frac{s(\alpha)}{3I_2 n_1^2} \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) - \left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 \right) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} +$$

$$+ \frac{\sigma}{3I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha} \{ -Z_3 \Delta_{v,1}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) + Z_2 \Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) -$$

$$- Z_1 \Delta_{v,3}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) \} - Z_4 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z), \tag{1.4.25}$$

$$Z_3' = Z_3 Z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \left(Z_1^2 + Z_2^2 \right) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \frac{\sigma}{3I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha} \{ Z_4 \Delta_{v,1}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) -$$

$$- Z_2 \Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_1 \Delta_{v,3}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} \} -$$

$$-\frac{s(\alpha)}{3I_2n_1^2}\cdot\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)-Z_3\cdot\Psi\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z\right), \tag{1.4.26}$$

$$\begin{gathered}Z_2'=Z_2Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+\\+\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)\left[-Z_4+Z_3\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right]+\\+\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)\left[-Z_1\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\right]+\\+\frac{s(\alpha)}{3I_2n_1^2}\cdot\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)-Z_2\cdot\Psi\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z\right),\end{gathered} \tag{1.4.27}$$

$$\begin{gathered}Z_1'=Z_1Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+\\+\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)\left\{Z_4-Z_3\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+Z_2\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\right\}-\\-\frac{s(\alpha)}{3I_2n_1^2}\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)-Z_1\cdot\Psi\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z\right),\end{gathered} \tag{1.4.28}$$

$$\beta_1'=Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right), \tag{1.4.29}$$

$$\beta_2'=-Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}+\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1}\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right), \tag{1.4.30}$$

$$\beta_3'=Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}+\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right), \tag{1.4.31}$$

где

$$\begin{gathered}\Psi(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z)=-\sigma n_1\left(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2\right)\cos\alpha+\\+\frac{\sigma}{3I_2n_1}s(\alpha)\sin\alpha\cdot\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)+\\+\frac{T_1\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)-s(\alpha)}{mn_1}\cos\alpha.\end{gathered} \tag{1.4.32}$$

При этом в системе (1.4.23)–(1.4.31) девятого порядка может быть выделена независимая подсистема (1.4.24)–(1.4.31) восьмого порядка, которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем восьмимерном фазовом пространстве — касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^4\{Z_4,Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ четырехмерной сферы $\mathbb{S}^4\{\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$.

В частности, при выполнении условия (1.3.3) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы восьмого порядка также возможен.

1.5. Замечания о распределении индексов. В правой части системы (1.4.14)–(1.4.21) после общего множителя

$$\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}$$

величины $\Delta_{v,s}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right)$, $s=1,\ldots,n-2$, входят линейным образом (и их всегда ровно $(n-2)$ штуки). Так, например, в уравнении (1.4.15) (с левой частью Z_{n-1}') функции (1.4.9) входят со всеми индексами s от 1 до $n-2$ (по одному разу каждый индекс), т.е.

$$1\quad 2\quad 3\quad 4\quad \ldots\quad n-2. \tag{1.5.1}$$

А вот далее, в уравнениях (1.4.16)–(1.4.18) появление набора функций (1.4.9) происходит по-другому. Так, например, в уравнение для Z_{n-2}' по-прежнему входит набор функций (1.4.9) с индексами (1.5.1). А в уравнение для Z_{n-3}' входит уже набор с индексами

$$2\quad 2\quad 3\quad 4\quad \ldots\quad n-2 \tag{1.5.2}$$

т.е. функция $\Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z)$ уже повторяется дважды.

Каково же общее распределение индексов? Оно дается следующей таблицей 1.

Таблица 1. Общее распределение индексов набора функций (1.4.9)

Левая часть системы (1.4.14)–(1.4.21)	Распределение индексов s набора функций (1.4.9)					
Z'_{n-2}	1	2	3	4	...	$n-2$
Z'_{n-3}	2	2	3	4	...	$n-2$
Z'_{n-4}	3	3	3	4	...	$n-2$
Z'_{n-5}	4	4	4	4	...	$n-2$
...	...	...	...	...	...	...
Z'_1	$n-2$	$n-2$	$n-2$	$n-2$	...	$n-2$

Так, минор (1) первого порядка в левом верхнем углу таблицы 1 соответствует случаю $n = 3$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях лишь функции (1.4.9) (при $s = 1$). Там же минор второго порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

соответствует случаю $n = 4$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях функций (1.4.9) (при $s = 1, 2$). Там же минор третьего порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

соответствует случаю $n = 5$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях (1.4.14)–(1.4.21) функций (1.4.9) (при $s = 1, 2, 3$), и т.д.

2. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

2.1. Приведенная система. Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [42, 43], пользуясь (1.1.2), (1.4.11), динамические функции s, $x_{2N}, \ldots, x_{nN}$ примем в следующем виде:

$$s(\alpha) = B\cos\alpha, \quad \mathbf{r}_N = R(\alpha)\mathbf{i}_N, \quad R(\alpha) = A\sin\alpha, \quad A, B > 0, \tag{2.1.1}$$

убеждающем нас о том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента неконсервативных сил от угловой скорости (имеется лишь зависимость от углов $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}$).

При этом функции

$$\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z), \quad \Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z), \quad s = 1, \ldots, n-2,$$

входящие в систему (1.4.13)–(1.4.21), примут следующий вид:

$$\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) = R(\alpha) = A\sin\alpha, \qquad \Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) \equiv 0, \; s = 1, \ldots, n-2. \tag{2.1.2}$$

Выбирая безразмерный параметр b и постоянную n_1 следующим образом:

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{(n-2)I_2}, \quad n_1 = n_0, \tag{2.1.3}$$

при $n = 5$ будем рассматривать следующую систему девятого порядка:

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z), \tag{2.1.4}$$

$$\alpha' = -Z_4 + b\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha, \tag{2.1.5}$$

$$Z_4' = \sin\alpha\cos\alpha - \left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} +$$
$$+ bZ_4\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha - bZ_4\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{2.1.6}$$

$$Z_3' = Z_3Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \left(Z_1^2 + Z_2^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} +$$
$$+ bZ_3\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha - bZ_3\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{2.1.7}$$

$$Z_2' = Z_2Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} +$$
$$+ bZ_2\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha - bZ_2\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{2.1.8}$$

$$Z_1' = Z_1Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} +$$
$$+ bZ_1\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha - bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{2.1.9}$$

$$\beta_1' = Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{2.1.10}$$

$$\beta_2' = -Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{2.1.11}$$

$$\beta_3' = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}, \tag{2.1.12}$$

где

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z) = -b\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha + b\sin^2\alpha\cos\alpha.$$

Итак, система (2.1.4)–(2.1.12) может быть рассмотрена на своем фазовом девятимерном многообразии

$$W_1 = \mathbb{R}_+^1\{v\} \times T_*\mathbb{S}^4\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}, \tag{2.1.13}$$

т.е. на прямом произведении числового луча на касательное расслоение к четырехмерной сфере.

Видно, что в системе (2.1.4)–(2.1.12) девятого порядка образовалась независимая система (2.1.5)–(2.1.12) восьмого порядка на касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^4\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ четырехмерной сферы $\mathbb{S}^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$. При этом в независимой системе (2.1.5)–(2.1.12) восьмого порядка образовалась еще одна независимая система (2.1.5)–(2.1.11) седьмого порядка на своем семимерном многообразии.

В общем случае справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. *У системы* (1.1.4)–(1.1.8) *при условиях* (1.2.1), (1.2.3)–(1.3.1) *выделяется динамическая система* (1.4.24)–(1.4.31) *на касательном расслоении* $T_*\mathbb{S}^4\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ *четырехмерной сферы* $\mathbb{S}^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$. *В частности, при условии* (2.1.1) *выделяется система* (2.1.5)–(2.1.12).

2.2. Об аналитическом первом интеграле. В силу (1.3.1) значение скорости центра масс является первым интегралом системы (1.4.1)–(1.4.8) (при условии (1.3.3)), а именно, функция фазовых переменных

$$\Psi_0(v, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, z_1, \ldots, z_{n-1}) = v^2 + \sigma^2(z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2) - 2\sigma z_{n-1}v\sin\alpha = V_C^2 \tag{2.2.1}$$

постоянна на ее фазовых траекториях (при этом величины $z_1, \ldots, z_{n-1}$ выбираются в силу (1.3.5)).

В силу невырожденной замены независимого переменного (при $v \neq 0$) у системы (1.4.13)–(1.4.21) также существует аналитический интеграл, а именно, функция фазовых переменных

$$\Psi_1(v, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z_1, \ldots, Z_{n-1}) = v^2(1 + b^2(Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2) - 2bZ_{n-1}\sin\alpha) = V_C^2 \tag{2.2.2}$$

постоянна на ее фазовых траекториях.

В частности, равенство (2.2.2) позволяет, не решая системы (2.1.4)–(2.1.12), найти зависимость скорости характерной точки твердого тела (центра D диска) от других фазовых переменных, а именно, при $V_C \neq 0$ выполнено равенство

$$v^2 = \frac{V_C^2}{1 + b^2(Z_1^2 + \ldots + Z_4^2) - 2bZ_4\sin\alpha}. \tag{2.2.3}$$

Поскольку в фазовом пространстве системы (2.1.4)–(2.1.12) существуют асимптотические предельные множества, то равенство (2.2.2) задает единственный аналитический (даже непрерывный) первый интеграл системы (2.1.4)–(2.1.12) во всем фазовом пространстве (ср. с [44,47,51,56]).

2.3. Общие замечания об интегрируемости системы. Для полного интегрирования системы восьмого порядка (2.1.5)–(2.1.12) необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Но рассматриваемые системы имеют такие симметрии, которые позволяют снизить достаточное количество первых интегралов до пяти для интегрирования системы.

2.3.1. Система при отсутствии внешнего силового поля. Сначала рассмотрим систему (2.1.5)–(2.1.12) на касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^4\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ четырехмерной сферы $\mathbb{S}^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$. При этом получим из нее систему консервативную. Более того, будем считать, что функция (1.4.10) тождественно равна нулю. В частности, коэффициент $\sin\alpha\cos\alpha$ в уравнении (2.1.6) отсутствует, а также $b = 0$ за исключением слагаемых, содержащих

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2.$$

Рассматриваемая система примет вид

$$\alpha' = -Z_4 + b\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\sin\alpha, \tag{2.3.1}$$

$$Z_4' = -\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_4\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha, \tag{2.3.2}$$

$$\begin{gathered} Z_3' = Z_3Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \left(Z_1^2 + Z_2^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \\ + bZ_3\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha, \end{gathered} \tag{2.3.3}$$

$$\begin{gathered} Z_2' = Z_2Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\ + bZ_2\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha, \end{gathered} \tag{2.3.4}$$

$$\begin{gathered} Z_1' = Z_1Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\ + bZ_1\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha, \end{gathered} \tag{2.3.5}$$

$$\beta_1' = Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{2.3.6}$$

$$\beta_2' = -Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{2.3.7}$$

$$\beta_3' = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}, \tag{2.3.8}$$

при этом во вспомогательном уравнении (2.1.4) на величину v следует выбрать

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z) = -b\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha.$$

Система (2.3.1)–(2.3.8) описывает движение твердого тела при отсутствии внешнего поля сил.

Теорема 2.2. *Система* (2.3.1)–(2.3.8) *обладает пятью независимыми аналитическими первыми интегралами следующего вида:*

$$\Phi_1(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) = C_1 = \mathrm{const}, \tag{2.3.9}$$

$$\Phi_2(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}\sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}, \tag{2.3.10}$$

$$\Phi_3(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\alpha\sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}, \tag{2.3.11}$$

$$\Phi_4(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2 Z_1\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 = C_4 = \mathrm{const}, \tag{2.3.12}$$

$$\Phi_5(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5 = \mathrm{const}\,. \tag{2.3.13}$$

Замечание 2.1. Поскольку в первые интегралы (2.3.9)–(2.3.13), вообще говоря, входит величина v, то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (2.2.3), либо вместе с системой (2.3.1)–(2.3.8) использовать вспомогательное уравнение (2.1.4).

Первые четыре первых интеграла (2.3.9)–(2.3.12) констатируют тот факт, что поскольку внешнего поля сил нет, то сохраняются четыре (вообще говоря, ненулевые) компоненты тензора угловой скорости пятимерного твердого тела, а именно:

$$\omega_4 \equiv \omega_4^0 = \mathrm{const}, \quad \omega_7 \equiv \omega_7^0 = \mathrm{const}, \quad \omega_9 \equiv \omega_9^0 = \mathrm{const}, \quad \omega_{10} \equiv \omega_{10}^0 = \mathrm{const}\,. \tag{2.3.14}$$

В частности, наличие первого интеграла (2.3.9) объясняется равенством

$$n_0^2 v^2 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) = \omega_4^2 + \omega_7^2 + \omega_9^2 + \omega_{10}^2 \equiv n_0^2 C_1 = \mathrm{const}\,. \tag{2.3.15}$$

Пятый первый интеграл (2.3.13) имеет кинематический смысл, «привязывает» уравнение на β_3 и может быть найден из следующей квадратуры:

$$\frac{d\beta_3}{d\beta_2} = -\frac{Z_1}{Z_2}\frac{1}{\sin\beta_2}, \tag{2.3.16}$$

при этом если воспользоваться уровнями первых интегралов (2.3.11), (2.3.12) и получить равенство

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \pm\sqrt{\frac{C_3^2}{C_4^2}\sin^2\beta_2 - 1}, \tag{2.3.17}$$

то квадратура (2.3.16) примет вид

$$\beta_3 = \pm\int \frac{du}{(1-u^2)\sqrt{\left(\dfrac{C_3^2}{C_4^2} - 1\right) - \dfrac{C_3^2}{C_4^2}u^2}}, \qquad u = \cos\beta_2. \tag{2.3.18}$$

Ее вычисление приводит к следующему виду:

$$\beta_3 + C_5 = \pm \operatorname{arctg}\frac{\cos\beta_2}{\sqrt{\dfrac{C_3^2}{C_4^2}\sin^2\beta_2 - 1}}, \qquad C_5 = \mathrm{const}, \tag{2.3.19}$$

позволяющему получить первый интеграл (2.3.13). Преобразуя последнее равенство, имеем следующее инвариантное соотношение:

$$\operatorname{tg}^2(\beta_3 + C_5) = \frac{C_4^2}{(C_3^2 - C_4^2)\operatorname{tg}^2\beta_2 - C_4^2}. \tag{2.3.20}$$

Теперь перефразируем теорему 2.2.

Теорема 2.3. *Система* (2.3.1)–(2.3.8) *обладает пятью независимыми первыми интегралами следующего вида*:

$$\Psi_1(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}\sin\alpha} = C_1' = \mathrm{const}, \tag{2.3.21}$$

$$\Psi_2(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_2' = \mathrm{const}, \tag{2.3.22}$$

$$\Psi_3(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}{Z_1\sin\beta_2} = C_3' = \mathrm{const}, \tag{2.3.23}$$

$$\Psi_4(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\beta_1} = C_4' = \mathrm{const}, \tag{2.3.24}$$

$$\Psi_5(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5' = \mathrm{const}\,. \tag{2.3.25}$$

Замечание 2.2. Поскольку в первые интегралы (2.3.21)–(2.3.25), вообще говоря, входит величина v, то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (2.2.3), либо вместе с системой (2.3.1)–(2.3.8) использовать вспомогательное уравнение (2.1.4).

Пятый первый интеграл (2.3.25) также имеет кинематический смысл и «привязывает» уравнение на β_3, а функции Ψ_2, Ψ_5 можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_5.

В формулировке теоремы 2.3 (в отличие от теоремы 2.2) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (2.3.21)–(2.3.25) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 2.3 преобразованный набор первых интегралов (2.3.21)–(2.3.25) системы (2.3.1)–(2.3.8) (системы при отсутствии силового поля) по-прежнему остается набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (2.3.1)–(2.3.8) восьмого порядка необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных:

$$\begin{pmatrix} Z_4 \\ Z_3 \\ Z_2 \\ Z_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} w_4 \\ w_3 \\ w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}, \; w_4 = Z_4, \; w_3 = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}, \; w_2 = \frac{Z_2}{Z_1}, \; w_1 = \frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}, \tag{2.3.26}$$

система (2.3.1)–(2.3.8) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_4 + b(w_3^2 + w_4^2)\sin\alpha, \tag{2.3.27}$$

$$w_4' = -w_3^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_4(w_3^2 + w_4^2)\cos\alpha, \tag{2.3.28}$$

$$w_3' = w_3 w_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_3(w_3^2 + w_4^2)\cos\alpha, \tag{2.3.29}$$

$$\begin{aligned} w_2' &= d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\frac{1 + w_2^2}{w_2}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \\ \beta_2' &= d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{aligned} \tag{2.3.30}$$

$$\begin{aligned} w_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\frac{1 + w_1^2}{w_1}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \\ \beta_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{aligned} \tag{2.3.31}$$

$$\beta_3' = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \tag{2.3.32}$$

где

$$\begin{aligned} d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) &= \mathcal{Z}_3(w_4, w_3, w_2, w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) &= -\mathcal{Z}_2(w_4, w_3, w_2, w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \\ d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) &= \mathcal{Z}_1(w_4, w_3, w_2, w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}; \end{aligned} \tag{2.3.33}$$

при этом

$$Z_k = \mathcal{Z}_k(w_4, w_3, w_2, w_1), \qquad k = 1, 2, 3, \tag{2.3.34}$$

— функции в силу замены (2.3.26).

Видно, что система восьмого порядка (2.3.27)–(2.3.32) распадается на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (2.3.27)–(2.3.29) — третьего порядка, а системы (2.3.30), (2.3.31) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (2.3.27)–(2.3.32) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (2.3.27)–(2.3.29), по одному для систем (2.3.30), (2.3.31), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (2.3.32) (т.е. *всего пять*).

Замечание 2.3. Выпишем первые интегралы (2.3.21)–(2.3.25) в переменных w_1, w_2, w_3, w_4 в силу (2.3.26). Получим:

$$\Theta_1(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{w_3^2 + w_4^2}{w_3 \sin\alpha} = C_1'' = \text{const}, \tag{2.3.35}$$

$$\Theta_2(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2 w_3 \sin\alpha = C_2'' = \text{const}, \tag{2.3.36}$$

$$\Theta_3(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\sqrt{1+w_2^2}}{\sin\beta_2} = C_3'' = \text{const}, \tag{2.3.37}$$

$$\Theta_4(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\sqrt{1+w_1^2}}{\sin\beta_1} = C_4'' = \text{const}, \tag{2.3.38}$$

$$\Theta_5(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5'' = \text{const}\,. \tag{2.3.39}$$

Замечание 2.4. Поскольку в первые интегралы (2.3.35)–(2.3.39), вообще говоря, входит величина v, то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (2.2.3), либо вместе с системой (2.3.27)–(2.3.32) использовать вспомогательное уравнение (2.1.4).

Таким образом, два независимых первых интеграла (2.3.35), (2.3.36) достаточны для интегрирования системы (2.3.27)–(2.3.29), первые интегралы (2.3.37), (2.3.38) достаточны для интегрирования двух независимых уравнений первого порядка

$$\frac{dw_s}{d\beta_s} = \frac{1+w_s^2}{w_s}\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \quad s = 1, 2, \tag{2.3.40}$$

после замены независимого переменного эквивалентных соответственно системам (2.3.30), (2.3.31), и, наконец, первый интеграл (2.3.39) достаточен для «привязывания» уравнения (2.3.32). Доказана следующая теорема.

Теорема 2.4. *Система* (2.3.1)–(2.3.8) *восьмого порядка обладает достаточным количеством* (*пятью*) *независимых первых интегралов.*

2.3.2. Частичное введение внешнего силового поля. Теперь рассмотрим систему (2.1.5)–(2.1.12) при условии $b = 0$ за исключением слагаемых, содержащих

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2.$$

При этом частично добавим внешнее силовое поле. А именно, его наличие характеризует коэффициент $\sin\alpha\cos\alpha$ в уравнении (2.1.6) (в отличие от системы (2.3.1)–(2.3.8)). Рассматриваемая система примет вид

$$\alpha' = -Z_4 + b\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\sin\alpha, \tag{2.3.41}$$

$$Z_4' = \sin\alpha\cos\alpha - \left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_4\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha, \tag{2.3.42}$$

$$\begin{gathered} Z_3' = Z_3 Z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \left(Z_1^2 + Z_2^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \\ + bZ_3\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha, \end{gathered} \tag{2.3.43}$$

$$\begin{gathered} Z_2' = Z_2 Z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_2 Z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - Z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\ + bZ_2\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha, \end{gathered} \tag{2.3.44}$$

$$\begin{gathered} Z_1' = Z_1 Z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1 Z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_1 Z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\ + bZ_1\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha, \end{gathered} \tag{2.3.45}$$

$$\beta_1' = Z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{2.3.46}$$

$$\beta_2' = -Z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{2.3.47}$$

$$\beta_3' = Z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}, \tag{2.3.48}$$

при этом во вспомогательном уравнении (2.1.4) на величину v следует выбрать

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z) = -b\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha.$$

Теорема 2.5. *Система* (2.3.41)–(2.3.48) *обладает пятью независимыми первыми интегралами следующего вида*:

$$\Phi_1(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + \sin^2\alpha) = C_1 = \mathrm{const}, \tag{2.3.49}$$

$$\Phi_2(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}\sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}, \tag{2.3.50}$$

$$\Phi_3(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\alpha\sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}, \tag{2.3.51}$$

$$\Phi_4(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2 Z_1\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 = C_4 = \mathrm{const}, \tag{2.3.52}$$

$$\Phi_5(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5 = \mathrm{const}. \tag{2.3.53}$$

Замечание 2.5. Поскольку в первые интегралы (2.3.49)–(2.3.53), вообще говоря, входит величина v, то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (2.2.3), либо вместе с системой (2.3.41)–(2.3.48) использовать вспомогательное уравнение (2.1.4).

Первый интеграл (2.3.49) по своей структуре похож на интеграл полной энергии. Пятый первый интеграл (2.3.53) имеет кинематический смысл, «привязывает» уравнение на β_3 и найден выше.

Теперь перефразируем теорему 2.5.

Теорема 2.6. *Система* (2.3.41)–(2.3.48) *обладает пятью независимыми первыми интегралами следующего вида*:

$$\Psi_1(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + \sin^2\alpha}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}\sin\alpha} = C_1' = \mathrm{const}, \tag{2.3.54}$$

$$\Psi_2(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_2' = \mathrm{const}, \tag{2.3.55}$$

$$\Psi_3(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}{Z_1\sin\beta_2} = C_3' = \mathrm{const}, \tag{2.3.56}$$

$$\Psi_4(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\beta_1} = C_4' = \mathrm{const}, \tag{2.3.57}$$

$$\Psi_5(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5' = \mathrm{const}. \tag{2.3.58}$$

Замечание 2.6. Поскольку в первые интегралы (2.3.54)–(2.3.58), вообще говоря, входит величина v, то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (2.2.3), либо вместе с системой (2.3.41)–(2.3.48) использовать вспомогательное уравнение (2.1.4).

Функции Ψ_2, Ψ_5 можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_5.

В формулировке теоремы 2.6 (в отличие от теоремы 2.5) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (2.3.54)–(2.3.58) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 2.6 преобразованный набор первых интегралов (2.3.54)–(2.3.58) системы (2.3.41)–(2.3.48) по-прежнему остается набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (2.3.41)–(2.3.48) восьмого порядка необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (2.3.26) система (2.3.41)–(2.3.48) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_4 + b(w_3^2 + w_4^2)\sin\alpha, \tag{2.3.59}$$

$$w_4' = \sin\alpha\cos\alpha - w_3^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_4(w_3^2 + w_4^2)\cos\alpha, \tag{2.3.60}$$

$$w_3' = w_3w_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_3(w_3^2 + w_4^2)\cos\alpha, \tag{2.3.61}$$

$$\begin{aligned} w_2' &= d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\frac{1 + w_2^2}{w_2}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \\ \beta_2' &= d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{aligned} \tag{2.3.62}$$

$$w_1' = d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\frac{1 + w_1^2}{w_1}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1},$$
$$\beta_1' = d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \tag{2.3.63}$$
$$\beta_3' = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \tag{2.3.64}$$

где выполнены условия (2.3.33).

Видно, что система восьмого порядка (2.3.59)–(2.3.64) распадается на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (2.3.59)–(2.3.61) — третьего, а системы (2.3.62), (2.3.63) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (2.3.59)–(2.3.64) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (2.3.59)–(2.3.61), по одному для систем (2.3.62), (2.3.63), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (2.3.64) (т.е. *всего пять*).

Замечание 2.7. Выпишем первые интегралы (2.3.54)–(2.3.58) в переменных w_1, w_2, w_3, w_4 в силу (2.3.26). Получим:

$$\Theta_1(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{w_3^2 + w_4^2 + \sin^2\alpha}{w_3 \sin\alpha} = C_1'' = \text{const}, \tag{2.3.65}$$
$$\Theta_2(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2 w_3 \sin\alpha = C_2'' = \text{const}, \tag{2.3.66}$$
$$\Theta_3(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\sqrt{1 + w_2^2}}{\sin\beta_2} = C_3'' = \text{const}, \tag{2.3.67}$$
$$\Theta_4(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\sqrt{1 + w_1^2}}{\sin\beta_1} = C_4'' = \text{const}, \tag{2.3.68}$$
$$\Theta_5(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5'' = \text{const}. \tag{2.3.69}$$

Замечание 2.8. Поскольку в первые интегралы (2.3.65)–(2.3.69), вообще говоря, входит величина v, то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (2.2.3), либо вместе с системой (2.3.59)–(2.3.64) использовать вспомогательное уравнение (2.1.4).

Таким образом, два независимых первых интеграла (2.3.65), (2.3.66) достаточны для интегрирования системы (2.3.59)–(2.3.61), первые интегралы (2.3.67), (2.3.68) достаточны для интегрирования двух независимых уравнений первого порядка

$$\frac{dw_s}{d\beta_s} = \frac{1 + w_s^2}{w_s}\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \quad s = 1, 2, \tag{2.3.70}$$

после замены независимого переменного эквивалентных соответственно системам (2.3.62), (2.3.63), и, наконец, первый интеграл (2.3.69) достаточен для «привязывания» уравнения (2.3.64). Доказана следующая теорема.

Теорема 2.7. *Система* (2.3.41)–(2.3.48) *восьмого порядка обладает достаточным количеством* (*пятью*) *независимых первых интегралов.*

2.4. Полный список первых интегралов. Перейдем теперь к интегрированию искомой системы восьмого порядка (2.1.5)–(2.1.12) (без всяких упрощений — при наличии всех коэффициентов).

Аналогичным образом, для полного интегрирования системы (2.1.5)–(2.1.12) восьмого порядка необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (2.3.26) система (2.1.5)–(2.1.12) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_4 + b(w_3^2 + w_4^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha, \tag{2.4.1}$$
$$w_4' = \sin\alpha\cos\alpha - w_3^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_4(w_3^2 + w_4^2)\cos\alpha - bw_4\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{2.4.2}$$
$$w_3' = w_3 w_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_3(w_3^2 + w_4^2)\cos\alpha - bw_3\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{2.4.3}$$

$$
\begin{aligned}
w_2' &= d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\frac{1+w_2^2}{w_2}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2},\\
\beta_2' &= d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3),
\end{aligned} \tag{2.4.4}
$$

$$
\begin{aligned}
w_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\frac{1+w_1^2}{w_1}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1},\\
\beta_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3),
\end{aligned} \tag{2.4.5}
$$

$$
\beta_3' = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \tag{2.4.6}
$$

где выполнены условия (2.3.33).

Видно, что система восьмого порядка (2.4.1)–(2.4.6) распадается на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (2.4.1)–(2.4.3) — третьего, а системы (2.4.4), (2.4.5) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (2.4.1)–(2.4.6) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (2.4.1)–(2.4.3), по одному для систем (2.4.4), (2.4.5), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (2.4.6) (т.е. *всего пять*).

Сначала сопоставим независимой подсистеме третьего порядка (2.3.27)–(2.3.29) неавтономную систему второго порядка

$$
\begin{aligned}
\frac{dw_4}{d\alpha} &= \frac{\sin\alpha\cos\alpha + bw_4(w_3^2+w_4^2)\cos\alpha - bw_4\sin^2\alpha\cos\alpha - w_3^2\cos\alpha/\sin\alpha}{-w_4 + b(w_3^2+w_4^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha},\\
\frac{dw_3}{d\alpha} &= \frac{bw_3(w_3^2+w_4^2)\cos\alpha - bw_3\sin^2\alpha\cos\alpha + w_3w_4\cos\alpha/\sin\alpha}{-w_4 + b(w_3^2+w_4^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha}.
\end{aligned} \tag{2.4.7}
$$

Используя замену $\tau = \sin\alpha$, перепишем систему (2.4.7) в алгебраическом виде

$$
\begin{aligned}
\frac{dw_4}{d\tau} &= \frac{\tau + bw_4(w_3^2+w_4^2) - bw_4\tau^2 - w_3^2/\tau}{-w_4 + b\tau(1-\tau^2) + b\tau(w_3^2+w_4^2)},\\
\frac{dw_3}{d\tau} &= \frac{bw_3(w_3^2+w_4^2) - bw_3\tau^2 + w_3w_4/\tau}{-w_4 + b\tau(1-\tau^2) + b\tau(w_3^2+w_4^2)}.
\end{aligned} \tag{2.4.8}
$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$
w_3 = u_1\tau, \qquad w_4 = u_2\tau, \tag{2.4.9}
$$

приводим систему (2.4.8) к следующему виду:

$$
\begin{aligned}
\tau\frac{du_2}{d\tau} + u_2 &= \frac{1 - bu_2\tau^2 + bu_2(u_1^2+u_2^2)\tau^2 - u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2+u_2^2) + b(1-\tau^2)},\\
\tau\frac{du_1}{d\tau} + u_1 &= \frac{bu_1(u_1^2+u_2^2)\tau^2 - bu_1\tau^2 + u_1u_2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2+u_2^2) + b(1-\tau^2)},
\end{aligned} \tag{2.4.10}
$$

что эквивалентно

$$
\begin{aligned}
\tau\frac{du_2}{d\tau} &= \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2+u_2^2) + b(1-\tau^2)},\\
\tau\frac{du_1}{d\tau} &= \frac{2u_1u_2 - bu_1}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2+u_2^2) + b(1-\tau^2)}.
\end{aligned} \tag{2.4.11}
$$

Сопоставим системе второго порядка (2.4.11) неавтономное уравнение первого порядка

$$
\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - u_1^2}{2u_1u_2 - bu_1}, \tag{2.4.12}
$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$
d\left(\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + 1}{u_1}\right) = 0. \tag{2.4.13}
$$

Итак, уравнение (2.4.12) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2+u_1^2-bu_2+1}{u_1}=C_1=\mathrm{const}, \tag{2.4.14}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_4,w_3;\alpha)=\frac{w_4^2+w_3^2-bw_4\sin\alpha+\sin^2\alpha}{w_3\sin\alpha}=C_1=\mathrm{const}\,. \tag{2.4.15}$$

Замечание 2.9. При $b=0$ первый интеграл (2.4.15) системы (2.4.1)–(2.4.3) совпадает с первым интегралом (2.3.65) системы (2.3.59)–(2.3.61), но при $b\neq 0$ ни числитель выражения (2.4.15), ни его знаменатель не являются первыми интегралами системы (2.4.1)–(2.4.3) по отдельности (хотя при $b=0$ и числитель и знаменатель выражения (2.4.15) являются первыми интегралами системы (2.3.59)–(2.3.61)).

Далее, произведем поиск дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (2.4.1)–(2.4.3). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (2.4.14) при $u_1\neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2-\frac{b}{2}\right)^2+\left(u_1-\frac{C_1}{2}\right)^2=\frac{b^2+C_1^2}{4}-1. \tag{2.4.16}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2+C_1^2-4\geqslant 0, \tag{2.4.17}$$

и фазовое пространство системы (2.4.1)–(2.4.3) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (2.4.16).

Таким образом, в силу соотношения (2.4.14) первое уравнение системы (2.4.11) примет вид

$$\tau\frac{du_2}{d\tau}=\frac{1-bu_2+u_2^2-U_1^2(C_1,u_2)}{-u_2+b(1-\tau^2)+b\tau^2(U_1^2(C_1,u_2)+u_2^2)}, \tag{2.4.18}$$

где

$$U_1(C_1,u_2)=\frac{1}{2}\{C_1\pm\sqrt{C_1^2-4(u_2^2-bu_2+1)}\}, \tag{2.4.19}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (2.4.17), или вида уравнения Бернулли:

$$\frac{d\tau}{du_2}=\frac{(b-u_2)\tau-b\tau^3(1-U_1^2(C_1,u_2)-u_2^2)}{1-bu_2+u_2^2-U_1^2(C_1,u_2)}. \tag{2.4.20}$$

Уравнение (2.4.20) (при помощи (2.4.19)) легко приводится к линейному неоднородному уравнению:

$$\frac{dp}{du_2}=\frac{2(u_2-b)p+2b(1-U_1^2(C_1,u_2)-u_2^2)}{1-bu_2+u_2^2-U_1^2(C_1,u_2)},\quad p=\frac{1}{\tau^2}. \tag{2.4.21}$$

Последний факт означает, что можно найти еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде (т.е. через конечную комбинацию квадратур). При этом общее решение уравнения (2.4.21) зависит от произвольной постоянной C_2. Полные выкладки в данном месте приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (2.4.21), даже в частном случае $b=C_1=2$ имеет следующее решение:

$$p=p_0(u_2)=C[\sqrt{1-(u_2-1)^2}\pm 1]\exp\left[\sqrt{\frac{1\mp\sqrt{1-(u_2-1)^2}}{1\pm\sqrt{1-(u_2-1)^2}}}\right],\ C=\mathrm{const}\,. \tag{2.4.22}$$

Замечание 2.10. В выражение найденного первого интеграла формально можно вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (2.4.15).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_4,w_3;\alpha)=\ln|\sin\alpha|+G_2\left(\sin\alpha,\frac{w_4}{\sin\alpha},\frac{w_3}{\sin\alpha}\right)=C_2=\mathrm{const}\,. \tag{2.4.23}$$

Итак, найдены два первых интеграла (2.4.15), (2.4.23) независимой системы третьего порядка (2.4.1)–(2.4.3). Осталось указать по одному первому интегралу для систем (2.4.4), (2.4.5) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (2.4.6).

Действительно, искомые первые интегралы совпадают с первыми интегралами (2.3.67)–(2.3.69), а именно:

$$\Theta_3(w_2;\beta_2)=\frac{\sqrt{1+w_2^2}}{\sin\beta_2}=C_3=\mathrm{const}, \tag{2.4.24}$$

$$\Theta_4(w_1;\beta_1)=\frac{\sqrt{1+w_1^2}}{\sin\beta_1}=C_4=\mathrm{const}, \tag{2.4.25}$$

$$\Theta_5(w_2,w_1;\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\beta_3\pm\operatorname{arctg}\frac{C_4\cos\beta_2}{\sqrt{C_3^2\sin^2\beta_2-C_4^2}}=C_5=\mathrm{const}, \tag{2.4.26}$$

при этом в левую часть равенства (2.4.26) вместо C_3, C_4 можно подставить интегралы (2.4.24), (2.4.25).

Теорема 2.8. *Система* (2.4.1)–(2.4.6) *восьмого порядка обладает достаточным количеством* (*пятью*) *независимых первых интегралов* (2.4.15), (2.4.23), (2.4.24)–(2.4.26).

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (1.1.4)–(1.1.8), (1.1.11)–(1.1.20) при условии (2.1.1) имеет 12 инвариантных соотношений: имеются аналитическая неинтегрируемая связь вида (1.3.1), соответствующая аналитическому первому интегралу (2.2.1), циклические первые интегралы вида (1.2.3), (1.2.4), первый интеграл вида (2.4.15), также имеется первый интеграл (2.4.23), который можно найти из уравнения (2.4.21), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и, наконец, трансцендентные первые интегралы вида (2.4.24)–(2.4.26).

Теорема 2.9. *Система* (1.1.4)–(1.1.8), (1.1.11)–(1.1.20) *при условиях* (1.3.1), (2.1.1), (1.2.3), (1.2.4) *обладает* 12 *инвариантными соотношениями* (*полным набором*), *пять из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа.*

2.5. Структура уравнений на касательных расслоениях к конечномерной сфере. Исследование полной системы (2.1.5)–(2.1.12) на касательном расслоении

$$T_*\mathbb{S}^4\{Z_4,Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$$

четырехмерной сферы $\mathbb{S}^4\{\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ было начато с исследования упрощенной системы (2.3.1)–(2.3.8), которая описывает динамику при отсутствии какого-либо силового поля. Таким образом, коэффициенты в правой части системы (2.3.1)–(2.3.8) носят лишь геометрический смысл и порождаются выбором координат $Z_4,Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3$ на касательном расслоении.

Поставим вопрос: как меняются коэффициенты соответствующих систем при индуктивном увеличении размерности $n-1$ сферы $\mathbb{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$? Другими словами, системами какого вида описываются фазовые (геодезические) потоки на касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^{n-1}\{Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbb{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ именно в выбранных нами координатах $Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}$?

Несмотря на то, что (и в этой работе, и в ряде предыдущих работ автора) нами рассмотрена явно структура соответствующих уравнений до $n=5$ включительно, начнем со случая $n=2$. Это позволит произвести индуктивный переход от n к $n+1$ и «конструировать» аналогичные системы любого высокого порядка.

Замечание 2.11 (об аналитических первых интегралах при отсутствии силового поля)**.** При построении систем на касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^{n-1}\{Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbb{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ используется факт наличия в системе следующего набора аналитических первых интегралов:

$$\begin{gathered}
\Phi_1(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = v^2(Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2) = C_1 = \mathrm{const}, \\
\Phi_2(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = v^2\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2}\sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}, \\
\Phi_3(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = v^2\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2}\sin\alpha\sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Phi_{n-2}(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4} = C_{n-2} = \mathrm{const}, \\
\Phi_{n-1}(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = v^2 Z_1\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3} = C_{n-1} = \mathrm{const}.
\end{gathered} \tag{2.5.1}$$

Замечание 2.12. Поскольку в первые интегралы (2.5.1), вообще говоря, входит величина v, то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (2.2.3), либо вместе с системой использовать соответствующее вспомогательное уравнение.

Первые интегралы (2.5.1) констатируют тот факт, что, поскольку внешнего поля сил нет, то сохраняется $n-1$ (вообще говоря, ненулевых) компонент тензора угловой скорости n-мерного твердого тела, а именно:

$$\omega_{r_1} \equiv \omega_{r_1}^0 = \mathrm{const}, \ldots, \omega_{r_{n-1}} \equiv \omega_{r_{n-1}}^0 = \mathrm{const}. \tag{2.5.2}$$

В частности, наличие первого интеграла $\Phi_1(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C_1$ из (2.5.1) объясняется равенством

$$n_0^2 v^2(Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2) = \omega_{r_1}^2 + \ldots + \omega_{r_{n-1}}^2 = \mathrm{const}. \tag{2.5.3}$$

При этом первые интегралы (2.5.1) являются функциями от компонент $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_{n-1}}$.

2.5.1. Начало при $n = 2$. Итак, при $n = 2$ при наличии вспомогательного уравнения

$$v' = -bvZ_1^2\cos\alpha, \tag{2.5.4}$$

следующая система задает геодезический поток на двумерном цилиндре $T_*\mathbb{S}^1\{Z_1; \alpha\}$ как касательном расслоении одномерной сферы $\mathbb{S}^1\{\alpha\}$:

$$\begin{aligned}
\alpha' &= -Z_1 + bZ_1^2\sin\alpha, \\
Z_1' &= bZ_1^3\cos\alpha,
\end{aligned} \tag{2.5.5}$$

при этом, в силу замечания 2.11, существует естественный первый интеграл

$$v^2 Z_1^2 = C_1 = \mathrm{const}. \tag{2.5.6}$$

Уравнение $\alpha' = -Z_1 + bZ_1^2\sin\alpha$ является кинематическим соотношением и задает координаты α, Z_1 в фазовом пространстве системы (2.5.5) (касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^1\{Z_1; \alpha\}$).

2.5.2. Переход по n: $2 \to 3$. При переходе от $n = 2$ к $n = 3$ производится переобозначение

$$Z_1 \mapsto Z_2,$$

при этом вводится новая переменная Z_1. Более того, в искомой системе новые члены, появляющиеся при увеличении n, <u>подчеркиваются</u>.

Предложение 2.1. *При $n = 3$ при наличии вспомогательного уравнения*

$$v' = -bv(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha, \tag{2.5.7}$$

следующая система задает геодезический поток на касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^2\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1\}$ двумерной сферы $\mathbb{S}^2\{\alpha, \beta_1\}$:

$$\alpha' = -Z_2 + b(\underline{Z_1^2} + Z_2^2)\sin\alpha, \tag{2.5.8}$$

$$Z_2' = \underline{-Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} + bZ_2(\underline{Z_1^2} + Z_2^2)\cos\alpha, \tag{2.5.9}$$

$$\underline{Z_1' = Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha,} \tag{2.5.10}$$

$$\beta_1' = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{2.5.11}$$

при этом, в силу замечания 2.11, *существуют первые интегралы*

$$v^2(Z_1^2 + Z_2^2) = C_1 = \mathrm{const}, \tag{2.5.12}$$

$$v^2(Z_1\sin\alpha) = C_2 = \mathrm{const}\,. \tag{2.5.13}$$

Действительно, в силу (2.5.12) имеем:

$$2v^2(Z_1'Z_1 + Z_2'Z_2) - 2bv^2(Z_1^2 + Z_2^2)^2\cos\alpha = 0,$$

поэтому существует такая функция $N_1(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2)$, что

$$Z_2' = -Z_1N_1(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2) + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha,$$
$$Z_1' = Z_2N_1(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2) + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha,$$

а в силу (2.5.13) должно выполняться равенство (в силу системы (2.5.7)–(2.5.11))

$$v^2(Z_1'\sin\alpha + Z_1\alpha'\cos\alpha - 2bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2)\sin\alpha\cos\alpha) =$$
$$= v^2(Z_2N_1(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2)\sin\alpha - Z_1Z_2\cos\alpha) = 0,$$

откуда

$$N_1(\alpha, \beta_1, z_1, z_2) = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

что и требовалось.

Уравнения (2.5.8), (2.5.11) являются кинематическими соотношениями и задают координаты $\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2$ в фазовом пространстве системы (2.5.8)–(2.5.11) (касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^2\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1\}$).

2.5.3. Переход по n: $3 \to 4$. При переходе от $n = 3$ к $n = 4$ производится переобозначение

$$\begin{pmatrix} Z_2 \\ Z_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Z_3 \\ Z_2 \end{pmatrix},$$

при этом вводится новая переменная Z_1. Более того, в искомой системе новые члены, появляющиеся при увеличении n, подчеркиваются.

Предложение 2.2. *При $n = 4$ при наличии вспомогательного уравнения*

$$v' = -bv(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\cos\alpha, \tag{2.5.14}$$

следующая система задает геодезический поток на касательном расслоении

$$T_*\mathbb{S}^3\{Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$$

трехмерной сферы $\mathbb{S}^3\{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$:

$$\alpha' = -Z_3 + b(\underline{Z_1^2} + Z_2^2 + Z_3^2)\sin\alpha, \tag{2.5.15}$$

$$Z_3' = -(Z_2^2 + \underline{Z_1^2})\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_3(\underline{Z_1^2} + Z_2^2 + Z_3^2)\cos\alpha, \tag{2.5.16}$$

$$Z_2' = Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \underline{+ Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}} + bZ_2(\underline{Z_1^2} + Z_2^2 + Z_3^2)\cos\alpha, \tag{2.5.17}$$

$$\underline{Z_1' = Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\cos\alpha,} \tag{2.5.18}$$

$$\beta_1' = Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{2.5.19}$$

$$\beta_2' = -Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{2.5.20}$$

при этом, в силу замечания 2.11, *существуют первые интегралы*

$$v^2(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2)=C_1=\mathrm{const},\tag{2.5.21}$$

$$v^2\sqrt{Z_1^2+Z_2^2}\sin\alpha=C_2=\mathrm{const},\tag{2.5.22}$$

$$v^2(Z_1\sin\alpha\sin\beta_1)=C_3=\mathrm{const}\,.\tag{2.5.23}$$

Действительно, в силу (2.5.21), (2.5.22), аналогично доказательству предложения 2.1, находятся подчеркнутые коэффициенты в уравнении (2.5.16), а также делается вывод об уравнениях (2.5.17) и (2.5.18), которые будут иметь следующий вид:

$$\begin{gathered}Z_2'=Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}N_2(\alpha,\beta_1,\beta_2,Z_1,Z_2,Z_3)+bZ_2(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2)\cos\alpha,\\ Z_1'=Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}N_2(\alpha,\beta_1,\beta_2,Z_1,Z_2,Z_3)+bZ_1(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2)\cos\alpha.\end{gathered}\tag{2.5.24}$$

Далее, в силу (2.5.23) должно выполняться равенство (в силу системы (2.5.14)–(2.5.20))

$$\begin{gathered}v^2(Z_1'\sin\alpha\sin\beta_1+Z_1\alpha'\cos\alpha\sin\beta_1+\\ +Z_1\beta_1'\sin\alpha\cos\beta_1-2bZ_1(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2)\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1)=\\ =v^2Z_1Z_2\cos\alpha[\cos\beta_1-N_2(\alpha,\beta_1,\beta_2,Z_1,Z_2,Z_3)\sin\beta_1]=0,\end{gathered}$$

откуда

$$N_2(\alpha,\beta_1,\beta_2,Z_1,Z_2,Z_3)=\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1},$$

что и требовалось.

Уравнения (2.5.15), (2.5.19), (2.5.20) являются кинематическими соотношениями и задают координаты $\alpha,\beta_1,\beta_2,Z_1,Z_2,Z_3$ в фазовом пространстве системы (2.5.15)–(2.5.20) (касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^3\{Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2\}$).

2.5.4. Переход по n: $4\to5$. При переходе от $n=4$ к $n=5$ производится переобозначение

$$\begin{pmatrix}Z_3\\Z_2\\Z_1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}Z_4\\Z_3\\Z_2\end{pmatrix},$$

при этом вводится новая переменная Z_1. Более того, в искомой системе новые члены, появляющиеся при увеличении n, подчеркиваются.

Предложение 2.3. *При $n=5$ при наличии вспомогательного уравнения*

$$v'=-bv(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\cos\alpha,\tag{2.5.25}$$

следующая система задает геодезический поток на касательном расслоении

$$T_*\mathbb{S}^4\{Z_4,Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$$

четырехмерной сферы $\mathbb{S}^4\{\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$:

$$\alpha'=-Z_4+b(\underline{Z_1^2}+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\sin\alpha,\tag{2.5.26}$$

$$Z_4'=-(Z_3^2+Z_2^2+\underline{Z_1^2})\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+bZ_4(\underline{Z_1^2}+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\cos\alpha,\tag{2.5.27}$$

$$Z_3'=Z_3Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+(Z_2^2+\underline{Z_1^2})\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+bZ_3(\underline{Z_1^2}+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\cos\alpha,\tag{2.5.28}$$

$$\begin{gathered}Z_2'=Z_2Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-\underline{Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}}+\\ +bZ_2(\underline{Z_1^2}+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\cos\alpha,\end{gathered}\tag{2.5.29}$$

$$\begin{gathered}\underline{Z_1'=Z_1Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+}\\ \underline{+bZ_1(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\cos\alpha},\end{gathered}\tag{2.5.30}$$

$$\beta_1' = Z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{2.5.31}$$

$$\beta_2' = -Z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{2.5.32}$$

$$\beta_3' = Z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}, \tag{2.5.33}$$

при этом, в силу замечания 2.11, *существуют первые интегралы*

$$v^2(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2) = C_1 = \mathrm{const}, \tag{2.5.34}$$

$$v^2\sqrt{Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2}\sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}, \tag{2.5.35}$$

$$v^2\sqrt{Z_1^2+Z_2^2}\sin\alpha\sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}, \tag{2.5.36}$$

$$v^2(Z_1\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2) = C_4 = \mathrm{const}\,. \tag{2.5.37}$$

Действительно, в силу (2.5.34)–(2.5.36) аналогично доказательству предложений 2.1, 2.2 находятся подчеркнутые коэффициенты в уравнениях (2.5.27), (2.5.28), а также делается вывод об уравнениях (2.5.29) и (2.5.30), которые будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
Z_2' &= Z_2Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\
&\quad - Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}N_3(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4) + bZ_2(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\cos\alpha,\\
Z_1' &= Z_1Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \\
&\quad + Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}N_3(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4) + bZ_1(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\cos\alpha.
\end{aligned} \tag{2.5.38}$$

Далее, в силу (2.5.37) должно выполняться равенство (в силу системы (2.5.25)–(2.5.33))

$$\begin{gathered}
v^2(Z_1'\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 + Z_1\alpha'\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 + Z_1\beta_1'\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2 + \\
+ Z_1\beta_2'\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 - 2bZ_1(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2) = \\
= v^2z_1z_2\cos\alpha[N_3(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4)\sin\beta_1\sin\beta_2 - \cos\beta_2] = 0,
\end{gathered}$$

откуда

$$N_3(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4) = \frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2},$$

что и требовалось.

Уравнения (2.5.26), (2.5.31)–(2.5.33) являются кинематическими соотношениями и задают координаты $\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4$ в фазовом пространстве системы (2.5.26)–(2.5.33) (касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^4\{Z_4,Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$).

2.5.5. Переход по n: $5\to 6$. При переходе от $n=5$ к $n=6$ производится переобозначение

$$\begin{pmatrix} Z_4\\ Z_3\\ Z_2\\ Z_1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Z_5\\ Z_4\\ Z_3\\ Z_2\end{pmatrix},$$

при этом вводится новая переменная Z_1. Более того, в искомой системе новые члены, появляющиеся при увеличении n, подчеркиваются.

Предложение 2.4. *При $n=6$ при наличии вспомогательного уравнения*

$$v' = -bv(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2+Z_5^2)\cos\alpha, \tag{2.5.39}$$

следующая система задает геодезический поток на касательном расслоении

$$T_*\mathbb{S}^5\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\}$$

пятимерной сферы $\mathbb{S}^5\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$:

$$\alpha' = -Z_5 + b(\underline{Z_1^2} + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + Z_5^2)\sin\alpha, \tag{2.5.40}$$

$$Z_5' = -(Z_4^2 + Z_3^2 + Z_2^2 + \underline{Z_1^2})\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_5(\underline{Z_1^2} + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + Z_5^2)\cos\alpha, \tag{2.5.41}$$

$$Z_4' = Z_4Z_5\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (Z_3^2 + Z_2^2 + \underline{Z_1^2})\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + bZ_4(\underline{Z_1^2} + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + Z_5^2)\cos\alpha, \tag{2.5.42}$$

$$\begin{gathered} Z_3' = Z_3Z_5\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_3Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\ -(Z_2^2 + \underline{Z_1^2})\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + bZ_3(\underline{Z_1^2} + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + Z_5^2)\cos\alpha, \end{gathered} \tag{2.5.43}$$

$$\begin{gathered} Z_2' = Z_2Z_5\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_2Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\ \underline{+Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{1}{\sin\beta_2}\frac{\cos\beta_3}{\sin\beta_3}} + bZ_2(\underline{Z_1^2} + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + Z_5^2)\cos\alpha, \end{gathered} \tag{2.5.44}$$

$$\begin{gathered} \underline{Z_1' = Z_1Z_5\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} -} \\ \underline{-Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{1}{\sin\beta_2}\frac{\cos\beta_3}{\sin\beta_3} + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + Z_5^2)\cos\alpha,} \end{gathered} \tag{2.5.45}$$

$$\beta_1' = Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{2.5.46}$$

$$\beta_2' = -Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{2.5.47}$$

$$\beta_3' = Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}, \tag{2.5.48}$$

$$\beta_4' = -Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3}, \tag{2.5.49}$$

при этом, в силу замечания 2.11, *существуют первые интегралы*

$$v^2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + Z_5^2) = C_1 = \mathrm{const}, \tag{2.5.50}$$

$$v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2}\sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}, \tag{2.5.51}$$

$$v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}\sin\alpha\sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}, \tag{2.5.52}$$

$$v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 = C_4 = \mathrm{const}, \tag{2.5.53}$$

$$v^2(Z_1\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3) = C_5 = \mathrm{const}\,. \tag{2.5.54}$$

Действительно, в силу (2.5.50)–(2.5.53) аналогично доказательству предложений 2.1–2.3 находятся подчеркнутые коэффициенты в уравнениях (2.5.41)–(2.5.43), а также делается вывод об уравнениях (2.5.44) и (2.5.45), которые будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} Z_2' &= Z_2Z_5\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_2Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\ &+ Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}N_4(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5) + \\ &+ bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + Z_5^2)\cos\alpha, \\ Z_1' &= Z_1Z_5\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} - \\ &- Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}N_4(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5) + \\ &+ bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + Z_5^2)\cos\alpha. \end{aligned} \tag{2.5.55}$$

Далее, в силу (2.5.54) должно выполняться равенство (в силу системы (2.5.39)–(2.5.49))

$$v^2(Z_1'\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3+Z_1\alpha'\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3+Z_1\beta_1'\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3+$$
$$+Z_1\beta_2'\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\sin\beta_3+Z_1\beta_3'\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3-$$
$$-2bZ_1(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2+Z_5^2)\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3)=$$
$$=v^2Z_1Z_2\cos\alpha[\cos\beta_3-N_4(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4,z_5)\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3]=0,$$

откуда

$$N_4(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4,Z_5)=\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{1}{\sin\beta_2}\frac{\cos\beta_3}{\sin\beta_3},$$

что и требовалось.

Уравнения (2.5.40), (2.5.46)–(2.5.49) являются кинематическими соотношениями и задают координаты $\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4,Z_5$ в фазовом пространстве системы (2.5.40)–(2.5.49) (касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^5\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\}$).

2.5.6. Переход по n: $n\to n+1$. При индуктивном переходе от n к $n+1$ производится переобозначение

$$\begin{pmatrix} Z_{n-1}\\ Z_{n-2}\\ \dots\\ Z_1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} Z_{n}\\ Z_{n-1}\\ \dots\\ Z_2\end{pmatrix},$$

при этом вводится новая переменная Z_1. Более того, в искомой системе новые члены, появляющиеся при увеличении n, подчеркиваются.

Предложение 2.5. *При $n>2$ при наличии вспомогательного уравнения*

$$v'=-bv(Z_1^2+\ldots+Z_n^2)\cos\alpha, \tag{2.5.56}$$

следующая система задает геодезический поток на касательном расслоении

$$T_*\mathbb{S}^n\{Z_n,Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$$

n-мерной сферы $\mathbb{S}^n\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$:

$$\alpha'=-Z_n+b(\underline{Z_1^2}+Z_2^2+\ldots+Z_n^2)\sin\alpha, \tag{2.5.57}$$

$$Z_n'=-(Z_{n-1}^2+\ldots+Z_2^2+\underline{Z_1^2})\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+bZ_n(\underline{Z_1^2}+Z_2^2+\ldots+Z_n^2)\sin\alpha, \tag{2.5.58}$$

$$Z_{n-1}'=Z_{n-1}Z_n\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+(Z_{n-2}^2+\ldots+Z_2^2+\underline{Z_1^2})\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+$$
$$+bZ_{n-1}(\underline{Z_1^2}+Z_2^2+\ldots+Z_n^2)\sin\alpha, \tag{2.5.59}$$

$$Z_{n-2}'=Z_{n-2}Z_n\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-$$
$$-(Z_{n-3}^2+\ldots+Z_2^2+\underline{Z_1^2})\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+bZ_{n-2}(\underline{Z_1^2}+Z_2^2+\ldots+Z_n^2)\sin\alpha, \tag{2.5.60}$$

. . . .

$$Z_2'=Z_2Z_n\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-Z_2Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+Z_2Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+$$
$$+\ldots+(-1)^{n+1}Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\ldots\frac{1}{\sin\beta_{n-4}}\frac{\cos\beta_{n-3}}{\sin\beta_{n-3}}+$$
$$\underline{+(-1)^{n+1}Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\ldots\frac{1}{\sin\beta_{n-3}}\frac{\cos\beta_{n-2}}{\sin\beta_{n-2}}}+bZ_2(\underline{Z_1^2}+Z_2^2+\ldots+Z_n^2)\sin\alpha, \tag{2.5.61}$$

$$\underline{Z_1'=Z_1Z_n\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-Z_1Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+Z_1Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+\ldots+}$$

$$\underline{+(-1)^{n+1}Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\ldots\frac{1}{\sin\beta_{n-4}}\frac{\cos\beta_{n-3}}{\sin\beta_{n-3}}+}$$

$$\underline{+(-1)^{n}Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\ldots\frac{1}{\sin\beta_{n-3}}\frac{\cos\beta_{n-2}}{\sin\beta_{n-2}}+bZ_1(\underline{Z_1^2}+Z_2^2+\ldots+Z_n^2)\sin\alpha,} \tag{2.5.62}$$

$$\beta_1'=Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{2.5.63}$$

$$\beta_2'=-Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{2.5.64}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\beta_{n-2}'=(-1)^{n+1}Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}, \tag{2.5.65}$$

$$\beta_{n-1}'=(-1)^{n}Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2}}, \tag{2.5.66}$$

при этом, в силу замечания 2.11, *существуют первые интегралы*

$$v^2(Z_1^2+\ldots+Z_n^2)=C_1=\mathrm{const}, \tag{2.5.67}$$

$$v^2\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-1}^2}\sin\alpha=C_2=\mathrm{const}, \tag{2.5.68}$$

$$v^2\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-2}^2}\sin\alpha\sin\beta_1=C_3=\mathrm{const}, \tag{2.5.69}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$v^2\sqrt{Z_1^2+Z_2^2}\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}=C_{n-1}=\mathrm{const}, \tag{2.5.70}$$

$$v^2(Z_1\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2})=C_n=\mathrm{const}\,. \tag{2.5.71}$$

Действительно, в силу (2.5.67)–(2.5.70) аналогично доказательству предложений 2.1–2.4 находятся подчеркнутые коэффициенты во всех уравнениях до (2.5.61) и (2.5.62), а также делается вывод об уравнениях (2.5.61) и (2.5.62), которые будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
Z_2'&=Z_2z_n\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-Z_2Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+Z_2Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+\ldots+\\
&+(-1)^{n+1}Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\ldots\frac{1}{\sin\beta_{n-4}}\frac{\cos\beta_{n-3}}{\sin\beta_{n-3}}+\\
&+(-1)^{n+1}Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}N_{n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1},Z_1,\ldots,Z_n)+bZ_2(Z_1^2+\ldots+Z_n^2)\sin\alpha,\\
Z_1'&=Z_1Z_n\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-Z_1Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+Z_1Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+\ldots+\\
&+(-1)^{n+1}Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\ldots\frac{1}{\sin\beta_{n-4}}\frac{\cos\beta_{n-3}}{\sin\beta_{n-3}}+\\
&+(-1)^{n}Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}N_{n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1},Z_1,\ldots,Z_n)+bZ_1(Z_1^2+\ldots+Z_n^2)\sin\alpha.
\end{aligned} \tag{2.5.72}$$

Далее, в силу (2.5.71) должно выполняться равенство (в силу системы (2.5.56)–(2.5.66))

$$\begin{gathered}
v^2(Z_1'\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2}+Z_1\alpha'\cos\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2}+Z_1\beta_1'\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\ldots\sin\beta_{n-2}+\ldots\\
\ldots+Z_1\beta_{n-3}'\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}\cos\beta_{n-3}\sin\beta_{n-2}+Z_1\beta_{n-2}'\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2}-\\
-2bZ_1(Z_1^2+\ldots+Z_n^2)\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2})=\\
=(-1)^{n+1}v^2Z_1Z_2\cos\alpha[\cos\beta_{n-2}-N_{n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1},Z_1,\ldots,Z_n)\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2}]=0,
\end{gathered}$$

откуда

$$N_{n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1},Z_1,\ldots,Z_n)=\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{1}{\sin\beta_2}\ldots\frac{1}{\sin\beta_{n-3}}\frac{\cos\beta_{n-2}}{\sin\beta_{n-2}},$$

что и требовалось.

Уравнения (2.5.57), (2.5.63)–(2.5.66) являются кинематическими соотношениями и задают координаты $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, Z_1, \ldots, Z_n$ в фазовом пространстве системы (2.5.57)–(2.5.66) (касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^n\{Z_n, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}$).

3. Случай зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

Как видно из предыдущего раздела, мы закончили начало индукции по n при $n = 5$ (был совершен переход с $n = 5$ на $n = 6$). Таким образом, после доказательства корректности перехода с $n > 2$ на $n + 1$, доказательство об общей структуре динамических систем, описывающих геодезические потоки разной размерности, можно считать законченным.

И в заключительном разделе работы будем рассматривать наиболее общий случай, параллельно указывая на особенности случая $n = 5$.

3.1. Введение зависимости от угловой скорости и приведенная система. Данная глава продолжает изучать динамику n-мерного твердого тела в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{E}^n$. Но, поскольку данный раздел посвящен исследованию случая движения при наличии зависимости момента действующих сил от тензора угловой скорости, введем такую зависимость с более общих позиций.

Пусть $x = (x_{1N}, \ldots, x_{nN})$ — координаты точки N приложения неконсервативной силы (воздействия среды) на $(n-1)$-мерный диск (задаваемый равенством $x_{1N} = 0$), $Q = (Q_1, \ldots, Q_n)$ — компоненты, не зависящие от тензора угловой скорости. Будем вводить зависимость функций $(x_{1N}, \ldots, x_{nN})$ от тензора угловой скорости лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори не очевидно (см. [12, 13]).

Итак, примем следующую зависимость:

$$x = Q + R, \tag{3.1.1}$$

где $R = (R_1, \ldots, R_n)$ — вектор-функция, содержащая компоненты тензора угловой скорости. При этом зависимость функции R от компонент тензора угловой скорости — гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \cdots \\ R_n \end{pmatrix} = -\frac{1}{v}\Omega h, \; h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \cdots \\ h_n \end{pmatrix}. \tag{3.1.2}$$

Здесь Ω — тензор угловой скорости, $(h_1, \ldots, h_n)$ — некоторые положительные параметры (ср. с [25, 28, 29]).

Теперь, применительно к нашей задаче, поскольку $x_{1N} \equiv 0$, то

$$x_{2N} = Q_2 - h_1\frac{\omega_{r_{n-1}}}{v}, \; x_{3N} = Q_3 + h_1\frac{\omega_{r_{n-2}}}{v}, \; \ldots, \; x_{nN} = Q_n + (-1)^{n+1}h_1\frac{\omega_{r_1}}{v}. \tag{3.1.3}$$

Здесь $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_{n-1}}$ — оставшиеся, вообще говоря, ненулевые компоненты тензора угловой скорости Ω.

В частности, при $n = 5$ имеем:

$$x_{2N} = Q_2 - h_1\frac{\omega_{10}}{v}, \quad x_{3N} = Q_3 + h_1\frac{\omega_9}{v}, \quad x_{4N} = Q_4 - h_1\frac{\omega_7}{v}, \quad x_{5N} = Q_5 + h_1\frac{\omega_4}{v}. \tag{3.1.4}$$

3.2. Приведенная система. Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина (см. [42, 43]), пользуясь (1.4.11), имеем:

$$Q = R(\alpha)\mathbf{i}_N, \tag{3.2.1}$$

а динамические функции s, x_{2N}, …, x_{nN} примем в следующем виде:

$$s(\alpha) = B\cos\alpha, \quad \mathbf{r}_N = Q - \frac{1}{v}\Omega h, \quad R(\alpha) = A\sin\alpha, \quad A, B > 0, \tag{3.2.2}$$

убеждающем нас о том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т.е. присутствует зависимость момента от компонент тензора угловой скорости). Причем $h_2 = \ldots = h_n$ в силу динамической симметрии тела.

При этом функции

$$\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega/v\right), \quad \Delta_{v,s}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega/v\right), \quad s = 1, \ldots, n-2,$$

входящие в систему (1.4.14)–(1.4.21), примут следующий вид:

$$\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = A\sin\alpha - \frac{h_1}{v}z_{n-1},$$
$$\Delta_{v,1}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = \frac{h_1}{v}z_{n-2}, \tag{3.2.3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta_{v,n-2}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = (-1)^{n+1}\frac{h_1}{v}z_1.$$

Тогда, благодаря условиям (1.3.1), (3.2.2), преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (1.4.13)–(1.4.21)) примет вид аналитической системы

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z), \tag{3.2.4}$$

$$\alpha' = -Z_{n-1} + b\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha - bH_1 Z_{n-1}\cos^2\alpha, \tag{3.2.5}$$

$$Z'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha - (1+bH_1)\left(\sum_{s=1}^{n-2} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} +$$
$$+bZ_{n-1}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - bZ_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha +$$
$$+bH_1 Z_{n-1}^2\sin\alpha\cos\alpha - H_1 Z_{n-1}\cos\alpha, \tag{3.2.6}$$

$$Z'_{n-2} = (1+bH_1)Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (1+bH_1)\left(\sum_{s=1}^{n-3} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} +$$
$$+bZ_{n-2}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - bZ_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha +$$
$$+bH_1 Z_{n-2}Z_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha - H_1 Z_{n-2}\cos\alpha, \tag{3.2.7}$$

$$Z'_{n-3} = (1+bH_1)Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - (1+bH_1)Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} -$$
$$-(1+bH_1)\left(\sum_{s=1}^{n-4} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} +$$
$$+bZ_{n-3}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - bZ_{n-3}\sin^2\alpha\cos\alpha +$$
$$+bH_1 Z_{n-3}Z_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha - H_1 Z_{n-3}\cos\alpha, \tag{3.2.8}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Z'_1 = (1+bH_1)Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\} +$$
$$+bZ_1\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha +$$
$$+bH_1 Z_1 Z_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha - H_1 Z_1\cos\alpha, \tag{3.2.9}$$

$$\beta'_1 = (1+bH_1)Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{3.2.10}$$

$$\beta_2' = -(1+bH_1)Z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{3.2.11}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\beta_{n-3}' = (-1)^n(1+bH_1)Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\dots\sin\beta_{n-4}}, \tag{3.2.12}$$

$$\beta_{n-2}' = (-1)^{n+1}(1+bH_1)Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\dots\sin\beta_{n-3}}, \tag{3.2.13}$$

где

$$\Psi(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},Z) = -b\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\cos\alpha + b\sin^2\alpha\cos\alpha - bH_1Z_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha,$$

при этом выбираем, как и выше, безразмерные параметры b, H_1 и постоянную n_1 следующим образом:

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{(n-2)I_2}, \quad H_1 = \frac{Bh_1}{(n-2)I_2n_0}, \quad n_1 = n_0. \tag{3.2.14}$$

Итак, система (3.2.4)–(3.2.13) может рассматриваться на своем фазовом $2(n-1)+1$-мерном многообразии

$$W_1 = \mathbb{R}_+^1\{v\}\times T_*\mathbb{S}^{n-1}\{Z_{n-1},\dots,Z_1;\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-3},\beta_{n-2}\}, \tag{3.2.15}$$

т.е. на прямом произведении числового луча на касательное расслоение к $(n-1)$-мерной сфере.

Видно, что в системе (3.2.4)–(3.2.13) порядка $2(n-1)+1$ образовалась независимая система (3.2.5)–(3.2.13) порядка $2(n-1)$ на касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^{n-1}\{Z_{n-1},\dots,Z_1;\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbb{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2}\}$. При этом в независимой системе (3.2.5)–(3.2.13) порядка $2(n-1)$ образовалась еще одна независимая система (3.2.5)–(3.2.12) порядка $2n-3$ на своем $(2n-3)$-мерном многообразии.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. *У динамической части уравнений движения при условиях* (1.2.1), (1.2.3)–(1.3.1) *выделяется динамическая система* (1.4.14)–(1.4.21) *на касательном расслоении*

$$T_*\mathbb{S}^{n-1}\{Z_{n-1},\dots,Z_1;\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2}\}$$

$(n-1)$-мерной сферы $\mathbb{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2}\}$. В частности, при условии (3.2.2) *выделяется система* (3.2.5)–(3.2.13).

3.3. Об аналитическом первом интеграле. В силу (1.3.1) значение скорости центра масс является первым интегралом системы (1.4.1)–(1.4.8) (при условии (1.3.3)), а именно, функция фазовых переменных

$$\Psi_0(v,\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},z_1,\dots,z_{n-1}) = v^2+\sigma^2(z_1^2+\dots+z_{n-1}^2)-2\sigma z_{n-1}v\sin\alpha = V_C^2 \tag{3.3.1}$$

постоянна на ее фазовых траекториях (при этом величины $z_1,\dots,z_{n-1}$ выбираются в силу (1.3.5)).

В силу невырожденной замены независимого переменного (при $v\neq 0$) у системы (3.2.4)–(3.2.13) также существует аналитический интеграл, а именно, функция фазовых переменных

$$\Psi_1(v,\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},Z_1,\dots,Z_{n-1}) = v^2(1+b^2(Z_1^2+\dots+Z_{n-1}^2)-2bZ_{n-1}\sin\alpha) = V_C^2 \tag{3.3.2}$$

постоянна на ее фазовых траекториях.

Равенство (3.3.2) позволяет, не решая системы (3.2.4)–(3.2.13), найти зависимость скорости характерной точки твердого тела (центра D диска) от других фазовых переменных, а именно, при $V_C\neq 0$ выполнено равенство

$$v^2 = \frac{V_C^2}{1+b^2(Z_1^2+\dots+Z_{n-1}^2)-2bZ_{n-1}\sin\alpha}. \tag{3.3.3}$$

Поскольку в фазовом пространстве системы (3.2.4)–(3.2.13) существуют асимптотические предельные множества, то равенство (3.3.2) задает единственный аналитический (даже непрерывный) первый интеграл системы (3.2.4)–(3.2.13) во всем фазовом пространстве (ср. с [80, 82, 84]).

Таким образом, в силу отделения уравнения на величину v, а также наличия аналитического первого интеграла (3.3.2), система (3.2.5)–(3.2.13) может рассматриваться самостоятельно на своем фазовом пространстве.

3.4. Полный список первых интегралов при любом конечном n. Для полного интегрирования системы (3.2.5)–(3.2.13) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Но рассматриваемые системы имеют такие симметрии, которые позволяют снизить достаточное количество первых интегралов до n для интегрирования систем.

Действительно, после замены переменных

$$\begin{pmatrix} Z_{n-1} \\ Z_{n-2} \\ \ldots \\ Z_2 \\ Z_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} w_{n-1} \\ w_{n-2} \\ \ldots \\ w_2 \\ w_1 \end{pmatrix},$$

$$w_{n-1} = Z_{n-1}, \quad w_{n-2} = \sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2}, \quad w_{n-3} = \frac{Z_2}{Z_1}, \quad w_{n-4} = \frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}, \ \ldots, \tag{3.4.1}$$
$$w_2 = \frac{Z_{n-3}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-4}^2}}, \quad w_1 = \frac{Z_{n-2}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2}},$$

система (3.2.5)–(3.2.13) распадается следующим образом:

$$\begin{gathered} \alpha' = -(1 + bH_1)w_{n-1} + b\left(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2\right)\sin\alpha + \\ + b\sin\alpha\cos^2\alpha - bH_1 w_{n-1}\cos^2\alpha, \end{gathered} \tag{3.4.2}$$

$$\begin{gathered} w_{n-1}' = \sin\alpha\cos\alpha - (1 + bH_1)w_{n-2}^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_{n-1}\left(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2\right)\cos\alpha - \\ - bw_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha + bH_1 w_{n-1}^2\sin\alpha\cos\alpha - H_1 w_{n-1}\cos\alpha, \end{gathered} \tag{3.4.3}$$

$$\begin{gathered} w_{n-2}' = (1 + bH_1)w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_{n-2}\left(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2\right)\cos\alpha - \\ - bw_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha + bH_1 w_{n-2}w_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha - H_1 w_{n-2}\cos\alpha, \end{gathered} \tag{3.4.4}$$

$$\begin{gathered} w_s' = d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})\frac{1 + w_s^2}{w_s}\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \\ \beta_s' = d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}), \ s = 1, \ldots, n-3, \end{gathered} \tag{3.4.5}$$

$$\beta_{n-2}' = d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}), \tag{3.4.6}$$

где выполнены условия

$$\begin{gathered} d_1(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = (1 + bH_1)Z_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ d_2(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = -(1 + bH_1)Z_{n-3}(w_{n-1}, \ldots, w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \\ = (-1)^{n+1}(1 + bH_1)Z_1(w_{n-1}, \ldots, w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}, \end{gathered} \tag{3.4.7}$$

при этом

$$z_k = Z_k(w_{n-1}, \ldots, w_1), \quad k = 1, \ldots, n-2, \tag{3.4.8}$$

— функции в силу замены (3.4.1).

Видно, что система (3.4.2)–(3.4.6) порядка $2(n-1)$ распадается на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (3.4.2)–(3.4.4) — третьего, а системы (3.4.5) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (3.4.2)–(3.4.6) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (3.4.2)–(3.4.4), по одному для систем (3.4.5) (всего $n-3$ штуки), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.4.6) (т.е. *всего* n).

Сначала сопоставим независимой подсистеме третьего порядка (3.4.2)–(3.4.4) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{gathered}\frac{dw_{n-1}}{d\alpha}=\frac{R_2(\alpha,w_{n-2},w_{n-1})}{-w_{n-1}+b(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)\sin\alpha+b\sin\alpha\cos^2\alpha-bH_1w_{n-1}\cos^2\alpha},\\ \frac{dw_{n-2}}{d\alpha}=\frac{R_1(\alpha,w_{n-2},w_{n-1})}{-w_{n-1}+b(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)\sin\alpha+b\sin\alpha\cos^2\alpha-bH_1w_{n-1}\cos^2\alpha},\end{gathered}\tag{3.4.9}$$

$$R_2(\alpha,w_{n-2},w_{n-1})=\sin\alpha\cos\alpha+bw_{n-1}(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)\cos\alpha-bw_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha-$$
$$-(1+bH_1)w_{n-2}^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+bH_1w_{n-1}^2\sin\alpha\cos\alpha-H_1w_{n-1}\cos\alpha,$$
$$R_1(\alpha,w_{n-2},w_{n-1})=bw_{n-2}(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)\cos\alpha-bw_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha+$$
$$+(1+bH_1)w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+bH_1w_{n-2}w_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha-H_1w_{n-2}\cos\alpha.$$

Используя замену $\tau=\sin\alpha$, перепишем систему (3.4.9) в алгебраическом виде

$$\begin{gathered}\frac{dw_{n-1}}{d\tau}=\\ =\frac{\tau+bw_{n-1}(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)-bw_{n-1}\tau^2-(1+bH_1)w_{n-2}^2/\tau+bH_1w_{n-1}^2\tau-H_1w_{n-1}}{-w_{n-1}+b\tau(1-\tau^2)+b\tau(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)-bH_1w_{n-1}(1-\tau^2)},\\ \frac{dw_{n-2}}{d\tau}=\\ =\frac{bw_{n-2}(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)-bw_{n-2}\tau^2+(1+bH_1)w_{n-2}w_{n-1}/\tau+bH_1w_{n-2}w_{n-1}\tau-H_1w_{n-2}}{-w_{n-1}+b\tau(1-\tau^2)+b\tau(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)-bH_1w_{n-1}(1-\tau^2)}.\end{gathered}\tag{3.4.10}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_{n-2}=u_1\tau,\ w_{n-1}=u_2\tau,\tag{3.4.11}$$

приводим систему (3.4.10) к следующему виду:

$$\begin{gathered}\tau\frac{du_2}{d\tau}+u_2=\frac{1-bu_2\tau^2+bu_2(u_1^2+u_2^2)\tau^2-(1+bH_1)u_1^2-H_1u_2+bH_1u_2^2\tau^2}{-u_2+b\tau^2(u_1^2+u_2^2)+b(1-\tau^2)-bH_1u_2(1-\tau^2)},\\ \tau\frac{du_1}{d\tau}+u_1=\frac{bu_1(u_1^2+u_2^2)\tau^2-bu_1\tau^2+(1+bH_1)u_1u_2-H_1u_1+bH_1u_1u_2}{-u_2+b\tau^2(u_1^2+u_2^2)+b(1-\tau^2)-bH_1u_2(1-\tau^2)},\end{gathered}\tag{3.4.12}$$

что эквивалентно

$$\begin{gathered}\tau\frac{du_2}{d\tau}=\frac{1-(b+H_1)u_2+(1+bH_1)u_2^2-(1+bH_1)u_1^2}{-u_2+b\tau^2(u_1^2+u_2^2)+b(1-\tau^2)-bH_1u_2(1-\tau^2)},\\ \tau\frac{du_1}{d\tau}=\frac{2(1+bH_1)u_1u_2-(b+H_1)u_1}{-u_2+b\tau^2(u_1^2+u_2^2)+b(1-\tau^2)-bH_1u_2(1-\tau^2)}.\end{gathered}\tag{3.4.13}$$

Сопоставим системе второго порядка (3.4.13) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1}=\frac{1-(b+H_1)u_2+(1+bH_1)u_2^2-(1+bH_1)u_1^2}{2(1+bH_1)u_1u_2-(b+H_1)u_1},\tag{3.4.14}$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{(1+bH_1)u_2^2+(1+bH_1)u_1^2-(b+H_1)u_2+1}{u_1}\right)=0.\tag{3.4.15}$$

Итак, уравнение (3.4.14) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{(1+bH_1)u_2^2+(1+bH_1)u_1^2-(b+H_1)u_2+1}{u_1}=C_1=\mathrm{const},\tag{3.4.16}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_{n-1},w_{n-2};\alpha)=\frac{(1+bH_1)(w_{n-1}^2+w_{n-2}^2)-(b+H_1)w_{n-1}\sin\alpha+\sin^2\alpha}{w_{n-2}\sin\alpha}=C_1=\mathrm{const}\,. \quad (3.4.17)$$

Замечание 3.1. Рассмотрим систему (3.4.2)–(3.4.4) с переменной диссипацией с нулевым средним (см. [37, 57, 59, 61]), становящейся консервативной при $b=H_1$:

$$\begin{aligned}\alpha' &= -(1+b^2)w_{n-1}+b\left(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2\right)\sin\alpha+\\ &\quad+b\sin\alpha\cos^2\alpha-b^2w_{n-1}\cos^2\alpha,\\ w_{n-1}' &= \sin\alpha\cos\alpha-(1+b^2)w_{n-2}^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+bw_{n-1}\left(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2\right)\cos\alpha-\\ &\quad-bw_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha+b^2w_{n-1}^2\sin\alpha\cos\alpha-bw_{n-1}\cos\alpha,\\ w_{n-2}' &= (1+b^2)w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+bw_{n-2}\left(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2\right)\cos\alpha-\\ &\quad-bw_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha+b^2w_{n-2}w_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha-bw_{n-2}\cos\alpha.\end{aligned} \quad (3.4.18)$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$(1+b^2)(w_{n-1}^2+w_{n-2}^2)-2bw_{n-1}\sin\alpha+\sin^2\alpha=C_1^*=\mathrm{const}, \quad (3.4.19)$$

$$w_{n-2}\sin\alpha=C_2^*=\mathrm{const}\,. \quad (3.4.20)$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (3.4.19), (3.4.20) также является первым интегралом системы (3.4.18). Но при $b\neq H_1$ каждая из функций

$$(1+bH_1)(w_{n-1}^2+w_{n-2}^2)-(b+H_1)w_{n-1}\sin\alpha+\sin^2\alpha \quad (3.4.21)$$

и (3.4.20) по отдельности не является первым интегралом системы (3.4.2)–(3.4.4). Однако отношение функций (3.4.21), (3.4.20) является первым интегралом системы (3.4.2)–(3.4.4) при любых b,H_1.

Далее, произведем поиск дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (3.4.2)–(3.4.4). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (3.4.16) при $u_1\neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2-\frac{b+H_1}{2(1+bH_1)}\right)^2+\left(u_1-\frac{C_1}{2(1+bH_1)}\right)^2=\frac{(b-H_1)^2+C_1^2-4}{4(1+bH_1)^2}. \quad (3.4.22)$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(b-H_1)^2+C_1^2-4\geqslant 0, \quad (3.4.23)$$

и фазовое пространство системы (3.4.2)–(3.4.4) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (3.4.22).

Таким образом, в силу соотношения (3.4.16), первое уравнение системы (3.4.13) примет вид

$$\tau\frac{du_2}{d\tau}=\frac{1-(b+H_1)u_2+(1+bH_1)u_2^2-(1+bH_1)U_1^2(C_1,u_2)}{-u_2+b(1-\tau^2)+b\tau^2(U_1^2(C_1,u_2)+u_2^2)-bH_1u_2(1-\tau^2)}, \quad (3.4.24)$$

где

$$U_1(C_1,u_2)=\frac{1}{2}\{C_1\pm\sqrt{C_1^2-4(1+bH_1)(1-(b+H_1)u_2+(1+bH_1)u_2^2)}\}; \quad (3.4.25)$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (3.4.23), или вида уравнения Бернулли:

$$\frac{d\tau}{du_2}=\frac{(b-(1+bH_1)u_2)\tau-b\tau^3(1-U_1^2(C_1,u_2)-u_2^2-H_1u_2)}{1-(b+H_1)u_2+(1+bH_1)u_2^2-(1+bH_1)U_1^2(C_1,u_2)}. \quad (3.4.26)$$

Уравнение (3.4.26) (при помощи (3.4.25)) легко приводится к линейному неоднородному уравнению:

$$\frac{dp}{du_2}=\frac{2((1+bH_1)u_2-b)p+2b(1-H_1u_2-u_2^2-U_1^2(C_1,u_2))}{1-(b+H_1)u_2+(1+bH_1)u_2^2-(1+bH_1)U_1^2(C_1,u_2)},\quad p=\frac{1}{\tau^2}. \quad (3.4.27)$$

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде (т.е. через конечную комбинацию квадратур). При этом общее решение уравнения (3.4.27) зависит от произвольной постоянной C_2. Полные выкладки в данном месте приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (3.4.27), даже в частном случае

$$|b - H_1| = 2, \quad C_1 = \frac{1 - A_1^4}{1 + A_1^4}, \quad A_1 = \frac{1}{2}(b + H_1)$$

имеет следующее решение:

$$p = p_0(u_2) = C[1 - A_1 u_2]^{2/(1+A_1^4)} \left| \frac{\sqrt{C_1^2 - 4A_1^2(1 - A_1 u_2)^2} \pm C_1}{\sqrt{C_1^2 - 4A_1^2(1 - A_1 u_2)^2} \mp C_1} \right|^{\pm A_1^4/(1+A_1^4)} \times$$
$$\times \exp \frac{2(A_1 - b)}{(1 + A_1^4) A_1 (A_1 u_2 - 1)}, \quad C = \mathrm{const}\,. \tag{3.4.28}$$

Замечание 3.2. В выражение найденного первого интеграла формально можно вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (3.4.17).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = \ln|\sin\alpha| + G_2\left(\sin\alpha, \frac{w_{n-1}}{\sin\alpha}, \frac{w_{n-2}}{\sin\alpha}\right) = C_2 = \mathrm{const}\,. \tag{3.4.29}$$

Итак, найдены два первых интеграла (3.4.17), (3.4.29) независимой системы третьего порядка (3.4.2)–(3.4.4). Осталось указать по одному первому интегралу — для систем (3.4.5) (их всего $n-3$), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.4.6).

Действительно, искомые первые интегралы имеют следующий вид:

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\sin\beta_s} = C''_{s+2} = \mathrm{const}, \quad s = 1, \ldots, n-3, \tag{3.4.30}$$

$$\Theta_n(w_{n-3}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C''_n = \mathrm{const}, \tag{3.4.31}$$

при этом в левую часть равенства (3.4.31) вместо C_{n-2}, C_{n-1} можно подставить интегралы (3.4.30) при $s = n-4, n-3$.

Теорема 3.2. *Система* (3.4.2)–(3.4.6) *порядка* $2(n-1)$ *обладает достаточным количеством* (n) *независимых первых интегралов* (3.4.17), (3.4.29), (3.4.30), (3.4.31).

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений общего случая при условии (3.2.2) имеет

$$1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + n = \frac{n^2 - n + 4}{2}, \ n > 2,$$

инвариантных соотношений: имеются аналитическая неинтегрируемая связь вида (1.3.1), соответствующая аналитическому первому интегралу (2.2.1), циклические первые интегралы вида (1.2.2), первый интеграл вида (3.4.17), также имеется первый интеграл (3.4.29), который может быть найден из уравнения (3.4.27), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и, наконец, трансцендентные первые интегралы вида (3.4.30), (3.4.31).

3.5. Топологические аналогии. Мы имеем следующие топологичекие и механические аналогии в том смысле, в котором они объяснены выше.

1) Движение свободного n-мерного твердого тела в неконсервативном поле сил со следящей силой (при наличии неинтегрируемой связи).
2) Движение закрепленного n-мерного физического маятника в потоке набегающей среды (неконсервативное поле сил).
3) Вращение n-мерного твердого тела вокруг центра масс, движущегося прямолинейно и равномерно, и находящегося в неконсервативном поле сил.

О более общих топологических аналогиях см. также [7, 8, 18, 20, 24, 64, 66, 73, 77].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В.* Группы цветов// Совр. мат. прилож. — 2009. — *62.* — С. 15–27.
2. *Андронов А. А.* Собрание трудов. — М.: Изд-во АН СССР, 1956.
3. *Андронов А. А., Понтрягин Л. С.* Грубые системы// Докл. СССР. — 1937. — *14*, № 5. — С. 247–250.
4. *Белецкий В. В., Яншин А. М.* Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. — Киев: Наукова думка, 1984.
5. *Беляев А. В.* О движении многомерного тела с закрепленной точкой в поле силы тяжести// Мат. сб. — 1981. — *114*, № 3. — С. 465–470.
6. *Бендиксон И.* О кривых определяемых дифференциальными уравнениями// Усп. мат. наук. — 1941. — *9.* — С. 119–211.
7. *Биркгоф Дж.* Динамические системы. — М.-Л.: Гостехиздат, 1941.
8. *Богоявленский О. И.* Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера// Докл. АН СССР. — 1986. — *287*, № 5. — С. 1105–1108.
9. *Браилов А. В.* Некоторые случаи полной интегрируемости уравнений Эйлера и приложения// Докл. АН СССР. — 1983. — *268*, № 5. — С. 1043–1046.
10. *Бурбаки Н.* Интегрирование. — М.: Наука, 1970.
11. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. — М.: Мир, 1972.
12. *Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В.* Динамика продольного и бокового движения. — М.: Машиностроение, 1969.
13. *Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В.* Динамика самолета. Пространственное движение. — М.: Машиностроение, 1988.
14. *Веселов А. П.* Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на $so(4)$// Докл. АН СССР. — 1983. — *270*, № 6. — С. 1298–1300.
15. *Вишик С. В., Должанский С. Ф.* Аналоги уравнений Эйлера–Пуассона и магнитной гидродинамики, связанные с группами Ли// Докл. АН СССР.. — *238*, № 5. — С. 1032–1035.
16. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbf{R}^n$// Докл. РАН. — 2001. — *380*, № 1. — С. 47–50.
17. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbf{R}^n$// Докл. РАН. — 2002. — *383*, № 5. — С. 635–637.
18. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — *5.* — С. 37–41.
19. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Валерий Владимирович Трофимов// Совр. мат. Фундам. напр. — 2007. — *23.* — С. 5–15.
20. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Символы Леви-Чивиты, обобщенные векторные произведения и новые случаи интегрируемости в механике многомерного тела// Совр. мат. прилож. — 2012. — *76.* — С. 22–39.
21. *Годбийон К.* Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. — М.: Мир, 1973.
22. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. — М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
23. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. — М.-Л.: Гостехиздат, 1953.
24. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
25. *Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — *3.* — С. 23–27.
26. *Иванова Т. А.* Об уравненийя Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 2. — С. 43–51.
27. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — *38*, № 1. — С. 3–67.
28. *Козлов В. В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — *79*, № 3. — С. 307–316.
29. *Кулешов А. С., Черняков Г. А.* Исследование задачи о движении тяжелого тела вращения по абсолютно шероховатой плоскости с помощью алгоритма Ковачича// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2018. — *145.* — С. 3–85.

30. *Локшин Б. Я., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Маятниковые системы с динамической симметрией// Совр. мат. прилож. — 2016. — *100*. — С. 76–133.
31. *Ляпунов А. М.* Новый случай интегрируемости уравнений движения твердого тела в жидкости// в кн.: Собр. соч.. — М.: Изд-во АН СССР, 1954. — Т. I. — С. 320–324.
32. *Манаков С. В.* Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела// Функц. анал. прилож. — 1976. — *10*, № 4. — С. 93–94.
33. *Окунев Ю. М., Шамолин М. В.* Об интегрируемости в элементарных функциях некоторых классов комплексных неавтономных уравнений// Совр. мат. прилож. — 2009. — *65*. — С. 121–130.
34. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — *9*, № 100. — С. 136–150.
35. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — *9/1*, № 110. — С. 35–41.
36. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — *7*, № 118. — С. 60–69.
37. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1989. — *3*. — С. 51–54.
38. *Смейл С.* Дифференцируемые динамические системы// Усп. мат. наук. — 1970. — *25*, № 1. — С. 113–185.
39. *Стеклов В. А.* О движении твердого тела в жидкости. — Харьков, 1893.
40. *Трофимов В. В.* Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — *44*, № 5. — С. 1191–1199.
41. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 4. — С. 3–229.
42. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// в кн.: Полн. собр. соч.. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — Т. 1. — С. 133–135.
43. *Чаплыгин С. А.* Избранные труды. — М.: Наука, 1976.
44. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
45. *Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в среде с сопротивлением// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1992. — *1*. — С. 52–58.
46. *Шамолин М. В.* Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента// Прикл. мат. мех. — 1993. — *57*, № 4. — С. 40–49.
47. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209–210.
48. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — *364*, № 5. — С. 627–629.
49. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — *375*, № 3. — С. 343–346.
50. *Шамолин М. В.* Полная интегрируемость уравнений движения пространственного маятника в потоке набегающей среды// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2001. — *5*. — С. 22–28.
51. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $so(4) \times \mathbb{R}^4$// Усп. мат. наук. — 2005. — *60*, № 6. — С. 233–234.
52. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете вращательных производных момента сил по угловой скорости// Докл. РАН. — 2005. — *403*, № 4. — С. 482–485.
53. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 5. — С. 169–170.
54. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — *14*, № 3. — С. 3–237.
55. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — *425*, № 3. — С. 338–342.
56. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости в пространственной динамике твердого тела// Докл. РАН. — 2010. — *431*, № 3. — С. 339–343.

57. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — *65*, № 1. — С. 189–190.
58. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — *437*, № 2. — С. 190–193.
59. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — *440*, № 2. — С. 187–190.
60. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *444*, № 5. — С. 506–509.
61. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *442*, № 4. — С. 479–481.
62. *Шамолин М. В.* Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2013. — *125*. — С. 3–251.
63. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — *453*, № 1. — С. 46–49.
64. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — *68*, № 5 (413). — С. 185–186.
65. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — *449*, № 4. — С. 416–419.
66. *Шамолин М. В.* Многообразие случаев интегрируемости в пространственной динамике твердого тела в неконсервативном поле сил// Тр. семин. им. И. Г. Петровского — 2014. — *30*. — С. 287–350.
67. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — *457*, № 5. — С. 542–545.
68. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — *20*, № 4. — С. 3–231.
69. *Шамолин М. В.* Многомерный маятник в неконсервативном силовом поле// Докл. РАН. — 2015. — *460*, № 2. — С. 165–169.
70. *Шамолин М. В.* Новый случай полной интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2015. — *3*. — С. 11–14.
71. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — *461*, № 5. — С. 533–536.
72. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — *464*, № 6. — С. 688–692.
73. *Шамолин М. В.* Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 6. — С. 743–759.
74. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы в динамике на касательном расслоении к сфере// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2016. — № 2. — С. 25–30.
75. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Тр. семин. им. И. Г. Петровского — 2016. — *31*. — С. 257–323.
76. *Шамолин М. В.* Многомерный маятник в неконсервативном силовом поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2016. — *470*, № 3. — С. 288–292.
77. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости систем с диссипацией на касательных расслоениях к двумерной и трехмерной сферам// Докл. РАН. — 2016. — *471*, № 5. — С. 547–551.
78. *Шамолин М. В.* Маломерные и многомерные маятники в неконсервативном поле. Часть 1// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2017. — *134*. — С. 6–128.
79. *Шамолин М. В.* Маломерные и многомерные маятники в неконсервативном поле. Часть 2// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2017. — *135*. — С. 3–93.
80. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *475*, № 5. — С. 519–523.
81. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — *474*, № 2. — С. 177–181.

82. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *477*, № 2. — С. 168–172.
83. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *482*, № 5. — С. 527–533.
84. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *479*, № 3. — С. 270–276.
85. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемой системы с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2018. — *3*. — С. 34–43.
86. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *485*, № 5. — С. 583–587.
87. *Tikhonov A. A., Tkhai V. N.* Symmetric oscillations of charged gyrostat in weakly elliptical orbit with small inclination// Nonlinear Dynamics — 2016. — *85*, № 3. — P. 1919–1927.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (МГУ)
E-mail: `shamolin@rambler.ru`, `shamolin@imec.msu.ru`