М. В. Шамолин, Случаи интегрируемых динамических систем девятого порядка с диссипацией, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 187, 68–81

DOI: https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-187-68-81

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 187 (2020). С. 68–81
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-187-68-81

УДК 517, 531.01

СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДЕВЯТОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ

© 2020 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. В работе показана интегрируемость некоторых классов однородных по части переменных динамических систем девятого порядка, в которых выделяется система на касательном расслоении к четырехмерным многообразиям. При этом силовые поля обладают диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Ключевые слова: динамическая система, неконсервативное поле сил, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

EXAMPLES OF NINE-ORDER INTEGRABLE DYNAMICAL SYSTEMS WITH DISSIPATION

© 2020 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. In this paper, the integrability of some classes of homogeneous with respect to a part of variables ninth-order dynamical systems, in which a system on the tangent bundle to four-dimensional manifolds is distinguished. In this case, force fields have a dissipation of different signs and are generalizations of those considered earlier.

Keywords and phrases: dynamical system, nonconservative force fields, integrability, transcendental first integral.

AMS Subject Classification: 58-xx, 70-xx

СОДЕРЖАНИЕ

Задача определения и описания диссипации в динамической системе является довольно затруднительной. Но это может быть сделано следующим образом: вполне определенные коэффициенты в уравнениях указывают на рассеяние энергии в одних областях фазового пространства, а в других его областях — на подкачку энергии. Это приводит к потере известных первых интегралов (законов сохранения), глобально выражающихся через гладкие функции.

Известным препятствием к наличию полного набора гладких первых интегралов в системе могут быть притягивающие или отталкивающие предельные множества. При их обнаружении необходимо забыть о полном наборе даже непрерывных во всем фазовом пространстве автономных первых интегралов (см. [13]).

В ряде случаев в динамике систем с диссипацией (разного знака) если и удается найти полный набор первых интегралов, то среди них обязательно будут первые интегралы, являющиеся трансцендентными (в смысле комплексного анализа) функциями (имеющими существенно особые точки). Поэтому результаты, полученные в данной работе, особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

В ряде работ автора уже затрагивалась данная тематика (см., например, [22, 23]). В данной работе показана интегрируемость некоторых классов однородных по части переменных динамических систем девятого порядка, в которых выделяется система на касательном расслоении к четырехмерным многообразиям. При этом силовые поля обладают диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

1. Замечания к системам малых нечетных порядков

Пусть v, α, z — фазовые переменные в гладкой динамической системе, правые части которой — однородные полиномы степени 2 по переменным v, z с коэффициентами, зависящими от α (для уравнений на $\dot v$, $\dot z$, $v\dot\alpha$) (см. также [6]) следующим образом:

$$\begin{cases} \dot v = a(\alpha)v^2 + b(\alpha)vz + c(\alpha)z^2, \\ \dot z = d(\alpha)v^2 + e(\alpha)vz + f(\alpha)z^2, \\ v\dot\alpha = g(\alpha)v^2 + h(\alpha)vz + i(\alpha)z^2. \end{cases} \tag{1.1}$$

Тогда, выбирая в качестве нового времени переменную q ($dq = v dt$, $d/dq = \langle ' \rangle$, $v \neq 0$), а также новую фазовую переменную Z по формуле $z = Zv$, систему (1.1) можно переписать в следующем виде:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \tag{1.2}$$

$$\begin{cases} \alpha' = g(\alpha) + h(\alpha)Z + i(\alpha)Z^2, \\ Z' = d(\alpha) + e(\alpha)Z + f(\alpha)Z^2 - Z\Psi(\alpha, Z), \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\Psi(\alpha, Z) = a(\alpha) + b(\alpha)Z + c(\alpha)Z^2;$$

при этом уравнение (1.2) на v отделяется, что дает возможность рассматривать два оставшихся уравнения в качестве системы (1.3) с одной степенью свободы на двумерном многообразии $N^2\{Z; \alpha\}$ (см. [6, 7, 11, 12]).

Нас прежде всего будет интересовать случай, когда выполнены тождества

$$d(\alpha) \equiv e(\alpha) \equiv f(\alpha) \equiv 0. \tag{1.4}$$

При этом остальные шесть функций $a(\alpha)$, $b(\alpha)$, $c(\alpha)$, $g(\alpha)$, $h(\alpha)$, $i(\alpha)$, вообще говоря, не равны тождественно нулю. Тогда система (1.2), (1.3) имеет естественный аналитический первый интеграл

$$\Phi_1(v; Z) = z = vZ = C_1 = \mathrm{const}\,. \tag{1.5}$$

Для полной интегрируемости системы (1.2), (1.3) при условии (1.4) нужно найти еще один первый интеграл, независимый с (1.5). Для этого можно предъявить достаточные условия существования искомого первого интеграла.

1.1. Некоторый класс систем без диссипации. I.

Предложение 1.1. *Если выполнены условия*

$$a(\alpha) = \frac{h^2(\alpha)}{i^2(\alpha)}c(\alpha), \quad b(\alpha) = \frac{h(\alpha)}{i(\alpha)}c(\alpha), \quad g(\alpha) = \frac{h^2(\alpha)}{i(\alpha)}, \tag{1.6}$$

где $c(\alpha)$, $h(\alpha)$, $i(\alpha)$ — *произвольные гладкие функции на своей области определения, то система* (1.2), (1.3) *при условии* (1.4) *имеет два гладких первых интеграла, а именно,* (1.5), *а также*

$$\Phi_0(v; Z; \alpha) = v\gamma(\alpha) = C_0 = \mathrm{const}, \tag{1.7}$$

где функция $\gamma(\alpha)$ *имеет вид*

$$\gamma(\alpha) = \gamma_0 \exp\left[-\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{c(\xi)}{i(\xi)} d\xi\right], \quad \gamma_0 = \gamma(\alpha_0). \tag{1.8}$$

Доказательство. Действительно, полная производная функции (1.7) в силу системы (1.2), (1.3) при условии (1.4) имеет вид

$$v^2\left[a(\alpha)\gamma(\alpha) + \frac{\gamma(\alpha)}{d\alpha}g(\alpha)\right] + v^2 Z\left[b(\alpha)\gamma(\alpha) + \frac{\gamma(\alpha)}{d\alpha}h(\alpha)\right] + v^2 Z^2\left[c(\alpha)\gamma(\alpha) + \frac{\gamma(\alpha)}{d\alpha}i(\alpha)\right],$$

и она тождественно равна нулю, поскольку выполнены соотношения (1.6) и (1.8). □

Другими словами, независимая подсистема (1.3) на многообразии $N^2\{Z;\alpha\}$ при условиях (1.4), (1.6) имеет рациональный по Z первый интеграл вида (см. также [14, 15, 24, 25])

$$\Phi(Z; \alpha) = \frac{\gamma(\alpha)}{Z} = C = \mathrm{const}, \tag{1.9}$$

который не имеет существенно особых точек, по крайней мере, если функция $\gamma(\alpha)$ нигде не равна нулю. В этом случае подсистема (1.3) не имеет притягивающих или отталкивающих предельных множеств, позволяющих говорить о наличии в системе диссипации того или иного знака.

Если же функция $\gamma(\alpha)$ в отдельных точках и обращается в нуль, то функция (1.9) формально имеет на множестве

$$\Sigma_0 = \{(\alpha, Z):\ \gamma(\alpha) = 0,\ Z = 0\}$$

существенно особые точки. Но поскольку «расширенная» система третьего порядка (1.2), (1.3) (при условиях (1.4), (1.6)) имеет полный набор гладких первых интегралов во всем фазовом пространстве и, тем самым, не имеет притягивающих (или отталкивающих) предельных множеств, таких множеств не имеет и система второго порядка (1.3) (при условиях (1.4), (1.6)).

Таким образом, *внутреннее* силовое поле (зависящее от трех произвольных гладких функций $c(\alpha)$, $h(\alpha)$ и $i(\alpha)$) в системе (1.2), (1.3) при условиях (1.4), (1.6) *не нарушает консервативности* самой системы.

1.2. Некоторый класс систем без диссипации. II. Но в данной работе мы также отметим и другой важный частный случай системы (1.2), (1.3), а именно,

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \tag{1.10}$$

$$\begin{cases} \alpha' = -Z + bZ^2\delta(\alpha), \\ Z' = -Z\Psi(\alpha, Z), \end{cases} \tag{1.11}$$

$$\Psi(\alpha, Z) = -bZ^2\frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha},$$

$b \geqslant 0$, $\delta(\alpha)$ — некоторая гладкая функция. При этом уравнение на v также отделяется, что дает возможность рассматривать два оставшихся уравнения в качестве системы с одной степенью свободы на двумерном многообразии $N^2\{Z;\alpha\}$ [5].

Система (1.10), (1.11) имеет два гладких первых интеграла:

$$\Phi_0(v; Z; \alpha) = v^2(1 - 2bZ\delta(\alpha)) = C_0 = \mathrm{const},$$
$$\Phi_1(v; Z) = vZ = C_1 = \mathrm{const}.$$

Другими словами, независимая подсистема (1.11) на $N^2\{Z;\alpha\}$ имеет рациональный по Z первый интеграл вида

$$\Phi(Z; \alpha) = \frac{1 - 2bZ\delta(\alpha)}{Z^2} = C = \mathrm{const}, \tag{1.12}$$

который не имеет существенно особых точек (см. также [6]). В силу последнего, подсистема (1.11) не имеет притягивающих или отталкивающих предельных множеств, позволяющих говорить о наличии в системе диссипации того или иного знака.

Добавим в систему (1.10), (1.11) внешнее силовое поле $F(\alpha)$ при $b > 0$

$$\begin{cases} v' = \Psi(\alpha, Z)v, \\ \alpha' = -Z + bZ^2\delta(\alpha), \\ Z' = F(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z). \end{cases}$$

Создается впечатление, что система осталась консервативной (что и имеет место при $b = 0$, см. [22,23]). Действительно, при некотором условии у нее имеется гладкий первый интеграл вида

$$\Phi_1(v; Z; \alpha) = v^2(Z^2 + F_1(\alpha)) = C_1 = \text{const}, \quad \frac{dF_1(\alpha)}{d\alpha} = 2F(\alpha),$$

структура которого напоминает интеграл полной энергии. Но дополнительного гладкого первого интеграла система, вообще говоря, не имеет. Более того, если

$$F(\alpha) = \delta(\alpha)\frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha},$$

то дополнительный первый интеграл является трансцендентной функцией фазовых переменных (т.е. имеет существенно особые точки, означающие наличие в системе притягивающих предельных множеств, см. [7]).

Аналогично рассматривались системы пятого и даже седьмого порядков на многообразии с ненулевыми коэффициентами связности Γ^i_{jk}:

$$v' = \Psi(\alpha, Z)v,$$

$$\begin{cases} \alpha' = -Z_3 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\delta(\alpha), \\ Z_3' = \Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha)Z_2^2 + \Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha)Z_1^2 - Z_3\Psi(\alpha, Z), \\ Z_2' = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_2Z_3 - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)f(\alpha)g^2(\beta_1)Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z), \\ Z_1' = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_1Z_3 - \left[2\Gamma_2(\beta) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f(\alpha)Z_1Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z), \\ \beta_1' = Z_2f(\alpha), \\ \beta_2' = Z_1f(\alpha)g(\beta_1), \end{cases}$$

$$\Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha},$$

$Z = (Z_1, Z_2, Z_3)$, $z_k = Z_kv$, $k = 1, 2, 3$, $b \geqslant 0$, $\delta(\alpha)$, $f(\alpha)$, $g(\beta_1)$ — некоторые гладкие функции, как системы при отсутствии внешнего поля сил, в которых также присутствуют коэффициенты при параметре $b \geqslant 0$. Но данные коэффициенты не нарушают консервативности, поскольку данные системы обладают полным набором (пятью) гладких первых интегралов (см. [22,23].

2. Системы девятого порядка при отсутствии внешнего силового поля

Перейдем теперь к системам более высокого — девятого порядка. При этом повышение порядка проводится не так очевидно, поэтому автором принято решение достаточно подробно провести соответствующий анализ.

Пусть v, α, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $z = (z_1, \ldots, z_4)$ — фазовые переменные в системе, правые части которой — однородные полиномы степени 2 по переменным v, z (см. также [18]) с коэффициентами, зависящими от α, β. Тогда, выбирая в качестве нового времени переменную q ($dq = vdt$, $d/dq = \langle ' \rangle$, $v \neq 0$), будем рассматривать следующую систему девятого порядка как систему при отсутствии внешнего поля сил:

$$v' = \Psi(\alpha, Z)v, \tag{2.1}$$

$$
\begin{cases}
\alpha' = -Z_4 + b(Z_1^2 + \ldots + Z_4^2)\delta(\alpha), \\
Z_4' = \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) f_1^2(\alpha) Z_3^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) Z_2^2 + \\
\qquad + \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta) f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) Z_1^2 - Z_4 \Psi(\alpha, Z), \\
Z_3' = \left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_3 Z_4 - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) Z_2^2 - \\
\qquad - \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) Z_1^2 - Z_3\Psi(\alpha, Z), \\
Z_2' = \left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_2 Z_4 - \left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1(\alpha) Z_2 Z_3 - \\
\qquad - \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\dfrac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2) Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z), \\
Z_1' = \left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_1 Z_4 - \left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1(\alpha) Z_1 Z_3 - \\
\qquad - \left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] f_2(\alpha) g_1(\beta_1) Z_1 Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z), \\
\beta_1' = Z_3 f_1(\alpha), \\
\beta_2' = Z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \\
\beta_3' = Z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2),
\end{cases}
\tag{2.2}
$$

$$
\Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + \ldots + Z_4^2)\tilde\delta(\alpha), \quad \tilde\delta(\alpha) = \frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha},
$$

$Z = (Z_1, \ldots, Z_4)$, $z_s = Z_s v$, $s = 1, \ldots, 4$, $b \geqslant 0$, $\delta(\alpha)$, $f_k(\alpha)$, $k = 1, 2, 3$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2$, $h(\beta_2)$ — некоторые гладкие функции. При этом уравнение (2.1) отделяется, что дает возможность рассматривать уравнения (2.2) как независимую систему (с четырьмя степенями свободы) на восьмимерном многообразии

$$
N^8\{Z_4, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\} = TM^4\{Z_4, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}
$$

(касательном расслоении гладкого четырехмерного многообразия $M^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$; см. также [7, 18, 23]).

Рассмотрим структуру системы (2.2). Она соответствует следующим уравнениям геодезических линий на касательном расслоении $TM^4\{\dot\alpha, \dot\beta_1, \dot\beta_2, \dot\beta_3; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ многообразия $M^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ (см. [2, 3, 16, 17]; в частности, сферы или более общих поверхностей вращения с двенадцатью ненулевыми коэффициентами связности):

$$
\begin{cases}
\ddot\alpha + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\
\ddot\beta_1 + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\
\ddot\beta_2 + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\
\ddot\beta_3 + 2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_3 + 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_3 + 2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\dot\beta_2\dot\beta_3 = 0.
\end{cases}
\tag{2.3}
$$

Действительно, выбрав новые координаты Z_1, …, Z_4 в касательном пространстве в виде

$$
\begin{aligned}
&\alpha' = -Z_4, \\
&\beta_1' = Z_3 f_1(\alpha), \\
&\beta_2' = Z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \\
&\beta_3' = Z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2),
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

получаем соотношения на них в следующем виде (ср. с системой (2.2)):

$$
\begin{aligned}
Z_1' &= \left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_1 Z_4 - \left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1(\alpha) Z_1 Z_3 - \\
&\quad - \left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] f_2(\alpha) g_1(\beta_1) Z_1 Z_2, \\
Z_2' &= \left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_2 Z_4 - \left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1(\alpha) Z_2 Z_3 - \\
&\quad - \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2) Z_1^2, \\
Z_3' &= \left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_3 Z_4 - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) Z_2^2 - \\
&\quad - \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) Z_1^2, \\
Z_4' &= \Gamma^\alpha_{11} f_1^2(\alpha) Z_3^2 + \Gamma^\alpha_{22} f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) Z_2^2 + \Gamma^\alpha_{33} f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) Z_1^2;
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

при этом уравнения (2.3) почти всюду эквивалентны совокупности (2.4), (2.5), которая, прежде всего, присутствует в системе (2.2).

Далее, в системе (2.2) также присутствуют коэффициенты при параметре $b \geqslant 0$. Но они не нарушают консервативности, поскольку система (2.1), (2.2) при некоторых естественных условиях обладает полным набором (из шести) гладких первых интегралов (то, что полный набор состоит не из восьми, а из шести первых интегралов, будет показано ниже).

Следующие утверждения для систем девятого порядка доказываются аналогично соответствующим утверждениям для систем седьмого порядка.

Предложение 2.1. *Если всюду на своей области определения справедлива система равенств*

$$
\begin{cases}
2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) f_1^2(\alpha) \equiv 0, \\
2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) \equiv 0, \\
\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1^2(\alpha) + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) \equiv 0, \\
2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta) f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \equiv 0, \\
\left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1^2(\alpha) + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta) f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \equiv 0, \\
\left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta) f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \equiv 0,
\end{cases}
\tag{2.6}
$$

то система (2.1), (2.2) *имеет аналитический первый интеграл вида*

$$
\Phi_1(v; Z_4, \ldots, Z_1) = v^2(Z_1^2 + \ldots + Z_4^2) = C_1^2 = \mathrm{const}\,. \tag{2.7}
$$

На первый взгляд вопрос наличия первого интеграла достаточно простого вида (2.7) не «заслуживает» решения такой достаточно сложной системы квазилинейных уравнений (2.6) (которая содержит, вообще говоря, уравнения в частных производных). В работе будет применен подход, позволяющий с помощью решения системы (2.6) успешно находить полные наборы первых интегралов систем с диссипацией.

Можно доказать отдельную теорему существования решения $f_k(\alpha)$, $k = 1, 2, 3$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2$, $h(\beta_2)$ системы (2.6) квазилинейных уравнений для наличия аналитического первого интеграла (2.7) для системы (2.4), (2.5) уравнений геодезических (2.3). Но в дальнейшем при изучении динамических систем с диссипацией полная группа условий (2.6) нам не потребуется.

Тем не менее, в дальнейшем будем предполагать в уравнениях (2.4) выполнение условий

$$f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = f_3(\alpha) = f(\alpha), \tag{2.8}$$

при этом функции $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2$, $h(\beta_2)$ должны удовлетворять преобразованным уравнениям из (2.6):

$$\begin{cases} 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1} + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)g_1^2(\beta_1) \equiv 0, \\ 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1} + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2) \equiv 0, \\ \left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] g_1^2(\beta_1) + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2) \equiv 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Таким образом, функции $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2$, $h(\beta_2)$ пока зависят от коэффициентов связности через систему (2.9), а ограничения на функцию $f(\alpha)$ будут даны ниже.

Предложение 2.2. *Если выполнены свойства* (2.8), (2.9), *при этом справедливы равенства*

$$\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) = \Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) = \Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) = \Gamma_1(\alpha), \tag{2.10}$$

то система (2.1), (2.2) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_2(v; Z_3, Z_2, Z_1; \alpha) = v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}\,\delta(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}, \tag{2.11}$$

при этом функция $\delta(\alpha)$ должна удовлетворять равенству

$$\delta(\alpha) = A_1 f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\}, \qquad A_1 = \mathrm{const}\,. \tag{2.12}$$

Предложение 2.3. *Если выполнены условия предложения* 2.2, *а также*

$$g_1(\beta_1) = g_2(\beta_1) = g(\beta_1); \tag{2.13}$$

при этом справедливы равенства

$$\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) = \Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) = \Gamma_2(\beta_1), \tag{2.14}$$

то система (2.1), (2.2) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\begin{gathered} \Phi_3(v; Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1) = v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\,\delta(\alpha)\Psi_1(\beta_1) = C_3 = \mathrm{const}, \\ \Psi_1(\beta_1) = g(\beta_1)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)db\right\}. \end{gathered} \tag{2.15}$$

Предложение 2.4. *Если выполнены условия предложений* 2.2, 2.3 *и при этом справедливо равенство*

$$\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) = \Gamma_3(\beta_2), \tag{2.16}$$

то система (2.1), (2.2) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\begin{gathered} \Phi_4(v; Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) = v^2 Z_1\delta(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\Psi_2(\beta_2) = C_4 = \mathrm{const}, \\ \Psi_2(\beta_2) = h(\beta_2)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{20}}^{\beta_2}\Gamma_3(b)db\right\}. \end{gathered} \tag{2.17}$$

Предложение 2.5. *Пусть выполнены свойства* (2.8), (2.13) *и*

$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) = \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1) = \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2) = \Gamma_4(\alpha). \tag{2.18}$$

Тогда система (2.1), (2.2) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_0(v; Z_4; \alpha) = v^2(1 - 2bZ_4\delta(\alpha)) = C_0 = \mathrm{const}, \tag{2.19}$$

если функция $\delta(\alpha)$ *удовлетворяет равенству*

$$\delta(\beta_1) = A_2 \exp\left\{-\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1} \Gamma_4(b) f^2(b) db\right\}, \qquad A_2 = \mathrm{const}\,.$$

В частности, если выполнены свойства (2.6), (2.8), (2.10), (2.12), (2.13), (2.18), то система (2.1), (2.2) имеет гладкий первый интеграл вида (2.19).

Предложение 2.6. *Если выполнены условия предложений* 2.3, 2.4, *то система* (2.1), (2.2) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_5(\beta_2, \beta_3, C_3, C_4) = \beta_3 + \int\limits_{\beta_{20}}^{\beta_2} \frac{C_4 h(b)}{\sqrt{C_3^2 \Psi_2^2(b) - C_4^2}} db = C_5 = \mathrm{const}, \tag{2.20}$$

где, после взятия интеграла (2.20), *вместо постоянных* C_3, C_4 *можно подставить левые части равенств* (2.15), (2.17), *соответственно.*

Прямым следствием предложений 2.1–2.6 является основная теорема данного раздела.

Теорема 2.1. *Если выполнены условия предложений* 2.1–2.6, *то система* (2.1), (2.2) *обладает полным набором* (*из шести*) *гладких независимых первых интегралов вида* (2.7), (2.11), (2.15), (2.17), (2.19), (2.20).

3. Введение внешнего силового поля и унимодулярные преобразования для систем девятого порядка

Модифицируем систему (2.1), (2.2) при условиях (2.8), (2.10), (2.13), (2.14) (2.16), (2.18) при наличии двух ключевых параметров $b, b_1 \geqslant 0$, введя внешнее силовое поле. Если ввести такое поле, добавив коэффициент $F(\alpha)$ лишь в уравнение на Z_4' системы (3.1), (3.2) и даже положив при этом $b_1 = 0$, то полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность будет при дополнительном условии: $b = 0$. Расширим введение силового поля, положив $b_1 > 0$. Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения $T^*M^4\{Z_4, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ примет вид

$$v' = \Psi(\alpha, Z) v, \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} \alpha' = -Z_4 + b(Z_1^2 + \ldots + Z_4^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\tilde{f}(\alpha), \\ Z_4' = F(\alpha) + \Gamma_4 f^2(\alpha) Z_3^2 + \Gamma_4 f^2(\alpha) Z_2^2 + \Gamma_4 f^2(\alpha) Z_1^2 - Z_4 \Psi(\alpha, Z), \\ Z_3' = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_3 Z_4 - \Gamma_{22}^1(\alpha,\beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) Z_2^2 - \\ \qquad - \Gamma_{33}^1(\alpha,\beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) Z_1^2 - Z_3 \Psi(\alpha, Z), \\ Z_2' = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_2 Z_4 - \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f(\alpha) Z_2 Z_3 - \\ \qquad - \Gamma_{33}^2(\alpha,\beta) f(\alpha) g(\beta_1) h^2(\beta_2) Z_1^2 - Z_2 \Psi(\alpha, Z), \\ Z_1' = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_1 Z_4 - \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f(\alpha) Z_1 Z_3 - \\ \qquad - \left[2\Gamma_3(\beta_2) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] f(\alpha) g(\beta_1) Z_1 Z_2 - Z_1 \Psi(\alpha, Z), \\ \beta_1' = Z_3 f(\alpha), \qquad \beta_2' = Z_2 f(\alpha) g(\beta_1), \qquad \beta_3' = Z_1 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2), \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + \ldots + Z_4^2)\tilde{\delta}(\alpha) + b_1 F(\alpha)\delta(\alpha), \quad \tilde{f}(\alpha) = \frac{\mu - \delta^2(\alpha)}{\tilde{\delta}(\alpha)},$$

$\mu = \mathrm{const}$. При этом коэффициенты консервативной (внутренней) составляющей силового поля содержат параметр b, а неконсервативной составляющей внешнего поля — параметр b_1.

Силовое поле в уравнениях на v', Z_1', $\ldots$, Z_4' определяется функцией $\Psi(\alpha, Z)$. Опишем введение силового поля в виде двумерного столбца, в первой строке которого стоят соответствующие коэффициенты из функции $\Psi(\alpha, Z)$, а во второй строке — соответствующие коэффициенты из уравнения на α'. Таким образом, совместное силовое поле (в котором присутствуют три параметра b, $b_1 \geqslant 0$, $\mu \in \mathbf{R}$) будут иметь вид

$$U\begin{pmatrix} b(Z_1^2 + \ldots + Z_4^2) \\ b_1 F(\alpha) \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} -\tilde{\delta}(\alpha) & \delta(\alpha) \\ \delta(\alpha) & \tilde{f}(\alpha) \end{pmatrix},$$

где U — преобразование с определителем, равным $-\mu$, и являющимся унимодулярным преобразованием при $\mu = \pm 1$. Такое преобразование вносит в систему диссипацию (как одного знака, так и другого; см. также [18, 22, 23]).

4. Интегрирование системы девятого порядка с диссипацией

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы девятого порядка (3.1), (3.2) при выполнении свойства (2.9). Она также допускает отделение независимой подсистемы седьмого порядка.

Введем также (по аналогии с (2.9)) ограничение и на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять преобразованному первому равенству из (2.6):

$$2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_4(\alpha) f^2(\alpha) \equiv 0. \tag{4.1}$$

Для полного интегрирования системы (3.2) необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$w_4 = Z_4, \quad w_3 = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}, \quad w_2 = \frac{Z_2}{Z_1}, \quad w_1 = \frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}$$

система (3.2) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \alpha' = -Z_4 + b(w_4^2 + w_3^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\tilde{f}(\alpha), \\ w_4' = F(\alpha) + \Gamma_4(\alpha) f^2(\alpha) w_3^2 - w_4 \Psi(\alpha, w), \\ w_3' = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha}\right] w_3 w_4 - w_3 \Psi(\alpha, w), \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\begin{cases} w_2' = \pm w_3 \sqrt{1 + w_2^2} f(\alpha) g(\beta_1) \left[2\Gamma_3(\beta_2) + \dfrac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right], \\ \beta_2' = \pm \dfrac{w_2 w_3}{\sqrt{1 + w_2^2}} f(\alpha) g(\beta_1), \end{cases} \tag{4.3}$$

$$\begin{cases} w_1' = \pm w_3 \sqrt{1 + w_1^2} f(\alpha) \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right], \\ \beta_1' = \pm \dfrac{w_1 w_3}{\sqrt{1 + w_1^2}} f(\alpha), \end{cases} \tag{4.4}$$

$$\beta_3' = \pm \frac{w_3}{\sqrt{1 + w_2^2}} f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2), \tag{4.5}$$

$$\Psi(\alpha, w) = -b(w_4^2 + w_3^2)\tilde{\delta}(\alpha) + b_1 F(\alpha)\delta(\alpha), \quad \tilde{f}(\alpha) = \frac{\mu - \delta^2(\alpha)}{\tilde{\delta}(\alpha)}.$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (3.2) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (4.2), по одному — для систем (4.3) и (4.4) (после соответствующих замен независимых переменных), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (4.5) (т.е. всего пять).

Теорема 4.1. *Пусть для некоторых* $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$ *выполняются равенства*

$$\Gamma_4(\alpha) f^2(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln|\delta(\alpha)|, \quad F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{\delta^2(\alpha)}{2}. \tag{4.6}$$

Тогда система (3.1), (3.2) *при выполнении свойств* (2.9), (4.1) *обладает шестью независимыми* (*вообще говоря, трансцендентными, см.* [10, 13], *в смысле комплексного анализа*) *первыми интегралами.*

Первое равенство из (4.6) можно назвать геометрическим, а второе — энергетическим.

Доказательство. Для начала поставим в соответствие рассматриваемой подсистеме третьего порядка (4.2) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{gathered} \frac{dw_4}{d\alpha} = \frac{F(\alpha) + \Gamma_4(\alpha) f^2(\alpha) w_3^2 + b w_4 (w_4^2 + w_3^2)\tilde{\delta}(\alpha) - b_1 w_4 F(\alpha)\delta(\alpha)}{-w_4 + b(w_4^2 + w_3^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\tilde{f}(\alpha)}, \\ \frac{dw_3}{d\alpha} = \frac{\left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] w_3 w_4 + b w_3 (w_4^2 + w_3^2)\tilde{\delta}(\alpha) - b_1 w_3 F(\alpha)\delta(\alpha)}{-w_4 + b(w_4^2 + w_3^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\tilde{f}(\alpha)}. \end{gathered} \tag{4.7}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_3 = u_1 \delta(\alpha), \quad w_4 = u_2 \delta(\alpha), \tag{4.8}$$

пользуясь (4.6), приводим систему (4.7) к следующему виду:

$$\begin{gathered} \delta \frac{du_2}{d\delta} + u_2 = \frac{\lambda + b u_2 (u_1^2 + u_2^2)\delta^2 - b_1 \lambda u_2 \delta^2 + \kappa u_1^2}{-u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\delta^2 + b_1 \lambda(\mu - \delta^2)}, \\ \delta \frac{du_1}{d\delta} + u_1 = \frac{b u_1 (u_1^2 + u_2^2)\delta^2 - b_1 \lambda u_1 \delta^2 - \kappa u_1 u_2}{-u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\delta^2 + b_1 \lambda(\mu - \delta^2)}. \end{gathered} \tag{4.9}$$

В дальнейшем система (4.9) приводится к уравнению первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda - b_1 \lambda \mu u_2 + u_2^2 + \kappa u_1^2}{(1-\kappa) u_1 u_2 - b_1 \lambda \mu u_1}. \tag{4.10}$$

Уравнение (4.10) имеет вид уравнения Абеля (см. [4]). Для примера, при $\kappa = -1$ оно имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 - b_1 \lambda \mu u_2 + \lambda}{u_1} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{4.11}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_4, w_3; \alpha) = G_1\left(\frac{w_4}{\delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\delta(\alpha)}\right) = \frac{w_4^2 + w_3^2 - b_1 \lambda \mu w_4 \delta(\alpha) + \lambda \delta^2(\alpha)}{w_3 \delta(\alpha)} = C_1 = \mathrm{const}\,. \tag{4.12}$$

В общем случае первые интегралы выписываются громоздко. В частности, если $\kappa = -1$, то явный вид одного из первых интегралов только что приведен.

При помощи интеграла (4.12) получается и дополнительный первый интеграл для системы (3.2), который имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_4, w_3; \alpha) = G_2\left(\delta(\alpha), \frac{w_4}{\delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\delta(\alpha)}\right) = C_2 = \mathrm{const}\,. \tag{4.13}$$

Выражение первого интеграла (4.13) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\delta(\alpha)$. Например, при $\kappa = -1$ этот первый интеграл найдется из уравнения Бернулли

$$\begin{gathered} \frac{d\delta}{du_4} = \frac{(b_1 \lambda \mu - u_4)\delta + b\delta^3 (U^2(C_1, u_4) + u_4^2) - b_1 \lambda \delta^3}{\lambda - b_1 \lambda \mu u_4 + u_4^2 - U^2(C_1, u_4)}, \\ U(C_1, u_4) = \frac{1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(\lambda - b_1 \lambda \mu u_4 + u_4^2)}\right\}, \quad u_4 = \frac{Z_4}{\delta(\alpha)}. \end{gathered}$$

При этом после взятия этого интеграла вместо C_1 можно подставить левую часть равенства (4.11).

Первые интегралы для независимых (после замен независимых переменных) подсистем (4.3) и (4.4) будут иметь вид

$$\Theta_{2+s}(w_s;\beta_s) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\Phi_s(\beta_s)} = C_{2+s} = \text{const}, \quad s=1,2, \tag{4.14}$$

о функциях $\Psi_s(\beta_s)$ см. (2.15), (2.17). Дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (4.5), находится по аналогии с (2.20):

$$\Theta_5(\beta_2,\beta_3,C_3,C_4) = \beta_3 \pm \int\limits_{\beta_{20}}^{\beta_2} \frac{C_4 h(b)}{C_3^2\Psi_2^2(b) - C_4^2}\,db = C_5 = \text{const},$$

где, после взятия этого интеграла, вместо постоянных C_3, C_4 можно подставить соответствующие левые части равенств (4.14).

Кроме того, у системы (3.1), (3.2) существует гладкий первый интеграл (по аналогии с (2.19), «привязывающий» уравнение (2.1)), который, например, при $b=b_1$, $\mu=1$ примет вид

$$\Theta_0(v;w_4,w_3;\alpha) = v^2(1 - 2bw_4\delta(\alpha) + b^2(w_4^2+w_3^2)) = C_0 = \text{const}.$$

□

Справедлива и теорема, обратная к теореме 4.1.

Теорема 4.2. *Условия* (2.9), (4.1), (4.6) (*например, при* $\kappa=-1$) *являются необходимыми условиями существования первого интеграла* (4.12) *для системы* (3.1), (3.2).

5. Строение первых интегралов для систем девятого порядка с диссипацией

Если α — периодическая координата периода 2π, то система (3.1), (3.2) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним (см. [7,18]). При этом при $F(\alpha)\equiv 0$ она превращается в консервативную систему (2.1), (2.2). Последняя, в частности, обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (2.7), (2.11). Более того, если функция $F(\alpha)$ не равна тождественно нулю, но $b_1=0$, то система (3.1), (3.2) при втором условии из (4.6) обладает первым интегралом вида

$$\Theta_0(v;Z_4,\ldots,Z_1;\alpha) = v^2(Z_1^2+\ldots+Z_4^2+\lambda\delta^2(\alpha)) = \text{const}. \tag{5.1}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (5.1), (2.11) также является первым интегралом системы (3.1), (3.2), если функция $F(\alpha)$ не равна тождественно нулю, но $b_1=0$. Но при $b_1>0$ каждая из функций

$$\Theta_{b_1}(v;Z_4,\ldots,Z_1;\alpha) = v^2(Z_1^2+\ldots+Z_4^2 - b_1\lambda\mu Z_4\delta(\alpha)+\lambda\delta^2(\alpha)) \tag{5.2}$$

и (2.11) по отдельности не является первым интегралом системы (3.1), (3.2), однако их отношение является первым интегралом (4.12) системы (3.1), (3.2) (при $\kappa=-1$) при любом $b_1>0$.

Вообще же, как и указывалось ранее, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств.

6. Заключение для систем девятого порядка

Выделим существенный случай для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на четырехмерной сфере, и функции $\delta(\alpha)$:

$$f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \delta(\alpha)=\sin\alpha. \tag{6.1}$$

Случай (6.1) формирует класс систем (3.1), (3.2) при $\mu=1$, соответствующих движению пятимерного динамически симметричного твердого тела на нулевых уровнях циклических интегралов в неконсервативном поле сил (см. [18,21]):

$$v' = v\Psi(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z), \tag{6.2}$$

$$\alpha' = -Z_4 + b\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\sin\alpha + bF(\alpha)\cos\alpha, \tag{6.3}$$

$$Z_4' = F(\alpha) - \left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_4\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha - bZ_4F(\alpha)\sin\alpha, \tag{6.4}$$

$$Z_3' = Z_3Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \left(Z_1^2 + Z_2^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + bZ_3\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha - bZ_3F(\alpha)\sin\alpha, \tag{6.5}$$

$$Z_2' = Z_2Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \tag{6.6}$$

$$+bZ_2\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha - bZ_2F(\alpha)\sin\alpha, \tag{6.7}$$

$$Z_1' = Z_1Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \tag{6.8}$$

$$+bZ_1\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha - bZ_1F(\alpha)\sin\alpha, \tag{6.9}$$

$$\beta_1' = Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{6.10}$$

$$\beta_2' = -Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{6.11}$$

$$\beta_3' = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}, \tag{6.12}$$

где

$$\Psi(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z) = -b\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha + bF(\alpha)\sin\alpha.$$

В частности, при $\delta(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ рассматриваемая система описывает геодезический поток на четырехмерной сфере.

Итак, система (6.2)–(6.12) может быть рассмотрена на своем фазовом девятимерном многообразии

$$W_1 = \mathbf{R}_+^1\{v\} \times T_*\mathbf{S}^4\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}, \tag{6.13}$$

т.е. на прямом произведении числового луча на касательное расслоение к четырехмерной сфере.

Видно, что в системе (6.2)–(6.12) девятого порядка образовалась независимая система (6.3)–(6.12) восьмого порядка на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^4\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ четырехмерной сферы $\mathbf{S}^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$. При этом в независимой системе (6.3)–(6.12) восьмого порядка образовалась еще одна независимая система (6.3)–(6.11) седьмого порядка на своем семимерном многообразии.

В случае (6.1), если $\delta(\alpha) = F(\alpha)/\cos\alpha$, то система описывает движение пятимерного твердого тела в силовом поле $F(\alpha)$ под действием следящей силы (см. [8, 9, 18–20]). В частности, если $F(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha$, $\delta(\alpha) = \sin\alpha$, то система эквивалентна обобщенному (сферическому) пятимерному маятнику, помещенному в некоторое неконсервативное поле, и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций (см. [1, 18]):

$$\begin{gathered}
\ddot\xi + b_*\dot\xi\cos\xi + \sin\xi\cos\xi - \left[\dot\eta_1^{\,2} + \dot\eta_2^{\,2}\sin^2\eta_1 + \dot\eta_3^{\,2}\sin^2\eta_1\sin^2\eta_2\right]\frac{\sin\xi}{\cos\xi} = 0,\\
\ddot\eta_1 + b_*\dot\eta_1\cos\xi + \dot\xi\dot\eta_1\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} - (\dot\eta_2^{\,2} + \dot\eta_3^{\,2}\sin^2\eta_2)\sin\eta_1\cos\eta_1 = 0,\\
\ddot\eta_2 + b_*\dot\eta_2\cos\xi + \dot\xi\dot\eta_2\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\dot\eta_1\dot\eta_2\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} - \dot\eta_3^{\,2}\sin\eta_2\cos\eta_2 = 0,\\
\ddot\eta_3 + b_*\dot\eta_3\cos\xi + \dot\xi\dot\eta_3\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\dot\eta_1\dot\eta_3\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + 2\dot\eta_2\dot\eta_3\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2} = 0,\ b_* > 0.
\end{gathered} \tag{6.14}$$

Данная система описывает закрепленный пятимерный маятник, помещенный в поток набегающей среды при отсутствии зависимости момента сил от угловой скорости, т.е. механическую систему в неконсервативном поле сил. Вообще говоря, порядок такой системы должен быть равен 8, но фазовая переменная η_3 является циклической, что и приводит к расслоению фазового пространства и понижению порядка. Ее фазовым пространством является касательное расслоение $T\mathbf{S}^3\{\dot{\xi}, \dot{\eta_1}, \dot{\eta_2}, \dot{\eta_3}, \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3\}$ к четырехмерной сфере $\mathbf{S}^4\{\xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3\}$; при этом уравнение, переводящее систему (6.14) в систему на касательном расслоении к трехмерной сфере $\dot{\eta_3} \equiv 0$ и уравнения больших кругов $\dot{\eta_1} \equiv 0$, $\dot{\eta_2} \equiv 0$, $\dot{\eta_3} \equiv 0$ задают семейства интегральных многообразий.

Справедливо также важное замечание, сделанное ранее для систем меньшего порядка (см. [24, 25]). Если функция $\delta(\alpha)$ не является периодической, то почти всегда рассматриваемая система является системой с переменной диссипацией с ненулевым средним (т.е. она является «собственно» диссипативной). Тем не менее и в этом случае (благодаря теоремам 4.1 и 4.2) можно получить явный вид трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Последнее также является новым нетривиальным случаем интегрируемости многомерных диссипативных систем в явном виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2002. — *383*, № 5. — С. 635–637.
2. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
3. *Дубровин Б. А., Новиков С. П.* О скобках Пуассона гидродинамического типа// Докл. АН СССР. — 1984. — *219*, № 2. — С. 228–237.
4. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971.
5. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — *38*, № 1. — С. 3–67.
6. *Козлов В. В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — *79*, № 3. — С. 307–316.
7. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 4. — С. 3–229.
8. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// в кн.: Полн. собр. соч.. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — Т. 1. — С. 133–135.
9. *Чаплыгин С. А.* Избранные труды. — М.: Наука, 1976.
10. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
11. *Шамолин М. В.* Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента// Прикл. мат. мех. — 1993. — *57*, № 4. — С. 40–49.
12. *Шамолин М. В.* Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1996. — *4*. — С. 57–69.
13. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209–210.
14. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 5. — С. 169–170.
15. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — *14*, № 3. — С. 3–237.
16. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — *437*, № 2. — С. 190–193.
17. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *442*, № 4. — С. 479–481.
18. *Шамолин М. В.* Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Тематич. обзоры. — 2013. — *125*. — С. 5–254.
19. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — *20*, № 4. — С. 3–231.
20. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости систем с диссипацией на касательных расслоениях к двумерной и трехмерной сферам// Докл. РАН. — 2016. — *471*, № 5. — С. 547–551.

21. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — *474*, № 2. — С. 177–181.
22. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *482*, № 5. — С. 527–533.
23. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *479*, № 3. — С. 270–276.
24. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *485*, № 5. — С. 583–587.
25. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *487*, № 4. — С. 381–386.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru