УДК 531.01:531.552

СЕМЕЙСТВА ПОРТРЕТОВ НЕКОТОРЫХ МАЯТНИКОВЫХ СИСТЕМ В ДИНАМИКЕ

© 2020

М. В. Шамолин

Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова,
Мичуринский просп., 1, г. Москва 119192, Россия

E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 14.02.2020 г.; после доработки 28.04.2020 г.;
принята к публикации 10.09.2020 г.

В динамике твёрдого тела в неконсервативном поле, теории колебаний, теоретической физике возникают так называемые системы маятникового типа. В ряде работ автора уже изучались такие системы. В данной работе мы приводим методы анализа, позволяющие обобщить предыдущие результаты автора. При этом затрагиваются некоторые качественные вопросы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, от решения которых зависит исследование ряда динамических систем. В результате исследования систем более общего вида показано, что более общие системы обладают известным ранее семейством неэквивалентных фазовых портретов, также рассматривается аспект интегрируемости.

Ключевые слова: динамическая система маятникового типа, качественный и численный анализ.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.411

ВВЕДЕНИЕ

Анри Пуанкаре предложил метод (хотя и не совсем общий) отыскания замкнутых орбит системы гладких дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = X_1(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = X_2(x_1, x_2).$$

Для этого ему потребовалось ввести понятие топографических систем [1].

В его трудах впервые начала рассматриваться алгебраическая функция $F(x_1, x_2)$, которая:

1) достаточно гладкая и ограниченная в любой ограниченной области, стремящаяся к бесконечности, когда одна из её переменных стремится к бесконечности;

2) равна нулю при $x_1 = x_2 = 0$ и положительна в остальных точках;

3) имеет первые производные, обращающиеся в нуль лишь при $x_1 = x_2 = 0$ (по крайней мере, вблизи начала координат);

4) такова, что при $x_1 = x_2 = 0$ выполняется неравенство

$$\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2}\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} - \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} - \frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_1}\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\frac{\partial X_2}{\partial x_2} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2}\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right)\left(\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}\right) < 0;$$

последнее неравенство означает, что кривая контактов имеет в начале координат изолированную особую точку (о кривых контактов см. ниже);

5) такова, что кривая, заданная уравнением $X_1\dfrac{\partial F}{\partial x_1}+X_2\dfrac{\partial F}{\partial x_2}=0$, не уходит на бесконечность.

При выполнении условий 1–5 уравнение $F(x_1,x_2)=\mathrm{const}$ дает так называемую топографическую систему вложенных друг в друга кривых, имеющую вершину в начале.

В данной работе обсуждается применение методов топографических систем Пуанкаре и более общих систем сравнения при исследовании некоторых классов систем с диссипацией. Но сначала кратко напомним суть данных методов (подобно [1, 2], см. также [3–6]).

1. ЕСТЕСТВЕННЫЕ ТОПОГРАФИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ПУАНКАРЕ В СИСТЕМАХ С ДИССИПАЦИЕЙ

Часть текста работы заимствован из предыдущих работ автора. Рассмотрим динамические системы на двумерной плоскости, хотя все сказанное можно перенести и на гладкие ориентированные двумерные многообразия.

Для исследования замкнутых траекторий динамических систем, возникающих в различных приложениях, применим (а иногда и видоизменим) теорию топографических систем Пуанкаре (ТСП) [1, 7, 8].

1.1. Топографические системы Пуанкаре

Как известно, Пуанкаре предложил метод (хотя и не совсем общий) отыскания замкнутых орбит системы гладких дифференциальных уравнений на плоскости. Для этого ему потребовалось ввести понятие топографических систем [1].

Не все аналитические условия, предложенные Пуанкаре, нам понадобятся. Мы будем учитывать лишь геометрию расположения кривых контактов, траекторий исследуемой динамической системы и кривых (ТСП).

1.2. Исследуемые системы

1. Рассмотрим системы на двумерном цилиндре вида

$$\begin{aligned}\dot\alpha &= -\Omega + A_1\delta(\alpha),\\ \dot\Omega &= F(\alpha),\quad A_1\geqslant 0,\end{aligned}\tag{1}$$

где $\delta(\alpha)$ — достаточно гладкая 2π-периодическая функция, F — достаточно гладкая нечётная π-периодическая функция, удовлетворяющая условиям: $F(\alpha)>0$ при $\alpha\in(0,\pi/2)$, $\dfrac{dF(0)}{d\alpha}>0$, $\dfrac{dF(\pi/2)}{d\alpha}<0$ (класс функций $\{F\}=\Phi$). Таким образом,

$$F\in\Phi.\tag{2}$$

В частности, аналитическая функция

$$F=F_0(\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha\in\Phi\tag{3}$$

также является типичным представителем класса функций Φ (соответствует так называемому случаю Чаплыгина [9–11] в динамике).

Систему (1) при $A_1=0$ будем называть системой ($1'$). Для системы ($1'$) начало координат является особой точкой, имеющей топологический тип центра. Таким образом, существует семейство периодических траекторий, подходящих как угодно близко к точкам

$$(-\pi/2,0),\quad (\pi/2,0).\tag{4}$$

В частности, ранее, в динамике твёрдого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой [12–14], система (1) принимала более частный вид:

$$\dot{\alpha} = -\Omega + A_1 \frac{F(\alpha)}{\cos\alpha}, \quad \dot{\Omega} = A_2 F(\alpha), \quad A_1,\, A_2 \geqslant 0, \tag{5}$$

где выполнено свойство (2).

2. Рассмотрим системы на двумерном цилиндре вида

$$\begin{gathered} \dot{\alpha} = -\omega + b\omega^2 \delta_1(\alpha) + b_1 F(\alpha) \tilde{f}_1(\alpha), \\ \dot{\omega} = F(\alpha) - \omega \Psi(\alpha, \omega), \quad b,\, b_1 \geqslant 0, \end{gathered} \tag{6}$$

$$\Psi(\alpha,\omega) = -b\omega^2 \tilde{\delta}_1(\alpha) + b_1 F(\alpha)\delta_1(\alpha), \quad \tilde{\delta}_1(\alpha) = \frac{d\delta_1(\alpha)}{d\alpha}, \quad \tilde{f}_1(\alpha) = \frac{\mu_1 - \delta_1^2(\alpha)}{\tilde{\delta}_1(\alpha)}, \quad \mu_1 = \mathrm{const},$$

где $\delta_1(\alpha)$ — достаточно гладкая 2π-периодическая функция и выполнено свойство (2).

Систему (6) при $b = b_1 = 0$ будем называть системой ($6'$). Для системы ($6'$) начало координат является особой точкой, имеющей топологический тип центра. Таким образом, существует семейство периодических траекторий, подходящих как угодно близко к точкам (4).

В частности, ранее, в динамике твёрдого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой [2, 15, 16], система (6) принимает более частный вид:

$$\begin{gathered} \dot{\alpha} = -\omega + \frac{\sigma}{I} F(\alpha)\cos\alpha + \sigma\omega^2 \sin\alpha, \\ \dot{\omega} = \frac{1}{I} F(\alpha) - \omega\Psi(\alpha,\omega), \quad \sigma,\, I > 0, \end{gathered} \tag{7}$$

$$\Psi(\alpha,\omega) = \frac{\sigma}{I} F(\alpha)\sin\alpha - \sigma\omega^2\cos\alpha,$$

где выполнено свойство (2).

Система же (6) является значительным обобщением системы (7) в смысле введения в ней диссипации с помощью унимодулярного преобразования [17, 18].

Действительно, система (6) зависит от двух функций и ряда других параметров. О переходе же от системы более частного вида (7) к системе более общего вида с помощью унимодулярного преобразования см. разд. 4.

3. Рассмотрим системы на двумерном цилиндре вида

$$\begin{gathered} \dot{\alpha} = -\omega + b\omega^2 \delta_2(\alpha) + b_1 F(\alpha) \tilde{f}_2(\alpha) + b_2 s(\alpha)\delta_2(\alpha), \\ \dot{\omega} = F(\alpha) - \omega \Psi(\alpha, \omega), \quad b,\, b_1,\, b_2 \geqslant 0, \end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered} \Psi(\alpha,\omega) = -b\omega^2 \tilde{\delta}_2(\alpha) + b_1 F(\alpha)\delta_2(\alpha) - b_2 s(\alpha)\tilde{\delta}_2(\alpha), \\ \tilde{\delta}_2(\alpha) = \frac{d\delta_2(\alpha)}{d\alpha}, \quad \tilde{f}_2(\alpha) = \frac{\mu_2 - \delta_2^2(\alpha)}{\tilde{\delta}_2(\alpha)}, \quad \mu_2 = \mathrm{const}, \end{gathered}$$

где $\delta_2(\alpha)$ — достаточно гладкая 2π-периодическая функция, выполнено свойство (2), а также выполнено свойство

$$s \in \Sigma. \tag{9}$$

Вводимый класс Σ динамических функций достаточно широк: он состоит из функций гладких, 2π-периодических, чётных, удовлетворяющих следующим условиям: $s(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi/2)$, $s(\alpha) < 0$ при $\alpha \in (\pi/2, \pi)$, причём $s(0) > 0$, $\dfrac{ds(\pi/2)}{d\alpha} < 0$. Функция s меняет знак при замене α на $\alpha + \pi$ (класс функций $\{s\} = \Sigma$).

В частности, аналитическая функция

$$s(\alpha) = s_0(\alpha) = \cos\alpha \in \Sigma \tag{10}$$

служит типичным представителем описанного класса и соответствует функции воздействия среды, полученной в одной из своих работ С. А. Чаплыгиным [10, 11, 19] при исследовании плоскопараллельного обтекания плоской пластины бесконечной длины однородным потоком среды.

Систему (8) при $b = b_1 = b_2 = 0$ будем называть системой ($8'$). Для системы ($8'$) начало координат является особой точкой, имеющей топологический тип центра. Таким образом, существует семейство периодических траекторий, подходящих как угодно близко к точкам (4).

В частности, ранее, в динамике твёрдого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой [20–22], система (8) принимала более частный вид:

$$\begin{aligned} \dot\alpha &= -\omega + \frac{\sigma}{I}F(\alpha)\cos\alpha + \sigma\omega^2\sin\alpha + \frac{s(\alpha)}{m}\sin\alpha, \\ \dot\omega &= \frac{1}{I}F(\alpha) - \omega\Psi(\alpha,\omega), \quad \sigma,\, I,\, m > 0, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\Psi(\alpha,\omega) = -\sigma\omega^2\cos\alpha + \frac{\sigma}{I}F(\alpha)\sin\alpha - \frac{s(\alpha)}{m}\cos\alpha,$$

где выполнены свойства (2), (9).

Система (8) является значительным обобщением системы (11) в смысле введения в ней диссипации с помощью двух унимодулярных преобразований [17, 18].

Действительно, система (8) зависит от трёх функций и ряда других параметров. Переход от системы более частного вида (11) к системе более общего вида (8) с помощью двух унимодулярных преобразований происходит аналогично переходу от системы (7) к системе (6).

Изучаемые в работе системы можно рассматривать или на фазовом цилиндре $\mathbb{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\omega\,(\text{или}\,\Omega)\}$, или на плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\,(\text{или}\,\Omega)\}$.

Если не будет дополнительно оговорено, можно считать, что выполнены условия (2), (9). На функции δ_1, δ_2 и их сочетания будут введены дополнительные ограничения.

1.3. Более общее понятие ТСП

Под ТСП будем понимать систему вложенных друг в друга замкнутых кривых, полученных с помощью поверхностей уровня некоторой неотрицательной функции, которая равна нулю лишь в точке, к которой сходятся полученные вложенные замкнутые кривые. С помощью такой системы можно успешно «ловить» замкнутые траектории исследуемой динамической системы [2].

Можно определить ТСП более корректно, но это нам не потребуется. Более того, нас интересуют лишь геометрические свойства взаимного расположения кривых ТСП и фазовых кривых исследуемого поля.

1.4. Характеристические функции и кривые контактов векторных полей

С понятием топографической системы Пуанкаре тесно связано понятие характеристической функции двух полей на плоскости. Последняя функция определяет кососимметрическую форму на плоскости (см. также [1, 8]).

Действительно, если $F(x_1, x_2) = \text{const}$ — семейство замкнутых кривых, то система, имеющая явный вид гамильтоновой:

$$\dot{x_1} = -\frac{\partial F}{\partial x_2}, \quad \dot{x_2} = \frac{\partial F}{\partial x_1},$$

задаёт векторное поле, касательное к семейству кривых ТСП. Тогда последнее неравенство эквивалентно неравенству $X_1Y_2 - X_2Y_1 \leqslant (\geqslant)\, 0$, в котором

$$Y_1 = -\frac{\partial F}{\partial x_2}, \quad Y_2 = \frac{\partial F}{\partial x_1}$$

— векторное поле системы, оно касается кривых ТСП.

Рассмотрим две системы уравнений на плоскости. Эти уравнения задаются гладкими векторными полями $X = \{X_1, X_2\}$ и $Y = \{Y_1, Y_2\}$ в некоторых координатах $x = (x_1, x_2)$. Естественно рассмотреть функцию $\chi = \chi(X, Y) = X_1Y_2 - X_2Y_1$, которая отвечает за знак синуса угла между полями X и Y. Очевидно $\chi(X, Y) = 0$ там и только там, где поля X и Y касаются.

Функция χ удовлетворяет следующим свойствам:

$$\chi(X, Y) = -\chi(Y, X), \quad \chi(\lambda X, Y) = \lambda\chi(X, Y)$$

для любой функции λ.

Определение 1. Функцию χ мы назовём характеристической функцией двух векторных полей, а уравнение $\chi(X, Y) = 0$ уравнением кривой контактов для полей X и Y.

Для дальнейшего анализа введём обозначения полос:

$$\Pi = \{(\alpha, \Omega) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi/2 < \alpha < \pi/2\}, \quad \Pi' = \{(\alpha, \Omega) \in \mathbb{R}^2 \mid \pi/2 < \alpha < 3\pi/2\}.$$

В применение метода ТСП к рассматриваемым динамическим системам, рассмотрим более общие системы вида (1) в полосе Π. Справедливо несложное утверждение.

Лемма 1. *Пусть $A_1 \neq 0$. Если выполнено неравенство $F(\alpha)\delta(\alpha) > 0$ (< 0) почти всюду в полосе Π, то у системы вида* (1) *не существует замкнутой кривой из траекторий в полосе Π.*

Доказательство аналогично [2].

Следствие 1. *Если $F \in \Phi$, $\delta \in Y$, то в полосе Π (впрочем, как и в полосе Π') не существует замкнутой характеристики системы* (1).

Вводимый класс Y динамических функций достаточно широк, он состоит из функций достаточно гладких, 2π-периодических, нечётных, удовлетворяющих следующим условиям: $\delta(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi)$, причём $\dfrac{d\delta(0)}{d\alpha} > 0$, $\dfrac{d\delta(\pi)}{d\alpha} < 0$. Функция δ меняет знак при замене α на $\alpha + \pi$ (класс функций $\{\delta\} = Y$). Таким образом,

$$\delta \in Y. \tag{12}$$

В частности, аналитическая функция

$$\delta(\alpha) = \delta_0(\alpha) = \sin\alpha \in Y \tag{13}$$

служит типичным представителем описанного класса.

Рассмотрим далее более общую систему (6) в полосе Π. Аналогично лемме 1 доказывается следующая

Лемма 2. *Если выполнены неравенства $\tilde{\delta}_1(\alpha)$, $\tilde{f}_1(\alpha) > 0$ (< 0) почти всюду в полосе Π, то у системы вида* (6) *в полосе Π при $b = b_1 > 0$ не существует замкнутой кривой из траекторий.*

Следствие 2. *Если $F \in \Phi$, $\tilde{\delta}_1, \tilde{f}_1 \in \Sigma$, то в полосе Π (впрочем, как и в полосе Π') не существует замкнутой характеристики системы* (6).

Теперь рассмотрим более общую систему (8) в полосе Π. Аналогично леммам 1, 2 доказывается следующая

Лемма 3. *Если выполнены неравенства $\tilde{\delta}_2(\alpha)$, $\tilde{f}_2(\alpha)$, $F(\alpha)\delta_2(\alpha) > 0$ (< 0) почти всюду в полосе Π, то у системы вида* (8) *в полосе Π при $b = b_1, b_2 > 0$ не существует замкнутой кривой из траекторий.*

Доказательство. Рассмотрим систему (6′) (см. лемму 2). Для неё по-прежнему начало координат имеет топологический тип центра, обладающий семейством замкнутых траекторий, продолжающихся до точек $(-\pi/2, 0)$, $(\pi/2, 0)$. Характеристическая функция, отвечающая системам (8) и (6′), при $b = b_1$ равна

$$b\{F^2(\alpha)\tilde{f}_2(\alpha) + \omega^4\tilde{\delta}_2(\alpha)\} + b_2\{F(\alpha)s(\alpha)\delta_2(\alpha) + \omega^2 s(\alpha)\tilde{\delta}_2(\alpha)\}.$$

Очевидно, что почти всюду в полосе Π характеристическая функция положительна. □

Следствие 3. *Если $F \in \Phi$, $s, \tilde{\delta}_2, \tilde{f}_2, \in \Sigma$, $\delta_2 \in Y$, то в полосе Π не существует замкнутой характеристики системы* (8).

Замечание 1. Как показано [8,16], в полосе Π' у системы вида (8) возможны при некоторых условиях простые и сложные предельные циклы.

Рассмотрим более общую систему (8) в области $O' = \{\Pi_{(0,\pi)} \cap \{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2 \mid \omega > 0\}\}$. Если $s(\pi/2) = F(\pi/2) = \tilde{\delta}_2(\pi/2) = 0$, $\delta_2(\pi/2) \neq 0$, то при $b > 0$ существует особая точка

$$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{b\delta_2(\pi/2)}\right). \tag{14}$$

Здесь $\Pi_{(0,\pi)} = \{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \alpha < \pi\}$.

Аналогично леммам 1–3 доказывается следующая

Лемма 4. *Рассмотрим систему вида* (8) *при $b, b_1, b_2 > 0$ в области O'. Пусть для простоты $F \in \Phi$, $s, \tilde{\delta}_2, \tilde{f}_2 \in \Sigma$, $\delta_2 \in Y$. Тогда вокруг точки покоя* (14) *в области O' не существует замкнутой кривой из траекторий, если неравенство*

$$\omega^2\frac{\tilde{\delta}_2(\alpha)}{s(\alpha)} - b_1\frac{F(\alpha)}{s(\alpha)}\omega + \frac{F(\alpha)}{s(\alpha)}\delta_2(\alpha) > 0 \tag{15}$$

не выполнено в области O' только при $\alpha = \pi/2$.

Доказательство. В области O' рассмотрим систему (8). Нетрудно показать, что, поскольку $F \in \Phi$, $\tilde{\delta}_2, \tilde{f}_2 \in \Sigma$, $\delta_2 \in Y$, то точка покоя (14) для системы (6) имеет топологический тип центра [18, 23, 24]. Существует семейство замкнутых траекторий, окружающее точку (14). Это семейство может уходить на бесконечность. Характеристическая функция, отвечающая системам (6) и (8), равна

$$b_2 s^2(\alpha)\left\{\omega^2\frac{\tilde{\delta}_2(\alpha)}{s(\alpha)} - b_1\frac{F(\alpha)}{s(\alpha)}\omega + \frac{F(\alpha)}{s(\alpha)}\delta_2(\alpha)\right\}.$$

Последняя величина знакоопределена, поскольку не выполнено неравенство (15) лишь при $\alpha = \pi/2$. Поля систем (6) и (8) в области O' касаются лишь на прямой $\{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha = \pi/2\}$.

При этом необходимо заметить, что коэффициенты квадратного относительно ω неравенства (15) удовлетворяют следующим свойствам: $F/s \in Y$, $\tilde{\delta}_2/s > 0$. Остаётся сослаться на методы доказательств лемм 1–3. $\square$

Вообще говоря, при исследовании системы (8), в зависимости от области, используется одна из систем вида (6) или (6′).

2. КРИВЫЕ КОНТАКТОВ И СИСТЕМЫ СРАВНЕНИЯ

Метод ТСП, о котором говорилось в [1, 21], является частным случаем метода исследования с помощью систем сравнения.

Рассмотрим две системы уравнений на плоскости и характеристическую функцию определяющих их векторных полей, которая, как указывалось, отвечает за знак синуса угла между векторными полями данных систем. Зная принцип разбиения на траектории одной из них, можно провести анализ устройства фазовой плоскости другой системы. В частности, ТСП позволяет, к примеру, исследовать вопрос существования предельных циклов [17, 25, 26]. Таким образом, основной упор делается на вычисление угла между двумя полями рассматриваемых систем в одной и той же области фазовой поверхности.

Вычислять характеристическую функцию можно для любых двух векторных полей на плоскости. В этой связи назовём системой сравнения для данной системы ту систему, качественное расположение траекторий которой полностью известно.

Несложно доказывается следующее утверждение.

Предложение 1. *Рассмотрим системы вида* (6) *и* (8) *на плоскости. Система* (6) *является системой сравнения для системы* (8) *следующим образом: почти всюду угол от вектора одного поля до вектора другого поля лежит в пределах от* 0 *до* π *(с учётом направления), и лишь на множестве нулевой меры этот угол равен нулю, если выполнены все условия леммы 4.*

Замечание 2. У системы (8) не существует замкнутых кривых из траекторий, огибающих фазовый цилиндр, если выполнены все условия предложения 2.1.

Доказательство проводится аналогично [2].

Предложение 2. *Рассмотрим системы* (8) *и* (6′) *во всей плоскости. В данном случае система* (6′) *— это система* (6) *при* $b = b_1 = 0$. *Система* (6′) *при* $b = b_1$ *является системой сравнения для системы* (8) *следующим образом: в полосе* Π *почти всюду угол от вектора одного поля до вектора другого поля лежит в пределах от* 0 *до* π *(с учётом направления), и лишь на множестве нулевой меры этот угол равен нулю, а в полосе* Π' *при условии, что*

$$b_2 \frac{s(\alpha)}{\tilde{f}_2(\alpha)} \geqslant b \frac{F(\alpha)}{\delta_2(\alpha)} \quad \text{для любого} \quad \alpha \in (0, \pi/2),$$

существует кривая контактов рассматриваемых двух полей, которая является топологической окружностью.

Доказательство. Перенесём начало координат в точку $(\pi, 0)$ и перепишем уравнение кривой контактов в виде

$$b\tilde{\delta}_2(\alpha)\left\{F^2(\alpha)\frac{\tilde{f}_2(\alpha)}{\tilde{\delta}_2(\alpha)} + \omega^4\right\} = b_2 F(\alpha)s(\alpha)\delta_2(\alpha) + b_2\omega^2 s(\alpha)\tilde{\delta}_2(\alpha). \tag{16}$$

Тогда уравнение (16) кривой контактов, которую назовём нетривиальной (НКК), можно разрешить относительно ω^2:

$$2b\omega^2 = b_2 s(\alpha) \pm \sqrt{b_2^2 s^2(\alpha) + 4bF(\alpha)\delta_2(\alpha)\left\{b_2\frac{s(\alpha)}{\tilde{\delta}_2(\alpha)} - b\frac{F(\alpha)}{\delta_2(\alpha)}\frac{\tilde{f}_2(\alpha)}{\tilde{\delta}_2(\alpha)}\right\}}. \tag{17}$$

В полосе Π уравнение (17), взятое со знаком минус, задаёт лишь точку $(0,0)$, а взятое со знаком плюс — точку $(0,0)$ и НКК.

НКК симметрична относительно обеих осей координат (после переноса из полосы Π' в полосу Π), пересекает обе оси под прямым углом и только два раза (по теореме о неявной функции). Тем самым предложение доказано. $\square$

3. ИЗВЕСТНОЕ РАНЕЕ СЕМЕЙСТВО ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТОВ, НО ДЛЯ СИСТЕМЫ (8) БОЛЕЕ ОБЩЕГО ВИДА

Будем изучать те динамические системы вида (8), для которых выполнены условия леммы 4. Более того, мы будем для простоты предполагать, что выполнено неравенство

$$b_1 < 2\sqrt{\tilde{\delta}_2(\alpha)\delta_2(\alpha)/F(\alpha)} \tag{18}$$

для любых $F \in \Phi$, $\tilde{\delta}_2 \in \Sigma$, $\delta_2 \in Y$ и любого α.

Для проведения классификации фазовых портретов системы (8) на плоскости или цилиндре необходимо ответить на ряд вопросов качественного характера. Подобно анализу системы (11) более частного вида [2], для системы (8) более общего вида можно доказать, что у них также существуют и единственны траектории, имеющих в качестве α- и ω-предельных множеств бесконечно удалённые точки; α- и ω-предельными множествами их являются бесконечно удалённые точки $(\pi k, \pm\infty)$, $k \in \mathbb{Z}$. И только эти точки обладают указанным свойством, у системы (8) более общего вида при указанных предположениях отсутствуют замкнутые фазовые характеристики, охватывающие фазовый цилиндр и стягиваемые по цилиндру в точку (ср. с [27–29]).

Предыдущие леммы и предложения подготовили достаточный материал для формулировки основного результата по фазовым портретам. Его доказательство теперь технически аналогично доказательству такого же результата для систем частного вида (11).

Рассмотрим вопрос о поведении сепаратрис, выходящих из точек $(-\pi/2, 0)$ в полосу Π и из $(\pi/2, 0)$ в полосу Π'. Результат, касающийся поведения этих сепаратрис, распространяется для динамических систем в той части области параметров, в которой положения равновесия существуют только при $\alpha = 0 \mod \pi/2$ (в частности, в области параметров (18)). Для этого дадим определение индексу сепаратрисного поведения (ИСП).

Определение 2. ИСП [2] (будем обозначать его isp) называется пара $\mathbf{k} = (\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$, где $\mathbf{k}_1 \in \mathbb{N}_0 \cup \{l + 1/4,\ l \in \mathbb{N}_0\}$. При этом значение $\mathbf{k}_2$ выбирается неоднозначно и может быть равно

$$\mathbf{k}_2 = \begin{cases} \mathbf{k}_1 - 1/2, & \text{если} \quad \mathbf{k}_1 \in \mathbb{N}, \\ \mathbf{k}_1 + 1/2, & \text{если} \quad \mathbf{k}_1 \in \mathbb{N}_0, \\ \mathbf{k}_1 - 1/4, & \text{если} \quad \mathbf{k}_1 \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

и $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_1 + 1/4$, если $\mathbf{k}_1 \notin \mathbb{N}_0$. Здесь и далее $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. По определению isp $= \mathbf{k} = (\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$, если сепаратриса, выходящая из точки $(-\pi/2, 0)$ в полосу Π, имеет в качестве ω-предельного множества точку, отстоящую от точки $(-\pi/2, 0)$ на $2\pi\mathbf{k}_1$ по оси α, а сепаратриса, выходящая из точки $(\pi/2, 0)$ в полосу Π', имеет в качестве ω-предельного множества точку, отстоящую от точки $(\pi/2, 0)$ на $2\pi\mathbf{k}_2$ по оси α.

Последнее определение опирается на тот факт, что сепаратрисы, выходящие из точек $(\pi/2 + 2\pi l, 0)$, $l \in \mathbb{Z}$, лежат в области, частью границы которой являются сепаратрисы, выходящие из точек $(-\pi/2 + 2\pi l, 0)$, для каждого фиксированного $l \in \mathbb{Z}$.

Теорема 1. *Определение 2 корректно, т. е. для любого* $\mathrm{isp} = \boldsymbol{k}$ *из области определения возможно соответствующее поведение рассматриваемых сепаратрис.*

В силу теоремы 1, можно провести полную классификацию фазовых портретов системы (8), когда её параметры пробегают область (18). Таких неэквивалентных портретов бесконечно много.

В качестве следствия рассмотрим систему сравнения ($6'$) для системы (6). Она описывает консервативную систему — физический маятник на плоскости. Тогда среди систем вида (8), достаточно мало отличающихся от ($6'$), существуют системы с любым из описанных выше типов фазовых портретов. Другими словами, любое достаточно малое возмущение, дающее систему вида (8), бесконечно много раз перестраивает глобальный топологический тип фазового портрета физического маятника.

Полученное семейство известно для систем более частного вида (11) (см. [2]). В области параметров (18) оно остаётся тем же и для систем более общего вида (8), зависящего от трёх функций и ряда комбинаций новых параметров.

Некоторые из фазовых портретов (индекс isp пробегает десять первых значений $(0, 1/2)$, $(1/4, 1/2)$, $(1, 1/2)$, $(1, 3/4)$, $(1, 3/2)$, $(5/4, 3/2)$, $(2, 3/2)$, $(2, 7/4)$, $(2, 5/2)$, $(9/4, 5/2)$) показаны, например, в [2].

Дальнейшие возможные значения индекса isp таковы: $(3, 5/2)$, $(3, 11/4)$, $(3, 7/2)$ и т. д.

4. ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ СИСТЕМЫ БОЛЕЕ ОБЩЕГО ВИДА (6)

Об интегрируемости системы более частного вида (7) см. [2].

Рассмотрим систему более общего вида (6) при наличии двух ключевых параметров $b_0, b_1 \geqslant 0$, где введено внешнее силовое поле через унимодулярное преобразование.

Действительно, если ввести такое поле, добавив коэффициент $F(\alpha)$ в уравнение на $\dot{\omega}$ системы (6) и даже положив при этом $b_1 = 0$, то полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность будет при дополнительном условии: $b = 0$. Но мы расширим введение силового поля, положив $b_1 > 0$. Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения $T^*M^1\{\omega; \alpha\}$ примет вид (6). При этом коэффициенты консервативной составляющей силового поля содержат параметр b, а неконсервативной составляющей внешнего поля — параметр b_1.

Силовое поле в уравнении на $\dot{\omega}$ определяется функцией $\Psi(\alpha, \omega)$. Опишем введение силового поля в виде двумерного столбца, в первой строке которого стоят коэффициенты из функции $\Psi(\alpha, \omega)$, а во второй строке — коэффициенты из уравнения на $\dot{\alpha}$. Таким образом, совместное силовое поле (в котором присутствуют три параметра $b, b_1 \geqslant 0$, $\mu \in \mathbb{R}$) будет иметь вид

$$U \begin{pmatrix} b\,\omega^2 \\ b_1 F(\alpha) \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} -\tilde{\delta}_1(\alpha) & \delta_1(\alpha) \\ \delta_1(\alpha) & \tilde{f}_1(\alpha) \end{pmatrix},$$

где U — преобразование с определителем, равным $-\mu$ и являющимся унимодулярным преобразованием при $\mu = \pm 1$. Такое преобразование вносит в систему диссипацию (как одного знака, так и другого, см. также [2]).

Теорема 2. *Если найдётся такое* $\lambda \in \mathbb{R}$, *что выполнено «энергетическое» условие на силовое поле* $F(\alpha) = \delta_1(\alpha)\tilde{\delta}_1(\alpha)$, *то система* (6) *обладает, вообще говоря, трансцендентным первым интегралом.*

Действительно, система более общего вида (6) после ряда преобразований приводится к уравнению Бернулли

$$\frac{d\delta_1}{du} = \frac{(b_1\lambda\mu - u)\delta_1 + (bu^2 - b_1\lambda)\delta_1^3}{\lambda - b_1\lambda\mu u + u^2}, \quad u = \frac{\omega}{\delta_1(\alpha)},$$

решение которого выражается через конечную комбинацию элементарных функций. Но выражение найденного первого интеграла через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур (здесь как раз всё нормально), но также и от явного вида функции $\delta_1(\alpha)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе доказана структурная устойчивость (относительная грубость) систем более общего вида (8) в некоторой области параметров. При этом система более частного вида (11) теперь является «типичным представителем» системы более общего вида (8), поскольку в некоторой области параметров конечной меры их можно сопоставить.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.; Л.: ОГИЗ, 1947.
2. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фундамент. и прикл. математика. 2008. Т. 14, №. 3. С. 3–237.
3. *Бендиксон И.* О кривых определяемых дифференциальными уравнениями // Успехи мат. наук. 1941. № 9. С. 119–211.
4. *Брюно А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979.
5. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжёлого твёрдого тела около неподвижной точки. М.; Л.: Гостехиздат, 1953.
6. *Якоби К.* Лекции по динамике. М.; Л.: ОНТИ, 1936. 272 с.
7. *Локшин Б. Я., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Маятниковые системы с динамической симметрией // Современная математика и её приложения. 2016. Т. 100. С. 76–133.
8. *Шамолин М. В.* Применение методов топографических систем Пуанкаре и систем сравнения в некоторых конкретных системах дифференциальных уравнений // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1993. № 2. С. 66–70.
9. *Гуревич М. И.* Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979.
10. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжёлых тел в несжимаемой жидкости // Л.: Изд-во АН СССР, 1933. Т. 1. С. 133–135.
11. *Чаплыгин С. А.* Избранные труды. М.: Наука, 1976.
12. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1989. № 3. С. 51–54.
13. *Шамолин М. В.* Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента // Прикл. математика и механика. 1993. Т. 57, №. 4. С. 40–49.
14. *Шамолин М. В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании // Прикл. математика и механика. 2005. Т. 69, №. 6. С. 1003–1010.
15. *Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в среде с сопротивлением // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1992. № 1. С. 52–58.
16. *Шамолин М. В.* Существование и единственность траекторий, имеющих в качестве предельных множеств бесконечно удалённые точки, для динамических систем на плоскости // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1993. № 1. С. 68–71.
17. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1967.
18. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1987.
19. *Табачников В. Г.* Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки // Труды ЦАГИ. 1974. Вып. 1621. С. 18–24.

20. *Локшин Б. Я., Привалов В. А., Самсонов В. А.* Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. М.: Изд-во МГУ, 1986.
21. *Шамолин М. В.* Пространственные топографические системы Пуанкаре и системы сравнения // Успехи мат. наук. 1997. Т. 52, №. 3. С. 177–178.
22. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи мат. наук. 1998. Т. 53, №. 3. С. 209–210.
23. *Бурбаки Н.* Интегрирование. М.: Наука, 1970.
24. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
25. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
26. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.: Физматгиз, 1947.
27. *Шамолин М. В.* Замкнутые траектории различного топологического типа в задаче о движении тела в среде с сопротивлением // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1992. № 2. С. 52–56.
28. *Шамолин М. В.* Трехпараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Доклады РАН. 2008. Т. 418, № 1. С. 46–51.
29. *Шамолин М. В.* Многопараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2011. № 3. С. 24–30.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 531.01:531.552

FAMILIES OF PORTRAITS OF SOME PENDULUM-LIKE SYSTEMS IN DYNAMICS

© 2020 **M. V. Shamolin**

Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University,
pr. Michurinskii 1, Moscow 119192, Russia

E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

Received 14.02.2020, revised 28.04.2020, accepted 10.09.2020

Abstract. The so-called pendulum-like systems arise in dynamics of a rigid body in a non-conservative field, in the theory of oscillations, and in theoretical physics. In this article, the methods of analysis are described which allow us to generalize the previous results. Herewith, we deal with some qualitative questions of the theory of ordinary differential equations, the solution of which facilitates studying some dynamical systems. In result of investigating more general classes of systems, we show that these general systems possess the already known family of nonequivalent phase portraits. We also deal with the aspect of integrability.

Keywords: dynamical pendulum-like system, qualitative and numerical analysis.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.411

REFERENCES

1. Poincaré H. On curves defined by differential equations. Moscow: OGIZ, 1947 (in Russian).
2. Shamolin M.V. Dynamical systems with various dissipation: background, methods, and applications. *Fundament. i Prikl. Matematika*, 2008, Vol. 14, No. 3, pp. 3–237 (in Russian).
3. Bendikson I. About curves defined by differential equations. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1941, No. 9, pp. 119–211 (in Russian).
4. Bryuno A.D. The local method of nonlinear analysis of differential equations. Moscow: Nauka, 1979 (in Russian).
5. Golubev V.V. Lectures on integration of the equations of motion of a rigid body about a fixed point. Moscow: Gostekhizdat, 1953 (in Russian).
6. Jakobi C. Lectures on Dynamics. Moscow: ONTI, 1936 (in Russian).
7. Lokshin B. Ya., Samsonov V. A., Shamolin M. V. Pendulum systems with dynamical symmetry. *Sovrem. Mat. i Ee Prilozhen.*, 2016, Vol. 100, pp. 76–133 (in Russian).
8. Shamolin M. V. Application of the methods of topographic Poincaré systems and comparison systems to some particular systems of differential equations. *Vestnik MGU. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 1993, №. 2, pp. 66–70 (in Russian).
9. Gurevich M. I. Theory of jets in ideal fluids. Moscow: Nauka, 1979 (in Russian).
10. Chaplygin S. A. On motion of heavy bodies in an incompressible fluid. *Izd. Akad. Nauk SSSR*, 1933, Vol. 1, pp. 133–135 (in Russian).
11. Chaplygin S. A. Selected works. Moscow: Nauka, 1976 (in Russian).
12. Samsonov V. A., Shamolin M. V. Body motion in a resisting medium. *Vestnik MGU. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 1989, No. 3, pp. 51–54 (in Russian).

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2020, Vol. 14, No. 4; DOI: 10.1134/S1990478920040146

13. Shamolin M. V. Phase pattern classification for the problem of the motion of a body in a resisting medium in the presence of a linear damping moment. *J. Appl. Math. Mech.*, 1993, Vol. 57, No. 4, pp. 623–632.
14. Shamolin M. V. Comparison of Jacobi integrable cases of plane and spatial motion of a body in a medium at streamlining. *J. Appl. Math. Mech.*, 2005, Vol. 69, No. 6, pp. 900–906.
15. Shamolin M. V. On the problem of the motion of a body in a resistant medium. *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 1992, Vol. 47, No. 1, pp. 4–10.
16. Shamolin M. V. Existence and uniqueness of trajectories that have points at infinity as limit sets for dynamical systems on the plane. *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 1993, Vol. 48, No. 1, pp. 1–6.
17. Pliss V. A. Integral sets of periodical systems of differential equations. Moscow: Nauka, 1967 (in Russian).
18. Shabat B. V. Introduction to complex analysis. Moscow: Nauka, 1987 (in Russian).
19. Tabachnikov V. G. Stationary characteristics of wings at slow speeds in the whole range of angles of incidence. *Trudy TsAGI*, 1974, No. 1621, pp. 18–24 (in Russian).
20. Lokshin B. Ya., Privalov V. A., Samsonov V. A. Introduction to the problem of motion of a rigid body in a resistant medium. Moscow: Publ. Moskov. Gos. Univ., 1986 (in Russian).
21. Shamolin M. V. Spatial topographical systems of Poincaré and comparison systems, *Russian Math. Surveys*, 1997, Vol. 52, No. 3, pp. 621–622.
22. Shamolin M. V. On integrability in transcendental functions. *Russian Math. Surveys*, 1998, Vol. 53, No. 3, pp. 637–638.
23. Bourbaki N. Integration. Moscow: Nauka, 1970 (in Russian).
24. Golubev V. V. Lectures on analytical theory of differential equations. Moscow: Gostekhizdat, 1950 (in Russian).
25. Dubrovin B. A., Novikov S. P., Fomenko A. T. Modern geometry. Moscow: Nauka, 1979 (in Russian).
26. Lamb G. Hydrodynamics. Moscow: Fizmatgiz, 1947 (in Russian).
27. Shamolin M. V. Different topological types of trajectories in the problem of body motion in a resisting medium. *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 1992, Vol. 47, No. 2, pp. 13–16.
28. Shamolin M. V. Three-parametric family of phase portraits in dynamics of a solid interacting with a medium. *Dokl. Phys.*, 2008, Vol. 53, No. 1, pp. 23–28.
29. Shamolin M. V. Multiparameter family of phase portraits in the dynamics of a rigid body interacting with a medium. *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 2011, Vol. 66, No. 3, pp. 49–55.