ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 495, с. 84–90

**МАТЕМАТИКА**

УДК 517+531.01

# НОВЫЕ СЛУЧАИ ОДНОРОДНЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ТРЕХМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ

© 2020 г. М. В. Шамолин[1,*]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 20.10.2020 г.
Поступило 20.10.2020 г.
После доработки 20.10.2020 г.
Принято к публикации 12.11.2020 г.

Показана интегрируемость некоторых классов однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким трехмерным многообразиям. При этом силовые поля приводят к появлению диссипации переменного знака и обобщают ранее рассмотренные.

*Ключевые слова:* динамическая система, интегрируемость, диссипация, трансцендентный первый интеграл

**DOI:** 10.31857/S2686954320060247

Изучение интегрируемости автономных динамических систем на трехмерном конфигурационном многообразии $M^3$ приводит к изучению систем шестого порядка на касательном расслоении $TM^3$. При этом ключевым, наряду с геометрией многообразия $M^3$, является структура силового поля, присутствующего в системе. Так, например, известная задача о движении четырехмерного маятника на обобщенном сферическом шарнире в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе на касательном расслоении к трехмерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий [1, 2]. Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [2, 3].

Известны также задачи о движении точки по трехмерным поверхностям вращения, в пространстве Лобачевского и т.д. Иногда в системах с диссипацией все же удается найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных, в смысле комплексного анализа, функций, поскольку о полном списке даже непрерывных автономных первых интегралов приходится забыть. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

В работе показана интегрируемость некоторых классов однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким трехмерным многообразиям. При этом силовые поля приводят к появлению диссипации переменного знака и обобщают ранее рассмотренные [2, 3].

## 1. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

Как известно, в случае трехмерного риманова многообразия $M^3$ с координатами $(\alpha, \beta)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, и аффинной связностью $\Gamma^i_{jk}(\alpha, \beta)$ уравнения геодезических линий на касательном расслоении $TM^3\{\dot\alpha, \dot\beta_1, \dot\beta_2; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ $\alpha = x^1$, $\beta_1 = x^2$, $\beta_2 = x^3$, $x = (x^1, x^2, x^3)$, примут следующий вид (дифференцирование берется по натуральному параметру):

$$\ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^{3} \Gamma^i_{jk}(x)\dot{x}^j\dot{x}^k = 0, \quad i = 1,2,3. \tag{1}$$

Изучим структуру уравнений (1) при изменении координат на касательном расслоении $TM^3$. Для этого рассмотрим замену координат касательного пространства:

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{3} R^{ij} z_j, \tag{2}$$

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: shamolin@imec.msu.ru*

которую можно обратить: $z_j = \sum_{i=1}^{3} T_{ji} x^{i\bullet}$, при этом $R^{ij}$, $T_{ji}$, $i, j = 1, 2, 3$, – функции от $x$, а также $RT = E$, где $R = (R^{ij})$, $T = (T_{ji})$. Назовем также уравнения (2) новыми кинематическими соотношениями, т.е. линейными соотношениями на касательном расслоении $TM^3$. Справедливы равенства

$$z_i^\bullet = \sum_{j,k=1}^{3} T_{ij,k} x^{j\bullet} x^{k\bullet} - \sum_{j,p,q=1}^{3} T_{ij} \Gamma^j_{pq} x^{p\bullet} x^{q\bullet}, \quad (3)$$

где $T_{ji,k} = \dfrac{\partial T_{ji}}{\partial x^k}$, $j, i, k = 1, 2, 3$, при этом в системе (3) вместо $x^{i\bullet}$, $i = 1, 2, 3$, надо подставить формулы (2), и правые части составной системы (2), (3) являются однородными формами соответствующих степеней по квазискоростям $z_1$, $z_2$, $z_3$.

Предложение 1. *Система* (1) *в той области, где* $\det R(\alpha, \beta) \neq 0$, *эквивалентна составной системе* (2), (3).

Таким образом, результат перехода от уравнений геодезических (1) к эквивалентной системе (2), (3) зависит как от замены (2) (т.е. вводимых кинематических соотношений), так и от аффинной связности $\Gamma^i_{jk}(\alpha, \beta)$.

Рассмотрим далее достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\alpha^\bullet = z_3 f_3(\alpha), \quad \beta_1^\bullet = z_2 f_1(\alpha), \quad \beta_2^\bullet = z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1), \quad (4)$$

где $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$ – гладкие функции, не равные тождественно нулю. Такие координаты $z_1$, $z_2$, $z_3$ в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются следующие уравнения геодезических [4, 5], например, с семью ненулевыми коэффициентами связности (в частности, на трехмерных поверхностях вращения, в пространстве Лобачевского и т.д.):

$$\begin{gathered}
\alpha^{\bullet\bullet} + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet 2} + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\beta_1^{\bullet 2} + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\beta_2^{\bullet 2} = 0, \\
\beta_1^{\bullet\bullet} + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\alpha^\bullet\beta_1^\bullet + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\beta_2^{\bullet 2} = 0, \\
\beta_2^{\bullet\bullet} + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\alpha^\bullet\beta_2^\bullet + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\beta_1^\bullet\beta_2^\bullet = 0,
\end{gathered} \quad (5)$$

т.е. остальные коэффициенты связности равны нулю. В случае (4) уравнения (3) примут вид

$$\begin{gathered}
z_1^\bullet = -f_3(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_3 - \\
- f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1 z_2, \\
z_2^\bullet = -f_3(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_3 - \\
- \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) z_1^2, \\
z_3^\bullet = -f_3(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_3^2 - \\
- \frac{f_1^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) z_2^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) z_1^2,
\end{gathered} \quad (6)$$

и уравнения (5) геодезических почти всюду эквивалентны составной системе (4), (6) на многообразии $TM^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$.

Для полного интегрирования системы (4), (6) необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов. При этом первые интегралы (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее.

Предложение 2. *Если всюду справедлива система дифференциальных равенств*

$$\begin{gathered}
\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha} \equiv 0, \\
f_3^2(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] + \\
+ f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) \equiv 0, \\
f_3^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] + \\
+ f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) \equiv 0, \\
f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] + \\
+ f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) \equiv 0,
\end{gathered} \quad (7)$$

*то система* (4), (6) *имеет аналитический первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_1(z_3, z_2, z_1) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = C_1^2 = \text{const}. \quad (8)$$

Пример. Уравнения (5) геодезических в трехмерном пространстве Лобачевского в модели Клейна с координатами $(x = \beta_1, y = \beta_2, \alpha = z)$ примут вид

$$\begin{gathered}
\alpha^{\cdot\cdot} - \frac{1}{\alpha}(\alpha^{\cdot 2} - \beta_1^{\cdot 2} - \beta_2^{\cdot 2}) = 0, \\
\beta_1^{\cdot\cdot} - \frac{2}{\alpha}\alpha^\cdot\beta_1^\cdot = 0, \quad \beta_2^{\cdot\cdot} - \frac{2}{\alpha}\alpha^\cdot\beta_2^\cdot = 0.
\end{gathered} \quad (9)$$

Четырехпараметрическая система, эквивалентная при $\mu_1, \mu_3 \neq 0, \alpha \neq 0$ уравнениям (9) геодезических и имеющая первый интеграл вида (8), имеет вид

$$\alpha^{\bullet} = z_3\mu_1\alpha, \quad z_3^{\bullet} = -z_2^2\frac{\mu_1\alpha^2}{\alpha^2+\mu_2} - z_1^2\frac{\mu_1\mu_3^2\alpha^2}{\mu_3^2\alpha^2+\mu_4},$$

$$z_2^{\bullet} = z_2z_3\frac{\mu_1\alpha^2}{\alpha^2+\mu_2}, \quad z_1^{\bullet} = z_1z_3\frac{\mu_1\mu_3^2\alpha^2}{\mu_3^2\alpha^2+\mu_4},$$

$$\beta_1^{\bullet} = z_2\frac{\mu_1\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\mu_2}}, \quad \beta_2^{\bullet} = z_1\frac{\mu_1\mu_3\alpha^2}{\sqrt{\mu_3^2\alpha^2+\mu_4}},$$

если первое, пятое и шестое уравнения этой системы рассматривать как новые кинематические соотношения.

Система равенств (7) может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (8) (или см. ниже (18)) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [5, 6]).

Поиск как интеграла (8), так и (13), (15) (см. далее) опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий [5, 6].

Можно доказать отдельную теорему существования решения $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$ системы (7) для наличия аналитического интеграла (8) для исследуемой системы (4), (6) уравнений геодезических. Но в дальнейшем при изучении динамических систем с диссипацией не всегда все условия (7) нам будут требоваться. Тем не менее, в дальнейшем будем предполагать в уравнениях (4) выполнение условия

$$f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = f(\alpha), \tag{10}$$

при этом функция $g(\beta_1)$ должна удовлетворять преобразованному третьему равенству из (7):

$$2\Gamma_{12}^2(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1} + \Gamma_{22}^1(\alpha,\beta)g^2(\beta_1) \equiv 0. \tag{11}$$

Таким образом, функция $g(\beta_1)$ зависит от коэффициентов связности, а вот ограничения на функции $f(\alpha)$, $f_3(\alpha)$ будут даны ниже.

П р е д л о ж е н и е 3. *Если выполнены свойства* (10), (11), *при этом справедливы равенства*

$$\Gamma_{\alpha1}^1(\alpha,\beta) = \Gamma_{\alpha2}^2(\alpha,\beta) = \Gamma_1(\alpha), \tag{12}$$

*то система* (4), (6) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида:*

$$\Phi_2(z_2, z_1;\alpha) = \sqrt{z_1^2+z_2^2}\,\Phi_0(\alpha) = C_2 = \text{const},$$
$$\Phi_0(\alpha) = f(\alpha)\exp\left\{2\int_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\}. \tag{13}$$

П р е д л о ж е н и е 4. *Если выполнено свойство*

$$\Gamma_{12}^2(\alpha,\beta) = \Gamma_2(\beta_1), \tag{14}$$

*а также второе равенство из* (12) ($\Gamma_{\alpha2}^2(\alpha,\beta) = \Gamma_1(\alpha)$), *то система* (4), (6) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида:*

$$\Phi_3(z_1;\alpha,\beta_1) = z_1\Phi_0(\alpha)\Phi(\beta_1) = C_3 = \text{const},$$
$$\Phi(\beta_1) = g(\beta_1)\exp\left\{2\int_{\beta_{10}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)db\right\}. \tag{15}$$

П р е д л о ж е н и е 5. *Если выполнены условия* (10)–(12), (14), *то система* (4), (6) *имеет первый интеграл следующего вида:*

$$\Phi_4(z_2, z_1;\beta) = \beta_2 \pm \int_{\beta_{10}}^{\beta_1}\frac{C_3g(b)}{\sqrt{C_2^2\Phi^2(b) - C_3^2}}db = \tag{16}$$
$$= C_4 = \text{const},$$

*где, после взятия интеграла* (16), *вместо постоянных* $C_2$, $C_3$ *можно подставить левые части равенств* (13), (15), *соответственно.*

Т е о р е м а 1. *Если выполнены условия* (10)–(12), (14), *то система* (4), (6) *обладает полным набором, состоящим из четырех первых интегралов вида* (8), (13), (15), (16).

То, что полный набор состоит из четырех, а не из пяти, первых интегралов, будет показано ниже.

## 2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

Модифицируем систему (4), (6), получив систему консервативную. А именно, вводится гладкое силовое поле в проекциях на оси $z_k^{\bullet}$, $k = 1, 2, 3$, соответственно: $F_1(\beta_2)f_2(\alpha)$, $F_2(\beta_1)f_1(\alpha)$, $F_3(\alpha)f_3(\alpha)$. Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^3\{z_3, z_2, z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2\}$ примет вид

$$\alpha^{\bullet} = z_3f_3(\alpha),$$
$$z_3^{\bullet} = F_3(\alpha)f_3(\alpha) -$$
$$- f_3(\alpha)\left[\Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_3^2 -$$
$$- \frac{f_1^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha,\beta)z_2^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha,\beta)z_1^2,$$

$$z_2^{\bullet} = F_2(\beta_1)f_1(\alpha) -$$
$$- f_3(\alpha)\left[2\Gamma_{\alpha1}^1(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2z_3 - \tag{17}$$
$$- \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha,\beta)z_1^2,$$

$$z_1^{\bullet} = F_1(\beta_2)f_2(\alpha)g(\beta_1) -$$
$$- f_3(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_3 -$$
$$- f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_1z_2,$$
$$\beta_1^{\bullet} = z_2f_1(\alpha), \quad \beta_2^{\bullet} = z_1f_2(\alpha)g(\beta_1),$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\alpha^{\bullet\bullet} - F_3(\alpha)f_3^2(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet 2} +$$
$$+ \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)\beta_1^{\bullet 2} + \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta)\beta_2^{\bullet 2} = 0,$$
$$\beta_1^{\bullet\bullet} - F_2(\beta_1)f_1^2(\alpha) + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet}\beta_1^{\bullet} +$$
$$+ \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\beta_2^{\bullet 2} = 0,$$
$$\beta_2^{\bullet\bullet} - F_1(\beta_2)f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1) + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet}\beta_2^{\bullet} +$$
$$+ 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\beta_1^{\bullet}\beta_2^{\bullet} = 0.$$

П р е д л о ж е н и е 6. *Если всюду справедливы равенства* (7), *то система* (17) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_1(z_3,z_2,z_1;\alpha,\beta) =$$
$$= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + V(\alpha,\beta) = C_1 = \text{const},$$
$$V(\alpha,\beta) = V_3(\alpha) + V_2(\beta_1) + V_1(\beta_2) = \tag{18}$$
$$= -2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F_3(a)da - 2\int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1} F_2(b)db - 2\int\limits_{\beta_{20}}^{\beta_2} F_1(b)db.$$

П р е д л о ж е н и е 7. *Пусть* $F_2(\beta_1) \equiv F_1(\beta_2) \equiv 0$. *Если выполнены условия предложений* 3, 4, *то система* (17) *имеет два гладких первых интеграла вида* (13), (15).

П р е д л о ж е н и е 8. *Если выполнены условия предложения* 5, *то система* (17) *имеет первый интеграл вида* (16).

Т е о р е м а 2. *Пусть* $F_2(\beta_1) \equiv F_1(\beta_2) \equiv 0$. *Если выполнены условия* (10)–(12), (14), *то система* (17) *обладает полным набором, состоящим из четырех первых интегралов вида* (18), (13), (15), (16).

То, что полный набор состоит из четырех, а не из пяти первых интегралов, будет показано ниже.

## 3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В СИЛОВОМ ПОЛЕ С ДИССИПАЦИЕЙ

Теперь несколько модифицируем систему (17) при условиях (10)–(12), (14), а также при $F_2(\beta_1) \equiv \equiv F_1(\beta_2) \equiv 0$. При этом получим систему с диссипацией, наличие которой (вообще говоря, знакопеременной) характеризует не только коэффициент $b\delta(\alpha)$, $b > 0$, в первом уравнении системы (19) (в отличие от (17)), но и следующая зависимость (внешнего) силового поля в проекциях на оси $z_k^{\bullet}$, $k = 1, 2, 3$, соответственно: $z_1F^1(\alpha)$, $z_2F^1(\alpha)$, $F_3(\alpha)f_3(\alpha) + z_3F_3^1(\alpha)$. Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^3\{z_3,z_2,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2\}$ примет вид

$$\alpha^{\bullet} = z_3f_3(\alpha) + b\delta(\alpha),$$
$$z_3^{\bullet} = F_3(\alpha)f_3(\alpha) -$$
$$- f_3(\alpha)\left[\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_3^2 -$$
$$- \frac{f^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)z_2^2 -$$
$$- \frac{f^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta)z_1^2 + z_3F_3^1(\alpha),$$
$$z_2^{\bullet} = -f_3(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2z_3 - \tag{19}$$
$$- f(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z_1^2 + z_2F^1(\alpha),$$
$$z_1^{\bullet} = -f_3(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_3 -$$
$$- f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_1z_2 + z_1F^1(\alpha),$$
$$\beta_1^{\bullet} = z_2f(\alpha), \quad \beta_2^{\bullet} = z_1f(\alpha)g(\beta_1),$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\alpha^{\bullet\bullet} - \left\{b\tilde{\delta}(\alpha) + F_3^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right]\right\}\alpha^{\bullet} -$$
$$- F_3(\alpha)f_3^2(\alpha) + b\delta(\alpha)F_3^1(\alpha) +$$
$$+ b^2\delta^2(\alpha)\left[\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] +$$
$$+ \Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet 2} + \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)\beta_1^{\bullet 2} + \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta)\beta_2^{\bullet 2} = 0,$$
$$\beta_1^{\bullet\bullet} - \left\{F_2^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\right\}\beta_1^{\bullet} +$$
$$+ 2\Gamma_1(\alpha)\alpha^{\bullet}\beta_1^{\bullet} + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\beta_2^{\bullet 2} = 0,$$
$$\beta_2^{\bullet\bullet} - \left\{F_1^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\right\}\beta_2^{\bullet} +$$
$$+ 2\Gamma_1(\alpha)\alpha^{\bullet}\beta_2^{\bullet} + 2\Gamma_2(\beta_1)\beta_1^{\bullet}\beta_2^{\bullet} = 0,$$
$$\tilde{\delta}(\alpha) = d\delta(a)/d\alpha.$$

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы шестого порядка (19) при условии (11), а также при выполнении равенств

$$\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta) = \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1) = \Gamma_3(\alpha).$$

Введем также (по аналогии с (11)) ограничение и на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять преобразованному равенству из (7):

$$f_3^2(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]+\Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha)\equiv 0.$$

При этом происходит отделение независимой подсистемы пятого порядка:

$$\begin{gathered}
\alpha^{\bullet}=z_3f_3(\alpha)+b\delta(\alpha),\\
z_3^{\bullet}=F_3(\alpha)f_3(\alpha)-\frac{f^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma_3(\alpha)(z_2^2+z_1^2)+z_3F_3^1(\alpha),\\
z_2^{\bullet}=-f_3(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2z_3-\\
-f(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha,\beta_1)z_1^2+z_2F^1(\alpha),\\
z_1^{\bullet}=-f_3(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_3-\\
-f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_1z_2+z_1F^1(\alpha),\\
\beta_1^{\bullet}=z_2f(\alpha),\quad \beta_2^{\bullet}=z_1f(\alpha)g(\beta_1).
\end{gathered}$$

Для полного интегрирования системы необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных $z_1,z_2\to z,z_*$, $z=\sqrt{z_1^2+z_2^2}$, $z_*=z_2/z_1$ система (19) распадается следующим образом:

$$\begin{gathered}
\alpha^{\bullet}=z_3f_3(\alpha)+b\delta(\alpha),\\
z_3^{\bullet}=F_3(\alpha)f_3(\alpha)-\frac{f^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma_3(\alpha)z^2+z_3F_3^1(\alpha),\\
z^{\bullet}=\frac{f^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma_3(\alpha)zz_3+zF^1(\alpha),
\end{gathered}\tag{20}$$

$$\begin{gathered}
z_*^{\bullet}=(\pm)z\sqrt{1+z_*^2}f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right],\\
\beta_1^{\bullet}=(\pm)\frac{zz_*}{\sqrt{1+z_*^2}}f(\alpha),
\end{gathered}\tag{21}$$

$$\beta_2^{\bullet}=z_1f(\alpha)g(\beta_1).\tag{22}$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (20)–(22) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (20), один – после замены независимой переменной – независимой системы (21), и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (22) (т.е. всего четыре).

Будем также предполагать, что для некоторого $\kappa\in\mathbf{R}$ выполнено равенство

$$\begin{gathered}
\frac{f^2(\alpha)}{f_3^2(\alpha)}\Gamma_3(\alpha)=\kappa\frac{d}{d\alpha}\ln|\Delta(\alpha)|,\\
\Delta(\alpha)=\frac{\delta(\alpha)}{f_3(\alpha)},
\end{gathered}\tag{23}$$

а для некоторых $\lambda_3^0,\lambda_k^1\in\mathbf{R}$ выполнены равенства

$$\begin{gathered}
F_3(\alpha)=\lambda_3^0\frac{d}{d\alpha}\frac{\Delta^2(\alpha)}{2},\\
F_k^1(\alpha)=\lambda_k^1f_3(\alpha)\frac{d}{d\alpha}\Delta(\alpha),\quad \kappa=1,2,3.
\end{gathered}\tag{24}$$

Здесь $F_1^1(\alpha)=F_2^1(\alpha)=F^1(\alpha)$, т.е. $\lambda_1^1=\lambda_2^1=\lambda^1$. Условие (23) назовем “геометрическим”, а условия из группы (24) – “энергетическими”.

Условие (23) названо геометрическим в том числе потому, что накладывает условие на коэффициент связности $\Gamma_3(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\Delta(\alpha)$. Условия же группы (24) названы энергетическими в том числе потому, что силы становятся, в некотором смысле, “потенциальными” по отношению к функциям $\Delta^2(\alpha)/2$ и $\Delta(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции $\Delta(\alpha)$). При этом функция $\Delta(\alpha)$ и вводит в систему диссипацию разных знаков.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* (23) *и* (24). *Тогда система* (20)–(22) *обладает четырьмя независимыми, вообще говоря, трансцендентными* [7, 8] *первыми интегралами.*

В общем случае первые интегралы выписываются громоздко (поскольку приходится интегрировать уравнение Абеля [9]). В частности, если $\kappa=-1$, явный вид ключевого первого интеграла таков:

$$\begin{gathered}
\Theta_1(z_3,z;\alpha)=G_1\left(\frac{z_3}{\Delta(\alpha)},\frac{z}{\Delta(\alpha)}\right)=\\
=\frac{f_3^2(\alpha)(z_3^2+z^2)+(b-\lambda^1)z_3\delta(\alpha)f_3(\alpha)-\lambda_3^0\delta^2(\alpha)}{z\delta(\alpha)f_3(\alpha)}=\\
=C_1=\text{const}.
\end{gathered}\tag{25}$$

При этом дополнительный первый интеграл системы (20) имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(z_3,z;\alpha)=G_2\left(\Delta(\alpha),\frac{z_3}{\Delta(\alpha)},\frac{z}{\Delta(\alpha)}\right)=C_2=\text{const}.\tag{26}$$

Первый интеграл для системы (21) будет иметь вид

$$\Theta_3(z_*;\beta_1)=\frac{\sqrt{1+z_*^2}}{\Phi(\beta_1)}=C_3=\text{const},\tag{27}$$

о функции $\Phi(\beta_1)$ см. (15). А дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (22), находится по аналогии с (16):

$$\Theta_4(z_*;\beta) = \beta_2 \pm \int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1} \frac{C_3 g(b)}{\sqrt{C_2^2\Phi^2(b) - C_3^2}}\,db = \\ = C_4 = \mathrm{const}, \tag{28}$$

где, после взятия интеграла (28), вместо постоянных $C_2$, $C_3$ можно подставить левые части равенств (13), (15) соответственно.

Выражение первых интегралов (25)–(28) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\Delta(\alpha)$. Действительно, при $\kappa = -1$ дополнительный первый интеграл системы (20) найдется из соотношения

$$d\ln|\Delta(\alpha)| = \frac{(b - u_3)du_3}{2W(u_3) - C_1\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4W(u_3)}\right\}/2},$$

$$W(u_3) = u_3^2 + (b - \lambda^1)u_3 - \lambda_3^0, \quad u_3 = \frac{z_3}{\Delta(\alpha)}.$$

При этом после интегрирования вместо $C_1$ можно подставить левую часть равенства (25). Правая часть данного равенства выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая – в зависимости о функции $\Delta(\alpha)$.

Справедлива и теорема, в некотором смысле обратная к теореме 3.

Т е о р е м а 4. *Условия* (23), (24) (*например, при* $\kappa = -1$) *являются необходимыми условиями существования первого интеграла* (25) *для системы* (20)–(22).

## 4. СТРОЕНИЕ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДЛЯ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ

Если $\alpha$ – периодическая координата периода $2\pi$, то система (20)–(22) в условиях теоремы 3 становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним [2, 10]. При этом при $b = -\lambda^1$ она превращается в систему консервативную, которая обладает двумя гладкими первыми интегралами:

$$\Phi_1(-b; z_3, z; \alpha) = \\ = z^2 + z_3^2 + 2bz_3\Delta(\alpha) - \lambda_3^0\Delta^2(\alpha) = \mathrm{const}, \tag{29}$$

$$\Phi_2(z_1;\alpha) = z\Delta(\alpha) = \mathrm{const}. \tag{30}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (29), (30) также является первым интегралом системы (20)–(22) при $b = -\lambda^1$. Но при $b \neq -\lambda^1$ каждая из функций

$$\Phi_1(\lambda^1; z_3, z; \alpha) = z^2 + z_3^2 + (b - \lambda^1)z_3\Delta(\alpha) - \lambda_3^0\Delta^2(\alpha) \tag{31}$$

и (30) по отдельности не является первым интегралом системы (20)–(22). Однако отношение функций (31), (30) является первым интегралом системы (20)–(22) (при $\kappa = -1$) при любом $b$.

Вообще же, для систем любого порядка с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств [11, 12].

## 5. СИСТЕМЫ НА ТРЕХМЕРНОЙ СФЕРЕ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Выше уже были выделены в качестве примеров два класса многообразий (поверхности вращения и пространства Лобачевского), для которых применима предлагаемая методика интегрирования систем с диссипацией. Теперь отметим однопараметрическое семейство функций $f(\alpha)$ и $f_3(\alpha)$, определяющих метрику на трехмерной сфере:

$$f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sqrt{1 + \mu_1\sin^2\alpha}}, \quad \mu_1 \in \mathbf{R}, \quad f_3(\alpha) \equiv -1,$$

при этом выделим два существенных подслучая:

$$\mu_1 = 0, \tag{32}$$

$$\mu_1 = -1. \tag{33}$$

Случай (32) формирует класс систем, соответствующих движению динамически симметричного четырехмерного твердого тела на нулевых уровнях циклических интегралов, вообще говоря, в неконсервативном поле сил, при дополнительной зависимости силового поля от (тензора второго ранга) угловой скорости [2, 10]. Случай (33) формирует класс систем, соответствующих движению точки на трехмерной сфере с естественной метрикой, индуцированной метрикой всеобъемлющего четырехмерного евклидова пространства. В частности, при $\delta(\alpha) = F_3(\alpha) \equiv 0$ рассматриваемая система описывает геодезический поток на трехмерной сфере. В случае (32) если $\delta(\alpha) = \dfrac{F_3(\alpha)}{\cos\alpha}$, то система описывает движение четырехмерного твердого тела в силовом поле $F_3(\alpha)$ под действием следящей силы [2, 3]. В частности, если $F_3(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha$, $\delta(\alpha) = \sin\alpha$, то система описывает обобщенный сферический маятник, помещенный в поток набегающей среды в четырехмерном пространстве, и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [2, 3, 10, 11].

Если функция $\delta(\alpha)$ не является периодической, то рассматриваемая диссипативная система является системой с переменной диссипацией с ненулевым средним (т.е. она является собственно диссипативной). Тем не менее, и в этом случае (благодаря теоремам 3 и 4) можно получить явный вид трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Последнее также определяет новые нетривиальные случаи интегрируемости динамических систем с диссипацией на касательном расслоении гладкого трехмерного многообразия в явном виде.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Шамолин М.В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53. Вып. 3. С. 209–210.
2. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере // ДАН. 2017. Т. 474. № 2. С. 177–181.
3. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия // ДАН. 2017. Т. 477. № 2. С. 168–172.
4. *Козлов В.В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // Прикл. матем. и механ. 2015. Т. 79. № 3. С. 307–316.
5. *Клейн Ф.* Неевклидова геометрия. Пер. с нем. 4-е изд., испр., обновл. М.: URSS, 2017. 352 с.
6. *Вейль Г.* Симметрия. М.: URSS, 2007.
7. *Козлов В.В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи матем. наук. 1983. Т. 38. Вып. 1. С. 3–67.
8. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.–Л.: ОГИЗ, 1947.
9. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
10. *Трофимов В.В., Шамолин М.В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. и прикл. матем. 2010. Т. 16. Вып. 4. С. 3–229.
11. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия // ДАН. 2018. Т. 482. № 5. С. 527–533.
12. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1987.


# NEW CASES OF HOMOGENEOUS INTEGRABLE SYSTEMS WITH DISSIPATION ON THE TANGENT BUNDLES OF THREE-DIMENSIONAL MANIFOLDS


**M. V. Shamolin[a]**

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*


Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov


The integrability of certain classes of homogeneous dynamical systems is shown on the tangent bundles to three-dimensional manifolds. In this case, the force fields have the so-called variable dissipation and generalize the previously considered fields.



*Keywords:* dynamical system, integrability, dissipation, transcendental first integral