ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 494, с. 105–111

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517+531.01

НОВЫЕ СЛУЧАИ ОДНОРОДНЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ДВУМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ

© 2020 г. М. В. Шамолин[1,*]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 08.07.2020 г.
Поступило 15.07.2020 г.
После доработки 21.07.2020 г.
Принято к публикации 21.07.2020 г.

Показана интегрируемость некоторых классов однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким двумерным многообразиям. При этом силовые поля приводят к появлению диссипации переменного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Ключевые слова: динамическая система, интегрируемость, диссипация, трансцендентный первый интеграл

DOI: 10.31857/S2686954320050422

Изучение интегрируемости автономных динамических систем на двумерном конфигурационном многообразии M^2 приводит к изучению систем четвертого порядка на касательном расслоении TM^2. При этом ключевым, наряду с геометрией многообразия M^2, является структура силового поля, присутствующего в системе. Так, например, известная задача о движении пространственного маятника на сферическом шарнире в потоке набегающей среды приводит к динамической системе на касательном расслоении к двумерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий [1, 2]. Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [2, 3].

Известны также задачи о движении точки по двумерным поверхностям вращения, плоскости Лобачевского и т.д. Иногда в системах с диссипацией все же удается найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных, в смысле комплексного анализа, функций, поскольку о полном списке даже непрерывных автономных первых интегралов приходится забыть. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

В работе предложена методика интегрирования классов однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким двумерным многообразиям. При этом вводимые внешние силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные [2, 3].

1. УРАВНЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПРИ ЗАМЕНЕ КООРДИНАТ

Как известно, в случае двумерного риманова многообразия M^2 с координатами (α, β) и аффинной связностью $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$ уравнения геодезических линий на касательном расслоении $TM^2\{\alpha^\bullet,\beta^\bullet;\alpha,\beta\}$ примут следующий вид (дифференцирование берется по натуральному параметру):

$$\begin{gathered}\alpha^{\bullet\bullet} + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet 2} + 2\Gamma^\alpha_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\alpha^\bullet\beta^\bullet + \\ + \Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\beta^{\bullet 2} = 0, \\ \beta^{\bullet\bullet} + \Gamma^\beta_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet 2} + 2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\alpha^\bullet\beta^\bullet + \\ + \Gamma^\beta_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\beta^{\bullet 2} = 0.\end{gathered} \tag{1}$$

Изучим структуру уравнений (1) при изменении координат на касательном расслоении TM^2. Для этого рассмотрим замену координат касательного пространства:

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: shamolin@imec.msu.ru*

$$\alpha^\bullet = R_1 z_1 + R_2 z_2, \quad \beta^\bullet = R_3 z_1 + R_4 z_2, \tag{2}$$

которая обращается

$$z_1 = T_1\alpha^\bullet + T_2\beta^\bullet,\ z_2 = T_3\alpha^\bullet + T_4\beta^\bullet,$$

при этом R_k, T_k, $k = 1, \ldots, 4$, – функции от α, β, $RT = E$, где $R = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix}$. Назовем также уравнения (2) новыми кинематическими соотношениями, т.е. линейными соотношениями на касательном расслоении TM^2. Справедливы равенства

$$\begin{gathered} z_1^\bullet = \alpha^{\bullet 2}\{T_{1\alpha} - T_1\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha} - T_2\Gamma^\beta_{\alpha\alpha}\} + \\ + \alpha^\bullet\beta^\bullet\{T_{1\beta} + T_{2\alpha} - 2T_1\Gamma^\alpha_{\alpha\beta} - 2T_2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}\} + \\ + \beta^{\bullet 2}\{T_{2\beta} - T_1\Gamma^\alpha_{\beta\beta} - T_2\Gamma^\beta_{\beta\beta}\} = \\ = U_1(\alpha,\beta)z_1^2 + U(\alpha,\beta)z_1 z_2 + U_2(\alpha,\beta)z_2^2, \\ z_2^\bullet = \alpha^{\bullet 2}\{T_{3\alpha} - T_3\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha} - T_4\Gamma^\beta_{\alpha\alpha}\} + \\ + \alpha^\bullet\beta^\bullet\{T_{3\beta} + T_{4\alpha} - 2T_3\Gamma^\alpha_{\alpha\beta} - 2T_4\Gamma^\beta_{\alpha\beta}\} + \\ + \beta^{\bullet 2}\{T_{4\beta} - T_3\Gamma^\alpha_{\beta\beta} - T_4\Gamma^\beta_{\beta\beta}\} = \\ = V_1(\alpha,\beta)z_1^2 + V(\alpha,\beta)z_1 z_2 + V_2(\alpha,\beta)z_2^2, \end{gathered} \tag{3}$$

$T_{k\alpha} = \dfrac{\partial T_k}{\partial\alpha}$, $T_{k\beta} = \dfrac{\partial T_k}{\partial\beta}$, $k = 1, \ldots, 4$, при этом в (3) вместо $\alpha^\bullet$, $\beta^\bullet$ подставляются соотношения (2), и правые части составной системы (2), (3) являются однородными формами соответствующих степеней по квазискоростям z_1, z_2.

П р е д л о ж е н и е 1. *Система* (1) *в той области, где* $\det R(\alpha,\beta) \neq 0$, *эквивалентна составной системе* (2), (3).

Таким образом, результат перехода от уравнений геодезических (1) к эквивалентной системе (2), (3) зависит как от замены (2) (т.е. вводимых кинематических соотношений), так и от аффинной связности $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$.

Рассмотрим далее достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\alpha^\bullet = z_2 f_2(\alpha), \quad \beta^\bullet = z_1 f_1(\alpha), \tag{4}$$

где $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$ – гладкие функции, не равные тождественно нулю. Такие координаты z_1, z_2 в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются уравнения геодезических [3, 4], например, с тремя ненулевыми коэффициентами связности (в частности, на поверхностях вращения, плоскости Лобачевского и т.д.):

$$\begin{gathered} \alpha^{\bullet\bullet} + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet 2} + \Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\beta^{\bullet 2} = 0, \\ \beta^{\bullet\bullet} + 2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\alpha^\bullet\beta^\bullet = 0, \end{gathered} \tag{5}$$

т.е. выполнены равенства $\Gamma^\alpha_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^\beta_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) \equiv \equiv \Gamma^\beta_{\beta\beta}(\alpha,\beta) \equiv 0$. В случае (4) уравнения (3) примут вид

$$\begin{gathered} z_1^\bullet = -f_2(\alpha)\left[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1 z_2, \\ z_2^\bullet = -f_2(\alpha)\left[2\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2^2 - \\ - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)z_1^2, \end{gathered} \tag{6}$$

и уравнения (1) геодезических почти всюду эквивалентны составной системе (4), (6) на многообразии $TM^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$. В нашем случае уравнения (5) почти всюду перепишутся в виде

$$\begin{gathered} \alpha^\bullet = z_2 f_2(\alpha), \\ z_2^\bullet = -f_2(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2^2 - \\ - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)z_1^2, \\ z_1^\bullet = -f_2(\alpha)\left[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1 z_2, \\ \beta^\bullet = z_1 f_1(\alpha). \end{gathered} \tag{7}$$

Для полного интегрирования системы (7) необходимо знать, вообще говоря, три независимых первых интеграла. При этом первые интегралы (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее.

П р е д л о ж е н и е 2. *Если всюду справедлива система дифференциальных равенств*

$$\begin{gathered} \Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)f_1^2(\alpha) + \\ + f_2^2(\alpha)\left[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] \equiv 0, \\ \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha} \equiv 0, \end{gathered} \tag{8}$$

то система (7) *имеет аналитический первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_1(z_2, z_1) = z_1^2 + z_2^2 = C_1^2 = \text{const}. \tag{9}$$

П р и м е р 1. В случае цилиндрических координат всеобъемлющего трехмерного пространства $(\rho, \varphi = \beta, z = \alpha)$, в которых задана поверхность вращения $\rho = \rho(\alpha)$, уравнения (5) примут вид (штрихом обозначена производная по α)

$$\begin{gathered}\alpha^{\bullet\bullet}+\Gamma_1(\alpha)\alpha^{\bullet 2}+\Gamma_2(\alpha)\beta^{\bullet 2}=0,\\ \beta^{\bullet\bullet}+\Gamma_3(\alpha)\alpha^{\bullet}\beta^{\bullet}=0,\end{gathered}\tag{10}$$

$$\Gamma_1(\alpha)=\frac{\rho'(\alpha)\rho''(\alpha)}{1+\rho^2(\alpha)},$$

$$\Gamma_2(\alpha)=\frac{\rho(\alpha)\rho'(\alpha)}{1+\rho^2(\alpha)},\quad \Gamma_3(\alpha)=2\frac{\rho'(\alpha)}{\rho(\alpha)}.$$

Двухпараметрическая система, эквивалентная при $\mu_1\neq 0,\mu_2>0$ уравнениям (10) геодезических и имеющая первый интеграл вида (9), имеет вид

$$\alpha^{\bullet}=z_2\frac{\mu_1}{\sqrt{1+\rho'^2(\alpha)}},\quad z_2^{\bullet}=-z_1^2\Gamma(\alpha),$$

$$z_1^{\bullet}=z_1z_2\Gamma(\alpha),$$

$$\Gamma(\alpha)=\frac{\mu_1\rho'(\alpha)}{\rho(\alpha)\sqrt{1+\rho'^2(\alpha)}(\mu_2\mu_1^2\rho^2(\alpha)-1)},$$

$$\beta^{\bullet}=z_1\frac{\mu_1}{\rho(\alpha)\sqrt{\mu_2\mu_1^2\rho^2(\alpha)-1}},$$

если первое и четвертое уравнения этой системы рассматривать как новые кинематические соотношения.

П р и м е р 2. Уравнения (5) геодезических на плоскости Лобачевского с координатами ($x=\beta$, $y=\alpha$) примут вид

$$\alpha^{\bullet\bullet}-\frac{1}{\alpha}(\alpha^{\bullet 2}-\beta^{\bullet 2})=0,\quad \beta^{\bullet\bullet}-\frac{2}{\alpha}\alpha^{\bullet}\beta^{\bullet}=0.\tag{11}$$

Двухпараметрическая система, эквивалентная при $\mu_1\neq 0,\alpha\neq 0$ уравнениям (11) геодезических и имеющая первый интеграл вида (9), имеет вид

$$\alpha^{\bullet}=z_2\mu_1\alpha,\quad z_2^{\bullet}=-z_1^2\frac{\mu_1\alpha^2}{\alpha^2+\mu_2\mu_1^2},$$

$$z_1^{\bullet}=z_1z_2\frac{\mu_1\alpha^2}{\alpha^2+\mu_2\mu_1^2},\quad \beta^{\bullet}=z_1\frac{\mu_1\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\mu_2\mu_1^2}},$$

если первое и четвертое уравнения этой системы рассматривать как новые кинематические соотношения.

Система равенств (8) может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики к каноническому виду с законом сохранения энергии (9) (или см. ниже (17)) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [5, 6]).

Поиск как интеграла (9), так и (13) (см. далее) опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий [5, 6].

П р е д л о ж е н и е 3. *Если функция* $\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)$ *является функцией лишь* α:

$$\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)=\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha),\tag{12}$$

то система (7) *имеет первый интеграл следующего вида*:

$$\begin{gathered}\Phi_2(z_1;\alpha)=z_1\Phi_0(\alpha)=C_2=\text{const},\\ \Phi_0(\alpha)=f_1(\alpha)\exp\left\{2\int_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(b)db\right\}.\end{gathered}\tag{13}$$

Если выполнено свойство (12) и функции $\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)$ и $\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)$ также являются функциями лишь α:

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)=\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha),\quad \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)=\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha),\tag{14}$$

то в системе (7) появляется независимая подсистема третьего порядка, состоящая из первых трех уравнений (уравнение на $\beta^{\bullet}$ отделяется).

В частности, если выполнены свойства (8), (12), то такая независимая подсистема появляется.

П р е д л о ж е н и е 4. *Если выполнены условия* (8), (12), *то система* (7) *имеет первый интеграл следующего вида*:

$$\begin{gathered}\Phi_3(z_2,z_1;\alpha,\beta)=\\ =\beta\mp\int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{C_2f_1(b)}{f_2(b)\sqrt{C_1^2\Phi_0^2(b)-C_2^2}}db=C_3=\text{const},\end{gathered}\tag{15}$$

где, после взятия интеграла (15), *вместо постоянных* C_1^2, C_2 *можно подставить левые части равенств* (9), (13) *соответственно.*

Т е о р е м а 1. *Если выполнены условия* (8), (12), *то система* (7) *обладает полным набором, состоящим из трех первых интегралов вида* (9), (13), (15).

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ К ДВУМЕРНОМУ МНОГООБРАЗИЮ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

Несколько модифицируем систему (7), получив систему консервативную. А именно, вводится гладкое силовое поле в проекциях на оси $z_1^{\bullet}$ и $z_2^{\bullet}$, соответственно:

$$\begin{pmatrix}F_1(\beta)f_1(\alpha)\\ F_2(\alpha)f_2(\alpha)\end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$ примет вид

$$
\begin{gathered}
\alpha^{\bullet} = z_2 f_2(\alpha), \\
z_2^{\bullet} = F_2(\alpha) f_2(\alpha) - \\
- f_2(\alpha)\left[\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2^2 - \\
- \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta) z_1^2, \qquad (16) \\
z_1^{\bullet} = F_1(\beta) f_1(\alpha) - \\
- f_2(\alpha)\left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_2, \\
\beta^{\bullet} = z_1 f_1(\alpha),
\end{gathered}
$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$
\begin{gathered}
\alpha^{\bullet\bullet} - F_2(\alpha) f_2^2(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet 2} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\beta^{\bullet 2} = 0, \\
\beta^{\bullet\bullet} - F_1(\beta) f_1^2(\alpha) + 2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet}\beta^{\bullet} = 0.
\end{gathered}
$$

П р е д л о ж е н и е 5. *Если всюду справедливы равенства* (8), *то система* (16) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида:*

$$
\begin{gathered}
\Phi_1(z_2, z_1; \alpha) = z_1^2 + z_2^2 + V(\alpha,\beta) = C_1 = \mathrm{const}, \\
V(\alpha,\beta) = V_2(\alpha) + V_1(\beta) = \qquad (17) \\
= -2\int_{\alpha_0}^{\alpha} F_2(a)da - 2\int_{\beta_0}^{\beta} F_1(b)db.
\end{gathered}
$$

П р е д л о ж е н и е 6. *Пусть* $F_1(\beta) \equiv 0$. *Если функция* $\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)$ *является функцией лишь* α (*условие* (12)), *то система* (16) *имеет первый интеграл вида* (13).

Пусть $F_1(\beta) \equiv F_1^0 = \mathrm{const}$. Если выполнено свойство (12) и функции $\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)$ и $\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)$ также являются функциями лишь α (условия (14)), то в системе (16) появляется независимая подсистема третьего порядка, состоящая из первых трех уравнений (уравнение на $\beta^{\bullet}$ отделяется).

В частности, если выполнены свойства (8), (12), то такая независимая подсистема появляется.

П р е д л о ж е н и е 7. *Пусть* $F_1(\beta) \equiv 0$. *Если выполнены условия* (8), (12), *то система* (16) *имеет первый интеграл следующего вида:*

$$
\begin{gathered}
\Phi_3(z_2, z_1; \alpha, \beta) = \\
= \beta \mp \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{C_2 f_1(b)}{f_2(b)\sqrt{\Phi_0^2(b)[C_1 - V(b)] - C_2^2}} db = C_3 = \mathrm{const}, \qquad (18)
\end{gathered}
$$

где, после взятия интеграла (18), *вместо постоянных* C_1, C_2 *можно подставить левые части равенств* (17), (13) *соответственно.*

Т е о р е м а 2. *Если выполнены условия* (8), (12), *то система* (16) *обладает полным набором, состоящим из трех первых интегралов вида* (13), (17), (18).

3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ К ДВУМЕРНОМУ МНОГООБРАЗИЮ В СИЛОВОМ ПОЛЕ С ДИССИПАЦИЕЙ

Теперь несколько модифицируем систему (16). При этом получим систему с диссипацией. А именно, наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует не только коэффициент $b\delta(\alpha)$, $b > 0$, в первом уравнении системы (19) (в отличие от системы (16)), но и следующая зависимость (внешнего) силового поля в проекциях на оси $z_1^{\bullet}$ и $z_2^{\bullet}$, соответственно:

$$
\begin{pmatrix} F_1(\beta) f_1(\alpha) \\ F_2(\alpha) f_2(\alpha) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 F_1^1(\alpha) \\ z_2 F_2^1(\alpha) \end{pmatrix}.
$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$ примет вид

$$
\begin{gathered}
\alpha^{\bullet} = z_2 f_2(\alpha) + b\delta(\alpha), \\
z_2^{\bullet} = F_2(\alpha) f_2(\alpha) - \\
- f_2(\alpha)\left[\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2^2 - \\
- \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta) z_1^2 + z_2 F_2^1(\alpha), \qquad (19) \\
z_1^{\bullet} = F_1(\beta) f_1(\alpha) - \\
- f_2(\alpha)\left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_2 + z_1 F_1^1(\alpha), \\
\beta^{\bullet} = z_1 f_1(\alpha),
\end{gathered}
$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$
\begin{gathered}
\alpha^{\bullet\bullet} - \left\{ b\tilde{\delta}(\alpha) + F_2^1(\alpha) + b\delta(\alpha) \times \right. \\
\left. \times \left[2\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]\right\}\alpha^{\bullet} - \\
- F_2(\alpha) f_2^2(\alpha) + b\delta(\alpha) F_2^1(\alpha) + b^2\delta^2(\alpha) \times \\
\times \left[\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] + \\
+ \Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet 2} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\beta^{\bullet 2} = 0,
\end{gathered}
$$

$$\beta^{\bullet\bullet} - \left\{ F_1^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] \right\}\beta^\bullet -$$
$$- F_1(\beta) f_1^2(\alpha) + 2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\alpha^\bullet\beta^\bullet = 0,$$

$$\tilde{\delta}(\alpha) = \frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha}.$$

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы четвертого порядка (19) при выполнении свойств (8), (12), а также при $F_1(\beta) \equiv 0$. При этом происходит отделение независимой подсистемы третьего порядка:

$$\alpha^\bullet = z_2 f_2(\alpha) + b\delta(\alpha),$$
$$z_2^\bullet = F_2(\alpha) f_2(\alpha) - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha) z_1^2 + z_2 F_2^1(\alpha), \quad (20)$$
$$z_1^\bullet = \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha) z_1 z_2 + z_1 F_1^1(\alpha),$$

$$\beta^\bullet = z_1 f_1(\alpha). \quad (21)$$

Будем также предполагать, что для некоторого $\kappa \in \mathbf{R}$ выполнено равенство

$$\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha)\frac{f_1^2(\alpha)}{f_2^2(\alpha)} = \kappa\frac{d}{d\alpha}\ln|\Delta(\alpha)|,$$
$$\Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_2(\alpha)}, \quad (22)$$

а для некоторых $\lambda_2^0, \lambda_k^1 \in \mathbf{R}$ выполнены равенства

$$F_2(\alpha) = \lambda_2^0\frac{d}{d\alpha}\frac{\Delta^2(\alpha)}{2},$$
$$F_k^1(\alpha) = \lambda_k^1 f_2(\alpha)\frac{d}{d\alpha}\Delta(\alpha), \quad k = 1, 2. \quad (23)$$

Условие (22) назовем “геометрическим”, а условия из группы (23) – “энергетическими”.

Условие (22) названо геометрическим в том числе потому, что накладывает условие на коэффициент связности $\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\Delta(\alpha)$. Условия же группы (23) названы энергетическими в том числе потому, что силы становятся, в некотором смысле, “потенциальными” по отношению к функциям $\frac{\Delta^2(\alpha)}{2}$ и $\Delta(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду опять же относительно функции $\Delta(\alpha)$.

Т е о р е м а 3. *Пусть выполняются условия* (22) *и* (23). *Тогда система* (20), (21) *обладает тремя независимыми, вообще говоря, трансцендентными* [7, 8] *первыми интегралами.*

В общем случае первые интегралы выписываются громоздко (поскольку приходится интегрировать уравнение Абеля [9]). В частности, если $\kappa = -1$, $\lambda_1^1 = \lambda_2^1$, явный вид ключевого первого интеграла таков:

$$\Theta_1(z_2, z_1; \alpha) = G_1\left(\frac{z_2}{\Delta(\alpha)}, \frac{z_1}{\Delta(\alpha)}\right) =$$
$$= \frac{f_2^2(\alpha)(z_2^2 + z_1^2) + (b - \lambda_1^1) z_2\delta(\alpha) f_2(\alpha) - \lambda_2^0\delta^2(\alpha)}{z_1\delta(\alpha) f_2(\alpha)} =$$
$$= C_1 = \text{const}. \quad (24)$$

При этом дополнительные первые интегралы имеют следующие структуры:

$$\Theta_2(z_2, z_1; \alpha) = G_2\left(\Delta(\alpha), \frac{z_2}{\Delta(\alpha)}, \frac{z_1}{\Delta(\alpha)}\right) = C_2 = \text{const}, \quad (25)$$

$$\Theta_3(z_2, z_1; \alpha, \beta) =$$
$$= G_3\left(\Delta(\alpha), \beta, \frac{z_2}{\Delta(\alpha)}, \frac{z_1}{\Delta(\alpha)}\right) = C_3 = \text{const}. \quad (26)$$

Выражение первых интегралов (24)–(26) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\Delta(\alpha)$. Действительно, при $\kappa = -1$, $\lambda_1^1 = \lambda_2^1$ дополнительный первый интеграл системы (20) найдется из соотношения

$$d\ln|\Delta(\alpha)| = \frac{(b - u_2)du_2}{2(u_2^2 + (b - \lambda_1^1)u_2 - \lambda_2^0) - C_1\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 + (b - \lambda_1^1)u_2 - \lambda_2^0)}\right\}/2}, \quad u_2 = \frac{z_2}{\Delta(\alpha)}.$$

При этом после интегрирования вместо C_1 можно подставить левую часть равенства (24). Правая часть данного равенства выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая – в зависимости о функции $\Delta(\alpha)$.

Справедлива и теорема, в некотором смысле обратная к теореме 3.

Т е о р е м а 4. *Условия* (8), (12), (22), (23) (*например, при* $\kappa = -1$, $\lambda_1^1 = \lambda_2^1$) *являются необходимыми* *условиями существования первого интеграла* (24) *для системы* (20), (21).

4. СТРОЕНИЕ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДЛЯ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ

Если α – периодическая координата периода 2π, то система (20), (21) в условиях теоремы 3 становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним [2, 10]. При этом при $b = -\lambda_1^1 = -\lambda_2^1$ она превращается в систему консервативную, которая обладает двумя гладкими первыми интегралами:

$$\begin{gathered}\Phi_1(-b; z_2, z_1; \alpha) = \\ = z_1^2 + z_2^2 + 2bz_2\Delta(\alpha) - \lambda_2^0\Delta^2(\alpha) = \mathrm{const},\end{gathered} \tag{27}$$

$$\Phi_2(z_1; \alpha) = z_1\Delta(\alpha) = \mathrm{const}. \tag{28}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (27), (28) также является первым интегралом системы (20), (21) при $b = -\lambda_1^1 = -\lambda_2^1$. Но при $b \neq -\lambda_1^1 = -\lambda_2^1$ каждая из функций

$$\begin{gathered}\Phi_1(\lambda_1^1; z_2, z_1; \alpha) = \\ = z_1^2 + z_2^2 + (b - \lambda_1^1)z_2\Delta(\alpha) - \lambda_2^0\Delta^2(\alpha)\end{gathered} \tag{29}$$

и (28) по отдельности не является первым интегралом системы (20), (21). Однако отношение функций (29), (28) является первым интегралом системы (20), (21) (при $\kappa = -1$, $\lambda_1^1 = \lambda_2^1$) при любом b.

Вообще же, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств [11, 12].

5. СИСТЕМЫ НА ДВУМЕРНОЙ СФЕРЕ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Выше уже были выделены в качестве примеров два класса многообразий (поверхности вращения и плоскость Лобачевского), для которых применима предлагаемая методика интегрирования систем с диссипацией. Теперь отметим однопараметрическое семейство функций $f_1(\alpha)$ и $f_2(\alpha)$, определяющее метрику на двумерной сфере:

$$f_1(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sqrt{1 + \mu_1\sin^2\alpha}}, \quad \mu_1 \in \mathbf{R},$$
$$f_2(\alpha) \equiv -1,$$

при этом выделим два существенных подслучая:

$$\mu_1 = 0, \tag{30}$$

$$\mu_1 = -1. \tag{31}$$

Случай (30) формирует класс систем, соответствующих пространственному движению динамически симметричного твердого тела на нулевом уровне циклического интеграла, вообще говоря, в неконсервативном поле сил, при дополнительной зависимости силового поля от (тензора второго ранга) угловой скорости [2, 10]. Случай (31) формирует класс систем, соответствующих движению точки на сфере с естественной метрикой, индуцированной метрикой всеобъемлющего трехмерного евклидова пространства. В частности, при $\delta(\alpha) = F_2(\alpha) \equiv 0$ рассматриваемая система описывает геодезический поток на двумерной сфере. В случае (30) если $\delta(\alpha) = F_2(\alpha)/\cos\alpha$, то система описывает пространственное движение твердого тела в силовом поле $F_2(\alpha)$ под действием следящей силы [2, 3]. В частности, если $F_2(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha$, $\delta(\alpha) = \sin\alpha$, то система описывает пространственный (сферический) маятник, помещенный в поток набегающей среды, и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [2, 3, 10, 11].

Если функция $\delta(\alpha)$ не является периодической, то рассматриваемая диссипативная система является системой с переменной диссипацией с ненулевым средним (т.е. она является собственно диссипативной). Тем не менее, и в этом случае (благодаря теоремам 3 и 4) можно получить явный вид трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Последнее также определяет новые нетривиальные случаи интегрируемости динамических систем с диссипацией на касательном расслоении гладкого двумерного многообразия в явном виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шамолин М.В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53. Вып. 3. С. 209–210.
2. *Шамолин М.В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фундам. и прикл. матем. 2008. Т. 14. Вып. 3. С. 3–237.
3. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия // ДАН. 2017. Т. 475. № 5. С. 519–523.
4. *Козлов В.В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // ПММ. 2015. Т. 79. № 3. С. 307–316.
5. *Клейн Ф.* Неевклидова геометрия. Пер. с нем. Изд. 4-е, испр., обновл. М.: URSS, 2017. 352 с.
6. *Вейль Г.* Симметрия. М.: URSS, 2007.
7. *Козлов В.В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи матем. наук. 1983. Т. 38. Вып. 1. С. 3–67.
8. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.-Л.: ОГИЗ, 1947.

9. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
10. *Трофимов В.В., Шамолин М.В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. и прикл. матем. 2010. Т. 16. Вып. 4. С. 3–229.
11. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия // ДАН. 2018. Т. 482. № 5. С. 527–533.
12. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1987.

NEW CASES OF HOMOGENEOUS INTEGRABLE SYSTEMS WITH DISSIPATION ON THE TANGENT BUNDLES OF TWO-DIMENSIONAL MANIFOLDS

M. V. Shamolin[a]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

The integrability of certain classes of homogeneous dynamical systems is shown on the tangent bundles to two-dimensional manifolds. In this case, the force fields have the so-called variable dissipation and generalize the previously considered fields.

Keywords: dynamical system, integrability, dissipation, transcendental first integral