ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Октябрь 2020 **Выпуск 106. С. 179-189**

М. В. Шамолин

МГУ им. М. В. Ломоносова
Москва, Россия
shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ПРОИЗВОЛЬНОГО НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ

Показана интегрируемость классов однородных по части переменных динамических систем произвольного нечетного порядка, в которых выделяется система на касательном расслоении к гладкому конечномерному многообразию. При этом силовые поля обладают диссипацией разного знака. Библиография: 6 назв.

В настоящей работе подводится итог исследованиям автора (см., например, [**1**]–[**4**] и библиографию там же) интегрируемых однородных динамических систем с диссипацией. В частности, на основе изученных ранее частных случаев систем третьего, пятого [**3**] и седьмого, девятого порядка [**4**] удалось разработать общий подход к исследованию интегрируемых однородных по части переменных динамических систем с диссипацией произвольного нечетного порядка.

1. Системы без внешнего силового поля

Пусть v, α, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1})$, $z = (z_1, \dots, z_n)$ — фазовые переменные в системе, правые части которой суть однородные полиномы степени 2 по переменным v, z с коэффициентами, зависящими от α, β. Выбирая в качестве времени переменную q ($dq = vdt$, $d/dq = \langle\,'\,\rangle$, $v \neq 0$), будем рассматривать систему $(2n+1)$-го порядка

$$v' = \Psi(\alpha, Z)v, \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha' = -Z_n + b(Z_1^2 + \ldots + Z_n^2)\delta(\alpha),\\
&Z_n' = \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha,\beta) f_1^2(\alpha) Z_{n-1}^2 + \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha,\beta) f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) Z_{n-2}^2 + \ldots\\
&\qquad + \Gamma_{n-1,n-1}^{\alpha}(\alpha,\beta) f_{n-1}^2(\alpha) g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \ldots i_1^2(\beta_{n-2}) Z_1^2 - Z_n \Psi(\alpha, Z),\\
&Z_{n-1}' = [2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)] Z_{n-1} Z_n - \Gamma_{22}^1(\alpha,\beta) \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) Z_{n-2}^2 - \ldots\\
&\qquad - \Gamma_{n-1,n-1}^1(\alpha,\beta) \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \ldots i_1^2(\beta_{n-2}) Z_1^2 - Z_{n-1}\Psi(\alpha, Z),
\end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\begin{aligned}
Z_2' &= [2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta) + Df_{n-2}(\alpha)]Z_2Z_n - [2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta) + Dg_{n-3}(\beta_1)]f_1(\alpha)Z_2Z_{n-1} - \ldots \\
&\quad - [2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta) + Dr_1(\beta_{n-3})]f_{n-3}(\alpha)g_{n-4}(\beta_1)h_{n-5}(\beta_2)\ldots s_1(\beta_{n-4})Z_2Z_3 \\
&\quad - \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\frac{f^2_{n-1}(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)}\frac{g^2_{n-2}(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)}\frac{h^2_{n-3}(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)}\ldots\frac{r_2^2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})}i_1^2(\beta_{n-2})Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha,Z), \\
Z_1' &= [2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) + Df_{n-1}(\alpha)]Z_1Z_n - [2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)]f_1(\alpha)Z_1Z_{n-1} \\
&\quad - [2\Gamma^{n-1}_{2,n-1}(\alpha,\beta) + Dh_{n-3}(\beta_2)]f_2(\alpha)g_1(\beta_1)Z_1Z_{n-2} - \ldots - [2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) \\
&\quad + Di_1(\beta_{n-2})]f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})Z_1Z_2 - Z_1\Psi(\alpha,Z), \\
\beta_1' &= Z_{n-1}f_1(\alpha), \\
\beta_2' &= Z_{n-2}f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \\
\beta_3' &= Z_{n-3}f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h_1(\beta_2),
\end{aligned}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\beta'_{n-1} = Z_1f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1(\beta_{n-2}),$$

где

$$\Psi(\alpha,Z) = -b(Z_1^2+\ldots+Z_n^2)\widetilde{\delta}(\alpha), \quad \widetilde{\delta}(\alpha) = \frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha}, \quad DQ(w) = \frac{d\ln|Q(w)|}{dw},$$

$Z = (Z_1,\ldots,Z_n)$, $z_s = Z_sv$, $s = 1,\ldots,n$, $b \geqslant 0$, $\delta(\alpha)$, $f_k(\alpha)$, $k = 1,\ldots,n-1$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1,\ldots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1,\ldots,n-3$, …, $i_1(\beta_{n-2})$ — гладкие функции, как систему при отсутствии внешнего поля сил. При этом уравнение (1.1) отделяется, что дает возможность рассматривать уравнения (1.2) в качестве независимой системы (с n степенями свободы) на $2n$-мерном многообразии

$$N^{2n}\{Z_n,\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\} = TM^n\{Z_n,\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$$

(касательном расслоении гладкого n-мерного многообразия $M^n\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$).

Рассмотрим структуру системы (1.2). Она соответствует следующим уравнениям геодезических линий (где точкой, для порядка, обозначено дифференцирование по натуральному параметру) на касательном расслоении $TM^n\{\dot\alpha,\dot\beta_1,\ldots,\dot\beta_{n-1};\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$ гладкого многообразия $M^n\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$ (в частности, сферы, более общих поверхностей вращения и т.д. — с $n(n-1)$ ненулевыми коэффициентами связности):

$$\begin{aligned}
&\ddot\alpha + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \ldots + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2 = 0, \\
&\ddot\beta_1 + 2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \ldots + \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2 = 0, \\
&\ddot\beta_2 + 2\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 + \ldots + \Gamma^2_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2 = 0, \\
&\ddot\beta_3 + 2\Gamma^3_{\alpha3}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_3 + 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_3 + 2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\dot\beta_2\dot\beta_3 \\
&\qquad + \Gamma^3_{44}(\alpha,\beta)\dot\beta_4^2 + \ldots + \Gamma^3_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2 = 0, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\ddot\beta_{n-2} + 2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_{n-2} + 2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_{n-2} + \ldots \\
&\qquad + 2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-3}\dot\beta_{n-2} + \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2 = 0, \\
&\ddot\beta_{n-1} + 2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_{n-1} + 2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_{n-1} + \ldots + 2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-2}\dot\beta_{n-1} = 0.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Действительно, выбрав координаты Z_1, …, Z_n в касательном пространстве в виде

$$\begin{aligned}
\alpha' &= -Z_n, \\
\beta_1' &= Z_{n-1}f_1(\alpha), \\
\beta_2' &= Z_{n-2}f_2(\alpha)g_1(\beta_1),
\end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\beta_3' = Z_{n-3} f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h_1(\beta_2),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\beta_{n-1}' = Z_1 f_{n-1}(\alpha) g_{n-2}(\beta_1) h_{n-3}(\beta_2) \dots i_1(\beta_{n-2}),$$

получаем соотношения (см. (1.2))

$$\begin{gathered}
Z_1' = [2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) + Df_{n-1}(\alpha)] Z_1 Z_n - [2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)] f_1(\alpha) Z_1 Z_{n-1} \\
- [2\Gamma^{n-1}_{2,n-1}(\alpha,\beta) + Dh_{n-3}(\beta_2)] f_2(\alpha) g_1(\beta_1) Z_1 Z_{n-2} - \dots \\
- [2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})] f_{n-2}(\alpha) g_{n-3}(\beta_1) h_{n-4}(\beta_2) \dots r_1(\beta_{n-3}) Z_1 Z_2, \\
Z_2' = [2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta) + Df_{n-2}(\alpha)] Z_2 Z_n - [2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta) + Dg_{n-3}(\beta_1)] f_1(\alpha) Z_2 Z_{n-1} - \dots \\
- [2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta) + Dr_1(\beta_{n-3})] f_{n-3}(\alpha) g_{n-4}(\beta_1) h_{n-5}(\beta_2) \dots s_1(\beta_{n-4}) Z_2 Z_3 \\
- \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) \frac{f^2_{n-1}(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)} \frac{g^2_{n-2}(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)} \frac{h^2_{n-3}(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)} \dots \frac{r_2^2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})} i_1^2(\beta_{n-2}) Z_1^2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
Z_{n-1}' = [2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)] Z_{n-1} Z_n - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) Z^2_{n-2} - \dots \\
- \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) \frac{f^2_{n-1}(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2_{n-2}(\beta_1) h^2_{n-3}(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2}) Z_1^2, \\
Z_n' = \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) f_1^2(\alpha) Z^2_{n-1} + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) Z_2^2 + \dots \\
+ \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) f^2_{n-1}(\alpha) g^2_{n-2}(\beta_1) h^2_{n-3}(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2}) Z_1^2,
\end{gathered} \tag{1.5}$$

при этом уравнения (1.3) почти всюду эквивалентны совокупности (1.4), (1.5), которая присутствует в системе (1.2). Далее, в системе (1.2) также присутствуют коэффициенты при параметре $b \geqslant 0$. Однако они не нарушают консервативности, поскольку система (1.1), (1.2) при некоторых естественных условиях обладает полным набором гладких первых интегралов, а именно, $n+2$ первых интегралов, как будет показано ниже.

Предложение 1.1. *Если всюду на своей области определения справедлива система равенств*

$$\begin{gathered}
2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) f_1^2(\alpha) \equiv 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) + Df_{n-1}(\alpha) + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) f^2_{n-1}(\alpha) g^2_{n-2}(\beta_1) h^2_{n-3}(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2}) \equiv 0, \\
[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + Dg_1(\beta_1)] f_1^2(\alpha) + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) \equiv 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)] f_1^2(\alpha) \\
+ \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) f^2_{n-1}(\alpha) g^2_{n-2}(\beta_1) h^2_{n-3}(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2}) \equiv 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})] f^2_{n-2}(\alpha) g^2_{n-3}(\beta_1) h^2_{n-4}(\beta_2) \dots r_1^2(\beta_{n-3}) \\
+ \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) f^2_{n-1}(\alpha) g^2_{n-2}(\beta_1) h^2_{n-3}(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2}) \equiv 0,
\end{gathered} \tag{1.6}$$

то система (1.1), (1.2) *имеет аналитический первый интеграл вида*

$$\Phi_1(v; Z_n, \dots, Z_1) = v^2(Z_1^2 + \dots + Z_n^2) = C_1^2 = \text{const}\,. \tag{1.7}$$

Доказательство. Для простоты доказательство проведем для случая $n = 3$. Дифференцирование (1.7) в силу системы (1.1), (1.2) дает

$$
2v^2\Big[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)f_1^2(\alpha)\Big]Z_2^2Z_3
$$
$$
+ 2v^2\Big[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Big]Z_1^2Z_3
$$
$$
+ 2v^2\Big[\Big[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\Big]f_1^2(\alpha) + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Big]Z_1^2Z_2 \equiv 0,
$$

поскольку выполнены (1.6). □

Далее, будем предполагать, что в (1.4) выполенны условия

$$
f_1(\alpha) = \ldots = f_{n-1}(\alpha) = f(\alpha), \tag{1.8}
$$

при этом $g_l(\beta_1)$, $l = 1,\ldots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1,\ldots,n-3$, …, $i_1(\beta_{n-2})$, удовлетворяют преобразованным уравнениям из (1.6):

$$
\begin{aligned}
&2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + Dg_1(\beta_1) + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)g_1^2(\beta_1) \equiv 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1) + \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)g^2_{n-2}(\beta_1)h^2_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2}) \equiv 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})g^2_{n-3}(\beta_1)h^2_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1^2(\beta_{n-3})\\
&\qquad + \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)g^2_{n-2}(\beta_1)h^2_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2}) \equiv 0.
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

Таким образом, функции $g_l(\beta_1)$, $l = 1,\ldots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1,\ldots,n-3$, …, $i_1(\beta_{n-2})$ пока зависят от коэффициентов связности через систему (1.9), а ограничения на функцию $f(\alpha)$ будут даны ниже.

Предложение 1.2. *Если выполнены* (1.8), (1.9) *и*

$$
\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) = \ldots = \Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) = \Gamma_1(\alpha), \tag{1.10}
$$

то система (1.1), (1.2) *имеет гладкий первый интеграл*

$$
\Phi_2(v; Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha) = v^2\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2}\,\delta(\alpha) = C_2 = \text{const}, \tag{1.11}
$$

при этом

$$
\delta(\alpha) = A_1 f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\}, \quad A_1 = \text{const}\,. \tag{1.12}
$$

Доказательство. Для простоты доказательство проведем для случая $n = 3$. Будем искать первый интеграл в виде $v^2\sqrt{Z_1^2+Z_2^2}\Phi_0(\alpha)$. Дифференцирование последней функции в силу системы (1.1), (1.2) дает

$$
v^2\Big\{\Big[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\Big]\Phi_0(\alpha) - \frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\Big\}Z_3\sqrt{Z_1^2+Z_2^2}
$$
$$
- v^2 b\sqrt{Z_1^2+Z_2^2}(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2)\Big[\frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha}\Phi_0(\alpha) - \delta(\alpha)\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\Big].
$$

Чтобы эта производная тождественно равнялась нулю, достаточно, чтобы функция $\Phi_0(\alpha)$ удовлетворяла обыкновенному уравнению

$$
\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \Big[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\Big]\Phi_0(\alpha)
$$

и

$$
\frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha}\Phi_0(\alpha) \equiv \delta(\alpha)\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}.
$$

Но для этого, в свою очередь, достаточно, чтобы было выполнено (1.12) и функции $\Phi_0(\alpha)$ и $\delta(\alpha)$ были равны с точностью до множителя. □

Аналогичным образом доказывается следующее утверждение.

Предложение 1.3. *Если выполнены условия предложения* 1.2 *и*

$$g_1(\beta_1) = \ldots = g_{n-2}(\beta_1) = g(\beta_1), \tag{1.13}$$

при этом

$$\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) = \ldots = \Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) = \Gamma_2(\beta_1), \tag{1.14}$$

то система (1.1), (1.2) *имеет гладкий первый интеграл*

$$\Phi_3(v; Z_{n-2},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1) = v^2\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-2}^2}\,\delta(\alpha)\Psi_1(\beta_1) = C_3 = \text{const}, \tag{1.15}$$

где

$$\Psi_1(\beta_1) = g(\beta_1)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)db\right\}.$$

Благодаря предложениям 1.2, 1.3 получены два первых интеграла. Далее, рассуждая по индукции, устанавливаем аналогичные предложения (для удобства используем многоточие при ссылках на эти предложения) и приходим к следующему утверждению, которое завершает построение набора n первых интегралов.

Предложение 1.4. *Если выполнены условия предложений* 1.2, 1.3, …, *при этом*

$$\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) = \Gamma_{n-1}(\beta_2), \tag{1.16}$$

то система (1.1), (1.2) *имеет гладкий первый интеграл*

$$\Phi_n(v; Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = v^2 Z_1\delta(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\ldots\Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) = C_n = \text{const}, \tag{1.17}$$

где

$$\Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) = i_1(\beta_{n-2})\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}}\Gamma_{n-1}(b)db\right\}.$$

Предложение 1.4 доказывается прямым дифференцированием функции (1.17).

Предложение 1.5. *Пусть выполнены свойства* (1.8), (1.13), …, *нивелирующие индексы у функций* $f_k(\alpha)$, $k=1,\ldots,n-1$, $g_l(\beta_1)$, $l=1,\ldots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m=1,\ldots,n-3$, …, $i_1(\beta_{n-2})$, *а также*

$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) = \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1) = \ldots = \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\ldots = \Gamma_n(\alpha). \tag{1.18}$$

Тогда система (1.1), (1.2) *имеет гладкий первый интеграл*

$$\Phi_0(v; Z_n;\alpha) = v^2(1-2bZ_n\delta(\alpha)) = C_0 = \text{const}, \tag{1.19}$$

если

$$\delta(\alpha) = A_2\exp\left\{-\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_n(b)f^2(b)db\right\},\quad A_2 = \text{const}.$$

В частности, если выполнены (1.6), (1.8), (1.10), (1.12), (1.13), (1.18), то система (1.1), (1.2) имеет гладкий первый интеграл вида (1.19).

Предложение 1.6. *Если выполнены условия предложений* 1.3, …, 1.4, *то система* (1.1), (1.2) *имеет гладкий первый интеграл*

$$\Phi_{n+1}(\beta_{n-2},\beta_{n-1},C_{n-1},C_n) = \beta_{n-1} + \int\limits_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}}\frac{C_n i(b)}{\sqrt{C^2_{n-1}\Psi^2_{n-2}(b)-C_n^2}}\,db = C_{n+1} = \text{const}, \tag{1.20}$$

где после взятия интеграла (1.20) *вместо постоянных* C_{n-1}, C_n *можно подставить левые части соответствующих равенств.*

Предложения 1.5 и 1.6 доказываются путем построения соответствующих первых интегралов через первые интегралы, полученные в предыдущих предложениях.

Теорема 1.1. *Если выполнены условия предложений* 1.1–1.6, *то система* (1.1), (1.2) *обладает полным набором* $(n+2)$ *гладких независимых первых интегралов вида* (1.7), (1.11), (1.15), …, (1.17), (1.19), (1.20).

Теорема 1.1 непосредственно вытекает из предложений 1.1–1.6, за исключением утверждения о том, что набор первых интегралов состоит не из $2n$, а $n+2$ только что полученных первых интегралов. Этот факт будет доказано ниже при рассмотрении расслоения исходного фазового пространства рассматриваемой системы.

2. Системы с внешним силовым полем и унимодулярные преобразования

Модифицируем систему (1.1), (1.2) при условиях (1.8), (1.10), (1.13)–(1.16), (1.18) с двумя ключевыми параметрами $b, b_1 \geqslant 0$, введя внешнее силовое поле. Если ввести такое поле, добавив коэффициент $F(\alpha)$ лишь в уравнение для Z_n' в системе (2.1), (2.2), то даже при $b_1 = 0$ полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность будет при дополнительном условии $b = 0$. Однако мы расширим введение силового поля, положив $b_1 > 0$. Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения $T^*M^n\{Z_n, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$ примет вид

$$v' = \Psi(\alpha, Z)v, \tag{2.1}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\alpha' = -Z_n + b(Z_1^2 + \ldots + Z_n^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\widetilde{f}(\alpha),\\
&Z_n' = F(\alpha) + \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) Z_{n-1}^2 + \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) g^2(\beta_1) Z_2^2 + \ldots\\
&\qquad + \Gamma_{n-1,n-1}^{\alpha}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2}) Z_1^2 - Z_n \Psi(\alpha, Z),\\
&Z_{n-1}' = [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)] Z_{n-1} Z_n - \Gamma_{22}^{1}(\alpha,\beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) Z_{n-2}^2 - \ldots\\
&\qquad - \Gamma_{n-1,n-1}^{1}(\alpha,\beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2}) Z_1^2 - Z_{n-1}\Psi(\alpha, Z),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&Z_2' = [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)] Z_2 Z_n [2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)] f(\alpha) Z_2 Z_{n-1} - \ldots\\
&\qquad - [2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3}) + Dr(\beta_{n-3})] f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\ldots s(\beta_{n-4}) Z_2 Z_3\\
&\qquad - \Gamma_{n-1,n-1}^{n-2}(\alpha,\beta) f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\ldots r(\beta_{n-3}) i^2(\beta_{n-2}) Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z),\\
&Z_1' = [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)] Z_1 Z_n - [2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)] f_1(\alpha) Z_1 Z_{n-1}\\
&\qquad - [2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2)] f(\alpha) g(\beta_1) Z_1 Z_{n-2} - \ldots\\
&\qquad - [2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di(\beta_{n-2})] f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\ldots r(\beta_{n-3}) Z_1 Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z),\\
&\beta_1' = Z_{n-1} f(\alpha),\\
&\beta_2' = Z_{n-2} f(\alpha) g(\beta_1),\\
&\beta_3' = Z_{n-3} f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\beta_{n-1}' = Z_1 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\ldots i(\beta_{n-2}),
\end{aligned}\right. \tag{2.2}$$

$$\Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + \ldots + Z_n^2)\widetilde{\delta}(\alpha) + b_1 F(\alpha)\delta(\alpha), \quad \widetilde{f}(\alpha) = \frac{\mu - \delta^2(\alpha)}{\widetilde{\delta}(\alpha)}, \quad \widetilde{\delta}(\alpha) = \frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha},$$

где $\mu = \text{const}$. При этом коэффициенты консервативной (внутренней) составляющей силового поля содержат параметр b, а неконсервативной составляющей внешнего поля — параметр b_1.

Силовое поле в уравнениях на v', Z_1', …, Z_n' определяется функцией $\Psi(\alpha, Z)$. Опишем введение силового поля в виде двумерного столбца, в первой строке которого стоят соответствующие коэффициенты из функции $\Psi(\alpha, Z)$, а во второй строке — соответствующие коэффициенты из уравнения на α'. Таким образом, совместное силовое поле (в котором также присутствуют три параметра $b, b_1 \geqslant 0$, $\mu \in \mathbf{R}$) имеет вид

$$U\begin{pmatrix} b(Z_1^2+\ldots+Z_n^2) \\ b_1F(\alpha) \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} -\widetilde{\delta}(\alpha) & \delta(\alpha) \\ \delta(\alpha) & \widetilde{f}(\alpha) \end{pmatrix},$$

где U — преобразование с определителем $-\mu$, являющееся унимодулярным преобразованием при $\mu = \pm 1$. Такое преобразование вносит в систему диссипацию (см. [**5, 6**])).

3. Интегрирование систем с диссипацией

Система (2.1), (2.2) $(2n+1)$-го порядка при условии (1.9) допускает отделение независимой подсистемы $(2n-1)$-го порядка. Введем по аналогии с (1.9) условие на $f(\alpha)$ в виде преобразованного первого равенства в (1.6):

$$2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha) \equiv 0. \tag{3.1}$$

Для полного интегрирования системы (2.2) необходимо знать, вообще говоря, $(2n-1)$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$w_n = Z_n, \quad w_{n-1} = \sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-1}^2},$$

$$w_{n-2} = \frac{Z_2}{Z_1}, \quad w_{n-3} = \frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2+Z_2^2}}, \ \ldots, \ w_1 = \frac{Z_{n-1}}{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_2^{n-2}}}$$

система (2.2) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \alpha' = -w_n + b(w_n^2+w_{n-1}^2)\delta(\alpha) + b_1F(\alpha)\widetilde{f}(\alpha), \\ w_n' = F(\alpha) + \Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha)w_{n-1}^2 - w_n\Psi(\alpha, w), \\ w_{n-1}' = \Big[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\Big]w_{n-1}w_n - w_{n-1}\Psi(\alpha, w), \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} w_s' = \pm w_{n-1}\sqrt{1+w_s^2}f(\alpha)\ldots\Big[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + \dfrac{d\ln|j(\beta_s)|}{d\beta_s}\Big], \\ \beta_s' = \pm\dfrac{w_sw_{n-1}}{\sqrt{1+w_s^2}}f(\alpha)\ldots, \quad s = 1, \ldots, n-2, \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\beta_{n-1}' = \pm\frac{w_{n-1}}{\sqrt{1+w_{n-2}^2}}f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots i(\beta_{n-2}), \tag{3.4}$$

$$\Psi(\alpha, w) = -b(w_n^2+w_{n-1}^2)\widetilde{\delta}(\alpha) + b_1F(\alpha)\delta(\alpha), \quad \widetilde{f}(\alpha) = \frac{\mu-\delta^2(\alpha)}{\widetilde{\delta}(\alpha)}, \ \widetilde{\delta}(\alpha) = \frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha},$$

где многоточие в (3.3) означает одинаковые члены, а $j(\beta_s)$ — одна из функций g, h, …, зависящая от соответствующего угла β_s.

Ясно, что для полной интегрируемости системы (2.2) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (3.2), по одному — для систем (3.3) (меняя в них независимые переменные; $n-2$ штук) и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (3.4) (т.е. всего $n+1$ первых интегралов). Таким образом, после присоединения уравнения (2.1) получаем полный набор $n+2$ первых интегралов рассматриваемой системы.

Теорема 3.1. *Пусть для* $\varkappa, \lambda \in \mathbf{R}$

$$\Gamma_n(\alpha) f^2(\alpha) = \varkappa \frac{d}{d\alpha} \ln|\delta(\alpha)|, \quad F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{\delta^2(\alpha)}{2}. \tag{3.5}$$

Тогда система (2.1), (2.2) *при выполнении условиях* (1.9), (3.1) *обладает* $n+2$ *независимыми* (*вообще говоря, трансцендентными*) *первыми интегралами.*

Доказательство. Системе третьего порядка (3.2) споставим неавтономную систему второго порядка

$$\begin{gathered}
\frac{dw_n}{d\alpha} = \frac{F(\alpha) + \Gamma_n(\alpha) f^2(\alpha) w_{n-1}^2 + b w_n (w_n^2 + w_{n-1}^2)\widetilde{\delta}(\alpha) - b_1 w_n F(\alpha)\delta(\alpha)}{-w_n + b(w_n^2 + w_{n-1}^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\widetilde{f}(\alpha)}, \\
\frac{dw_{n-1}}{d\alpha} = \frac{\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] w_{n-1} w_n + b w_{n-1}(w_n^2 + w_{n-1}^2)\widetilde{\delta}(\alpha) - b_1 w_{n-1} F(\alpha)\delta(\alpha)}{-w_n + b(w_n^2 + w_{n-1}^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\widetilde{f}(\alpha)}.
\end{gathered} \tag{3.6}$$

Вводя однородные переменные $w_{n-1} = u_1\delta(\alpha)$, $w_n = u_2\delta(\alpha)$ и пользуясь (3.5), приводим систему (3.6) к виду

$$\begin{gathered}
\delta \frac{du_2}{d\delta} + u_2 = \frac{\lambda + b u_2 (u_1^2 + u_2^2)\delta^2 - b_1 \lambda u_2 \delta^2 + \varkappa u_1^2}{-u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\delta^2 + b_1\lambda(\mu - \delta^2)}, \\
\delta \frac{du_1}{d\delta} + u_1 = \frac{b u_1 (u_1^2 + u_2^2)\delta^2 - b_1 \lambda u_1 \delta^2 - \varkappa u_1 u_2}{-u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\delta^2 + b_1\lambda(\mu - \delta^2)}.
\end{gathered} \tag{3.7}$$

Далее система (3.7) приводится к уравнению первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda - b_1\lambda\mu u_2 + u_2^2 + \varkappa u_1^2}{(1-\varkappa)u_1 u_2 - b_1\lambda\mu u_1}. \tag{3.8}$$

Уравнение (3.8) имеет вид уравнения Абеля. Например, при $\varkappa = -1$ уравнение (3.8) имеет первый интеграл

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 - b_1\lambda\mu u_2 + \lambda}{u_1} = C_1 = \text{const}, \tag{3.9}$$

который в прежних переменных записывается в виде

$$\Theta_1(w_n, w_{n-1}; \alpha) = G_1\Big(\frac{w_n}{\delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\delta(\alpha)}\Big) = \frac{w_n^2 + w_{n-1}^2 - b_1\lambda\mu w_n \delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)}{w_{n-1}\delta(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \tag{3.10}$$

Используя (3.10), получаем также дополнительный первый интеграл для системы (3.2)

$$\Theta_2(w_n, w_{n-1}; \alpha) = G_2\Big(\delta(\alpha), \frac{w_n}{\delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\delta(\alpha)}\Big) = C_2 = \text{const}. \tag{3.11}$$

Выражение первого интеграла (3.11) через конечную комбинацию элементарных функций зависит, в частности, от явного вида функции $\delta(\alpha)$. Например, при $\varkappa = -1$ первый интеграл найдется из уравнения Бернулли

$$\begin{gathered}
\frac{d\delta}{du_n} = \frac{(b_1\lambda\mu - u_n)\delta + b\delta^3(U^2(C_1, u_n) + u_n^2) - b_1\lambda\delta^3}{\lambda - b_1\lambda\mu u_n + u_n^2 - U^2(C_1, u_n)}, \\
U(C_1, u_n) = \frac{1}{2}\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(\lambda - b_1\lambda\mu u_n + u_n^2)}\}, \quad u_n = \frac{w_n}{\delta(\alpha)}.
\end{gathered}$$

При этом после взятия этого интеграла вместо C_1 можно подставить левую часть (3.10) (или (3.9)).

Первые интегралы для (3.3) (после замен независимых переменных) принимают вид

$$\Theta_{2+s}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\Phi_s(\beta_s)} = C_{2+s} = \text{const}, \quad s = 1, \ldots, n-2, \tag{3.12}$$

(см. (1.15)–(1.17)). Дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (3.4), находится по аналогии с (1.20):

$$\Theta_{n+1}(\beta_{n-2}, \beta_{n-1}, C_{n-1}, C_n) = \beta_{n-1} \pm \int\limits_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}} \frac{C_n i(b)}{C_{n-1}^2 \Psi_{n-2}^2(b) - C_n^2}\, db = C_{n+1} = \text{const},$$

где (после взятия этого интеграла) вместо постоянных C_{n-1}, C_n можно подставить левые части соответствующих равенств (3.12). Кроме того, у системы (2.1), (2.2) существует гладкий первый интеграл (по аналогии с (1.19), “привязывающий” уравнение (2.1)), который, например, при $b = b_1$, $\mu = 1$ примет вид $\Theta_0(v; w_n, w_{n-1}; \alpha) = v^2(1 - 2bw_n\delta(\alpha) + b^2(w_n^2 + w_{n-1}^2)) = C_0 = \text{const}$. $\square$

Справедлива обратное утверждение к теореме 3.1.

Теорема 3.2. *Условия* (1.9), (3.1), (3.5) (*например, при* $\varkappa = -1$) *являются необходимыми условиями существования первого интеграла* (3.10) *для системы* (2.1), (2.2).

4. Первые интегралы систем с диссипацией

Если α — периодическая координата периода 2π, то система (2.1), (2.2) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним [**5, 6**]. При этом при $F(\alpha) \equiv 0$ она превращается в консервативную систему (1.1), (1.2), которая , в частности, обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (1.7), (1.11). Более того, если функция $F(\alpha)$ не равна тождественно нулю, но $b_1 = 0$, то система (2.1), (2.2) при втором условии из (3.5) обладает первым интегралом вида

$$\Theta_0(v; Z_n, \ldots, Z_1; \alpha) = v^2(Z_1^2 + \ldots + Z_n^2 + \lambda\delta^2(\alpha)) = \text{const}\,. \tag{4.1}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (4.1), (1.11) также является первым интегралом системы (2.1), (2.2), если $F(\alpha)$ отлична от тождественного нуля, но $b_1 = 0$. Однако при $b_1 > 0$ каждая из функций

$$\Theta_{b_1}(v; Z_n, \ldots, Z_1; \alpha) = v^2(Z_1^2 + \ldots + Z_n^2 - b_1\lambda\mu Z_n\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)) \tag{4.2}$$

и (1.11) по отдельности не является первым интегралом системы (2.1), (2.2). Однако отношение функций (4.2), (1.11) является первым интегралом (3.10) системы (2.1), (2.2) (при $\varkappa = -1$) при любом $b_1 > 0$.

5. Многомерный случай

Выделим существенный случай для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на $(n-1)$-мерной сфере, и для функции $\delta(\alpha)$:

$$f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \delta(\alpha) = \sin\alpha. \tag{5.1}$$

Случай (5.1) формирует класс систем (2.1), (2.2) при $\mu = 1$, соответствующих движению n-мерного динамически симметричного твердого тела на нулевых уровнях циклических интегралов в неконсервативном поле сил [**5, 6**]

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z), \tag{5.2}$$

$$\alpha' = -Z_{n-1} + b\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\sin\alpha + bF(\alpha)\cos\alpha, \tag{5.3}$$

$$Z'_{n-1} = F(\alpha) - \left(\sum_{s=1}^{n-2} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_{n-1}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - bZ_{n-1}F(\alpha)\sin\alpha, \tag{5.4}$$

$$Z'_{n-2} = Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \left(\sum_{s=1}^{n-3} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}$$
$$+ bZ_{n-2}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - bZ_{n-2}F(\alpha)\sin\alpha, \tag{5.5}$$

$$Z'_{n-3} = Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \left(\sum_{s=1}^{n-4} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}$$
$$+ bZ_{n-3}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - bZ_{n-3}F(\alpha)\sin\alpha, \tag{5.6}$$

. . . .

$$Z'_1 = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\} + bZ_1\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - bZ_1F(\alpha)\sin\alpha, \tag{5.7}$$

$$\beta'_1 = Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{5.8}$$

$$\beta'_2 = -Z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{5.9}$$

. . . .

$$\beta'_{n-3} = (-1)^n Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}}, \tag{5.10}$$

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1} Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}, \tag{5.11}$$

где

$$\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z) = -b\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha + bF(\alpha)\sin\alpha,$$

при этом b — безразмерный параметр.

Итак, система (5.2)–(5.11) может быть рассмотрена на своем фазовом $2(n-1)+1$-мерном многообразии

$$W_1 = \mathbf{R}^1_+\{v\} \times T_*\mathbf{S}^{n-1}\{Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}. \tag{5.12}$$

Ясно, что в системе (5.2)–(5.11) порядка $2(n-1)+1$ образовалась независимая система (5.3)–(5.11) порядка $2(n-1)$ на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$. При этом в независимой системе (5.3)–(5.11) порядка $2(n-1)$ образовалась еще одна независимая система (5.3)–(5.10) порядка $2n-3$ на своем $(2n-3)$-мерном многообразии. В частности, при $\delta(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ рассматриваемая система описывает геодезический поток на $(n-1)$-мерной сфере.

В случае (5.1), если $\delta(\alpha) = \dfrac{F(\alpha)}{\cos\alpha}$, то система описывает движение n-мерного твердого тела в силовом поле $F(\alpha)$ под действием следящей силы [**5, 6**]. В частности, если $F(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha$, $\delta(\alpha) = \sin\alpha$, то система эквивалентна обобщенному (сферическому) n-мерному маятнику, помещенному в некоторое неконсервативное поле, и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Кроме того, как и в случае систем меньшего порядка, если функция $\delta(\alpha)$ не является периодической, то почти всегда рассматриваемая система является системой с переменной диссипацией с ненулевым средним (т.е. она является “собственно” диссипативной). Тем не менее и в этом случае можно получить (благодаря теоремам 3.1 и 3.2) явный вид трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций, что также является новым нетривиальным случаем интегрируемости многомерных диссипативных систем в явном виде.

Литература

1. М. В. Шамолин, “Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде”, *Докл. РАН* **375**, No. 3, 343–346 (2000).
2. М. В. Шамолин, “Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле”, *Докл. РАН* **453**, No. 1, 46–49 (2013).
3. М. В. Шамолин, “Некоторые интегрируемые динамические системы третьего и пятого порядка с диссипацией”, *Пробл. мат. анал.* **97**, 155–165 (2019).
4. М. В. Шамолин, “Интегрируемые динамические системы седьмого и девятого порядка с диссипацией”, *Пробл. мат. анал.* **101**, 131–145 (2019).
5. М. В. Шамолин, “Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения”, *Фундам. прикл. мат.* **20**, No. 4, 3–231 (2015).
6. М. В. Шамолин, *Интегрируемые динамические системы с диссипацией. I. Твердое тело в неконсервативном поле*, ЛЕНАНД, М. (2019).

Статья поступила в редакцию 24 мая 2020 г.