УДК 517+531.01
DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-4-36-47

Дата поступления статьи: 10/X/2019
Дата принятия статьи: 24/X/2019

М.В. Шамолин

ЗАДАЧИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ И ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ. ЧАСТЬ 3. ЗАДАЧА КОНТРОЛЯ

© *Шамолин Максим Владимирович* — доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института механики, академик РАЕН, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 119192, Российская Федерация, г. Москва, Мичуринский пр., 1.
E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru.
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9534-0213

АННОТАЦИЯ

Данная статья является третьей работой цикла, при этом объясняются такие понятия, как сфера контроля, эллипсоид контроля, трубка контроля. Формулируются постановка задачи контроля и алгоритмы ее решения. Критерием наличия неисправности в управляемой системе, движение которой описано обыкновенными дифференциальными уравнениями, считается выход вектора контроля на его поверхность. Сначала предлагаются способы решения задачи контроля, при которых в качестве поверхности контроля выбираются сфера, эллипсоид или трубка контроля. Затем рассматривается общий способ построения поверхности контроля методом статистических испытаний. Дается постановка расширенной задачи контроля. Подготовлен материал к рассмотрению задачи диагностирования.

Ключевые слова: сфера контроля, эллипсоид контроля, трубка контроля, расширенная задача контроля.

Цитирование. Шамолин М.В. Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Часть 3. Задача контроля // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2019. Т. 25. № 4. С. 36–47. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-4-36-47.

UDC 517+531.01
DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-4-36-47

Submitted: 10/X/2019
Accepted: 24/X/2019

M.V. Shamolin

PROBLEMS OF DIFFERENTIAL AND TOPOLOGICAL DIAGNOSTICS. PART 3. THE CHECKING PROBLEM

© *Shamolin Maxim Vladimirovich* — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, leading researcher of the Institute of Mechanics, academic of the Russian Academy of Natural Sciences, Lomonosov Moscow State University, 1, Leninskie Gory, Moscow, 119192, Russian Federation.
E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru.
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9534-0213

ABSTRACT

Proposed work is the third in the cycle, therefore, we explain such notions as checking sphere, checking ellipsoid and checking tubes. The checking problem is stated and the algorithms for solving it are formulated. The criterion for a malfunction in a controlled system whose motion is described by ordinary differential equations is taken to be the attainment of a checking surface by the checking vector. We first propose the methods for solving the checking problems in which the checking surfaces are chosen in the form of a checking sphere, checking ellipsoid or checking tube. Then we consider the general techniques for constructing the checking surface by using the statistical testing method. We also give the extended statement of the checking problem. And we also prepare the material for the consideration of the problem of diagnostics.

Key words: checking sphere, checking ellipsoid, checking tubes, extended statement of the checking problem.

Citation. Shamolin M.V. *Zadachi differentsial'noi i topologicheskoi diagnostiki. Chast' 3. Zadacha kontrolya* [Problems of differential and topological diagnostics. Part 3. The checking problem]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2019, no. 25, no. 4, pp. 36–47. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-25-4-36-47 [in Russian].

1. Задача контроля

Рассмотрим динамическую систему с полностью наблюдаемым фазовым вектором x, описываемую уравнениями

$$x' = f_0(x,t), \tag{1}$$

на временном отрезке $[0,T]$. Будем полагать, что множество X^0 начальных значений x^0 фазового вектора известно и ограничено. Будем считать также, что в момент времени t_0, $0 \leqslant t_0 \leqslant T$, правая часть уравнения (1) заменяется на $f_j(x,t)$ следующим образом:

$$x' = f_j(x,t), \tag{2}$$

то есть в терминах предыдущих работ цикла [1; 2], происходит j-я неисправность из списка l неисправностей, возникновение которых возможно в системе управления движением рассматриваемого динамического объекта.

Введем в рассмотрение вектор $y(t)$, координаты которого представляют собой подмножество координат фазового вектора $x(t)$, то есть

$$y(t) = (x_{k_1}, \ldots, x_{k_m}),\ m \leqslant n. \tag{3}$$

Допустим, что существует такой вектор $y(t)$, называемый *вектором контроля*, что наблюдение за его компонентами позволит судить об исправности или неисправности системы управления объекта, то есть о наличии в правой части уравнений (1) либо функции f_0, либо одной из функций $f_j, j = 1,\ldots,l$ из (2).

Вообще, задача контроля может быть решена с помощью различных по множеству координат (размерности) векторов контроля $y(t)$. Поэтому естественно стремиться к тому, чтобы вектор контроля был меньшей размерности. Для систем со сложными нелинейными функциями f_j в (2) правильный выбор компонент вектора $y(t)$ подтверждается моделированием возникновения различных неисправностей и определением факта наличия в системе управления неисправности по наблюдению за вектором $y(t)$.

При удовлетворительных результатах определения факта неисправности конкретный набор компонент фазового вектора x принимается за вектор контроля.

Пусть даны уравнения (1), множество X^0 начальных условий x^0, время T и набор функций f_j, $j = 1, \ldots, l$, в (2). Пусть существует поверхность π_k в пространстве координат вектора $y(t)$ такая, что вектор контроля, составленный из компонент решения уравнения (1) на отрезке времени $[0, T]$, не выйдет на поверхность π_k, а вектор контроля $y(t)$, составленный из соответствующих компонент решений x любой из систем (2) с начальными условиями $x^0 = x(t_0) \in X^0$, выйдет на π_k в момент времени t_k, $t_0 \leqslant t_k \leqslant T$.

Таким образом, критерием наличия неисправности в системе управления объекта, описанного уравнениями (1), будет выход вектора контроля (3) на поверхность π_k в некоторый момент времени $t_k < T$. Назовем поверхность π_k *поверхностью контроля.*

Такая поверхность контроля π_k является, вообще говоря, функцией начальных условий x^0 и набора функций f_j, $j = 0, \ldots, l$. Построение такой поверхности контроля π_k в случае нелинейных уравнений движения (1) и (2) аналитически является достаточно трудной задачей. Однако при знании функций f_j, $j = 0, \ldots, l$, и относительной малости области начальных условий X^0 возможно построение поверхности π_k *методом статистических испытаний* (см. далее).

В дальнейшем мы рассмотрим способы построения некоторых поверхностей контроля в той постановке и в той последовательности, в которой они возникали при решении задач дифференциальной диагностики.

1.1. Сфера контроля

Рассмотрим управляемую динамическую систему, движение которой может быть описано обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$x' = f_0(x, t),\ x(t_0) = x^0 \in S^0,\ t_0 \leqslant t \leqslant T_0, \tag{4}$$

где x — n-мерный фазовый вектор функционального состояния рассматриваемой системы, $f_0(x, t)$ — определенная и непрерывная вектор-функция, S^0 — известная ограниченная с центром в начале координат радиуса R^0 сфера начальных значений, T_0 — конечное время.

Предположим, что система (4) удовлетворяет условиям существования и единственности решений (для этого достаточно сделать функцию не просто непрерывной, но непрерывно-дифференцируемой). Пусть, кроме того, тривиальное решение системы (4) асимптотически устойчиво, а сама система описывает желаемое движение, которое обеспечивается во времени в рассматриваемой области пространства при помощи координат $u(t)$ системы управления (СУ). Структура координат $u(t)$ и их параметры выбираются, исходя из цели управления

$$x(t) \equiv 0 \tag{5}$$

и условий устойчивости системы (4), полученных, например, с помощью функции Ляпунова $\nu(x, t) > 0$, то есть, осуществляя синтез управления с помощью пары

$$\{\nu(x, t); u(x, t)\}, \tag{6}$$

где $u(x, t) \in U$.

Систему (4), удовлетворяющую перечисленным условиям, обычно называют *исправной.*

Пусть, далее, в соответствии с ранее [1; 2] введенной классификацией неисправностей, в СУ движением объекта

$$\xi' = \Phi(\delta), \quad \delta = C(t)u + \phi(\sigma), \quad \sigma = E(t)s \tag{7}$$

может произойти l неисправностей

$$H = \|H_j\|_{j=1}^{l}. \tag{8}$$

Формально определим неисправность следующим образом. Априори известно, что в некоторый случайный момент времени t правая часть системы (4) изменяется каким-либо из l способов. При этом система (4) заменяется на одну из систем следующего вида:

$$\begin{gathered} x' = f_j(x, t),\ x(t_0) = x^0 \in S^0, \\ t_0 \leqslant t < T_0,\ j = 1, \ldots, l. \end{gathered} \tag{9}$$

Траектория системы (4) после возникновения неисправности *непрерывно продолжается* траекторией одной из систем (9).

Введем в рассмотрение вектор контроля (3). Задача контроля может решаться с помощью различных векторов контроля.

Предположим, что наблюдение за компонентами выбранного вектора контроля (3) дает возможность судить о том, что система (9) исправна или в этой системе произошла неисправность.

Задачу контроля переформулируем следующим образом.

В фазовом пространстве вектора контроля $y(t)$ требуется построить сферу S_R радиуса R такую, чтобы фазовые траектории вектора контроля при интегрировании системы (4) с начальными условиями из выбранной сферы S^0 в течение времени $t < T_0$ лежали внутри S_R, а траектории систем (9) пересекались с S_R.

Пусть система (4) находится в малой окрестности начала координат, а неисправности (8) таковы, что они доставляют неустойчивость системе (4) [3; 4]. В случайный момент времени происходит неисправность, то есть непрерывный переход на траекторию одной из систем (9), которая выходит из окрестности начала координат.

В этом случае, проводя розыгрыш начальных условий x^0 из ограниченного множества S^0 и с этими начальными условиями интегрируя систему (4) на интервале времени $[t_0, T_0]$, можно построить m ансамблей фазовых портретов координат вектора контроля $y(t)$. За сферу контроля S_R можно выбрать сферу, охватывающую объем ансамблей. Если через a обозначить длину отрезка от начала координат до максимально удаленной точки этого объема, то радиус R сферы S_R выбирается так, чтобы $R > a$.

Пусть, далее, система (4) находится в малой окрестности нуля под воздействием малого шума, который зададим функцией плотности $F_1(x)$ отклонений системы. Радиус R сферы S_R в этом случае выбирается так, чтобы

$$\int\limits_{\|y\|>R} F_1(x)dx << 1,$$

то есть, чтобы выход $y(t)$ за сферу означал, что в системе (4) произошла неисправность.

Изложенный подход позволяет решать задачу контроля и в случае, когда среди систем (9) имеются устойчивые системы. Траектории $y(t)$ таких систем, выходящие из S^0, также должны пересекать сферу S_R.

В любом случае необходимо найти наиболее простое решение задачи контроля, такое, однако, чтобы оно обеспечивало правильное решение основной задачи диагностики — задачи диагностирования.

Таким образом, выход изображающей точки вектора контроля $y(t)$ системы (4) на поверхности сферы S_R будет означать, что в системе произошла некоторая неисправность.

Сферу контроля S_R можно, кроме того, использовать для того, чтобы отфильтровать уже при решении задачи контроля часть систем вида (9), то есть уменьшить список l априорных неисправных систем, с помощью которого в последующем проще будет диагностировать действительно происшедшую в системе (4) неисправность.

Это можно осуществить, если указать области на сфере контроля S_R, в которые траектория j-той системы (9) не может попадать. Если такие области ненулевой меры существуют и траектории вектора контроля попадают в эти области, то j-я гипотеза отбрасывается сразу.

Рассмотрим сферу контроля S_R и квадратичную форму $(y, y') = 0$. Этим уравнением для каждой из систем (9) определяется некоторый объем траекторий вектора контроля; границу этого объема изнутри аппроксимируем конической поверхностью, пересечение которой со сферой S_R обозначим через S_R^j, $j = 1, \ldots, l$. Фазовые траектории вектора контроля $y(t)$, полученные интегрированием j-той системы (9) с начальными условиями из S^0, $R^0 < R$, будут выходить из сферы S_R через область S_R^j. Те из S_R^j, которые не пересекаются с другими при попадании в них фазовой траектории вектора контроля, сразу определяют номер неисправности. В противном случае, то есть если фазовая траектория вектора контроля попадает в области, в которые траектория j-той системы (9) не может попадать, j-я гипотеза отбрасывается сразу.

В случае $m = n$ области S_R^j можно рассматривать в качестве начальных областей при счете параметров алгоритма диагностирования.

Таким образом, уже при решении задачи контроля можно уменьшить список (9) и даже диагностировать некоторые неисправности.

1.2. Эллипсоид контроля

Одной из основных задач контроля движения управляемой системы являются сокращение избыточной информации и получение такой информации, которая позволяет не пропускать недопустимое состояние системы. В этой связи изучим другой возможный подход при решении задачи внешнетраекторного контроля.

Рассмотрим управляемую динамическую систему, движение которой описывается нелинейными дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} x' &= Ax + b\xi, \\ \xi' &= \phi(\sigma), \\ \sigma &= C^T x - \rho\xi, \end{aligned} \tag{10}$$

где x — n-мерный вектор состояния системы, A — "устойчивая" матрица с постоянными коэффициентами, b, C, ρ — постоянные матрицы, ξ — управляющее воздействие, функция ϕ принадлежит к классу допустимых функций и удовлетворяет условиям $\phi(\sigma) = 0$ при $\sigma = 0$ и $\sigma\phi(\sigma) > 0$ при $\sigma \neq 0$.

Уравнения (10) преобразуются к следующему виду:

$$\begin{aligned} \zeta' &= A\zeta + b\phi(\sigma), \\ \sigma' &= C^T\zeta - \rho\phi(\sigma). \end{aligned} \tag{11}$$

При этом для невырожденности преобразования

$$\zeta = Ax + b\xi,$$

$$\sigma = C^T x - \rho\xi$$

необходимо и достаточно, чтобы определитель

$$\begin{vmatrix} A & b \\ C^T & -\rho \end{vmatrix} \neq 0.$$

Предположим, что на координаты вектора контроля (3) наложено следующее ограничение на интервале $t \in [t_0, T_0]$ движения системы:

$$(|x_{k_1}|, \ldots, |x_{k_m}|) \leqslant (\varepsilon_1(t), \ldots, \varepsilon_m(t)), \tag{12}$$

где $\varepsilon_1(t), \ldots, \varepsilon_m(t)$ — непрерывные положительные функции, определенные на отрезке $[t_0, T_0]$.

Требуется в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n\{x\}$ найти область, в которой может находиться вектор состояния системы (11), такую, что движение системы, начавшееся в любой точке этой области, гарантирует выполнение условия (12), при этом для каждой координаты, не входящей в вектор контроля (3), в каждый момент времени $t \in [t_0, T_0]$ можно найти интервал изменения, также гарантирующий выполнение условия (11).

Поставленная задача решается методом построения для системы (11) функции Ляпунова в форме Лурье:

$$V = x^T Bx + \int\limits_0^\eta \phi(\zeta)d\zeta \tag{13}$$

с матрицей B, которая является решением матричного алгебраического уравнения Ляпунова

$$A^T B + BA = -C_1, \tag{14}$$

где C_1 — некоторая симметричная положительно определенная матрица.

Значение квадратичной формы при D

$$x^T Bx = D, \tag{15}$$

где D — некоторая положительная постоянная, определяет в фазовом пространстве эллипсоид. Матрица B задает форму *эллипсоида*, а величина D — его размер. Значения полуосей d_k этого эллипсоида определяются величинами собственных чисел λ_k матрицы B:

$$d_k = \sqrt{\frac{D}{\lambda_k}},$$

а направления главных осей совпадают с направлениями собственных векторов матрицы B.

Величину D размера эллипсоида (15) выберем таким образом, чтобы изменяющаяся поверхность функции Ляпунова (13) лежала внутри эллипсоида (15).

Таким образом, выбранный эллипсоид (15) будет областью функционирования рассматриваемой нелинейной системы (10), и он может быть выбран в качестве эллипсоида контроля.

Вариант построения областей допустимых отклонений для задачи контроля для линейных систем дифференциальных уравнений обсуждался в [5; 6].

1.3. Трубка контроля

Рассмотрим управляемую динамическую систему (4). Множество начальных условий системы (4) представляет собой сферу S_0 радиуса R_0 в пространстве фазовых переменных с центром в точке x_0, через которую проходит *программная траектория*, то есть траектория цели.

Производя розыгрыш начальных условий и интегрируя с этими начальными условиями систему (4) и системы (9) в пространстве вектора контроля (3) вокруг программной траектории, можно построить трубку такую, что траектории вектора контроля $y(t)$ на интервале времени $[t_0, T_0]$ системы (4) будут лежать внутри этой трубки, а для систем (9) — пересекаться с поверхностью трубки.

Такую трубку назовем *трубкой контроля*. Выход траектории вектора контроля рассматриваемой системы на поверхность трубки контроля будет означать, что в диагностическом пространстве рассматриваемой управляемой динамической системы произошла неисправность. Построение трубки для задачи контроля при движении по глиссаде обсуждалось в [7; 8].

Выделим в отдельный пункт методику построения поверхности контроля методом статистических испытаний [4; 9; 10].

2. Построение поверхности контроля методом статистических испытаний

Для произвольного момента времени $\bar{t}$ и номера i компоненты x_i вектора контроля $y(t), i = k_1, \ldots, k_m, m \leqslant n$, статистически оценим значения $x_{i\max}, x_{i\min}$, в пределах которых заключено значение $x_i(\bar{t})$. Для этого зададим на множестве X^0 распределение случайной величины $x(t_0)$ — начальных условий системы уравнений (1). Взяв область начальных условий в виде n-мерного куба, можно задать, например, равномерное распределение n-мерной случайной величины

$$x(t_0) = (x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0))$$

с независимыми распределениями по каждой из координат.

Статистический эксперимент будет состоять в следующем:

1) розыгрыш случайной величины $x(t_0)$;

2) вычисление значения новой случайной величины $x(\bar{t})$ — значения фазового вектора $x(t)$ в момент времени $\bar{t}$. Эта случайная величина получается как результат применения оператора $L_{f_0}^{\bar{t}}$ (соответствующего правой части системы с f_0) численного интегрирования системы (1) на отрезке времени $[t_0, \bar{t}]$ к случайной величине $x(t_0)$, то есть

$$x(\bar{t}) = L_{f_0}^{\bar{t}}(x(t_0)).$$

Тогда для выборки независимых значений случайной величины $x^j(t_0)$, $j = 1, \ldots, N_1$, где N_1 — объем выборки, получим выборку независимых значений другой случайной величины $x^j(\bar{t})$. Каждый элемент такой выборки — n-мерный вектор. Выделим значения i-й компоненты фазового вектора x и получим выборку случайной величины $x_i^j(\bar{t})$, $j = 1, \ldots, N_1$.

Из этой выборки можно найти два следующих значения:

$$x_{i\min}(\bar{t}) = \min_{j=1,\ldots,N_1} x_i^j(\bar{t}) \quad \text{и} \quad x_{i\max}(\bar{t}) = \max_{j=1,\ldots,N_1} x_i^j(\bar{t});$$

3) проводя N_2 серий по N_1 экспериментов каждая, получим две выборки новых случайных величин объемом N_2:

$$x_{i\min}^1(\bar{t}), \ldots, x_{i\min}^{N_2}(\bar{t}) \quad \text{и} \quad x_{i\max}^1(\bar{t}), \ldots, x_{i\max}^{N_2}(\bar{t}).$$

Каждая из них представляет собой выборку независимых одинаково распределенных величин $x_{i\min}$ и $x_{i\max}$ соответственно. При этих условиях распределение случайной величины

$$\frac{\bar{x} - a}{\sigma/\sqrt{N_2}},$$

где $a = Mx_{i\max}^k$ — математическое ожидание случайной величины $x_{i\max}^k$, $\sigma^2 = Dx_{i\max}^k$ — его дисперсия, а $\bar{x} = \frac{1}{N_2}\sum\limits_{k=1}^{N_2} x_{i\max}^k$ близко к нормальному с параметрами $(0, 1)$ [11; 12].

Заменив дисперсию σ^2 ее состоятельной оценкой, полученной из выборки $\sigma_{N_2}^2$, получим также распределение, близкое к нормальному, то есть к $N(0, 1)$. Теперь из соотношения

$$\lim_{N_2 \to \infty} P\left\{\left|\frac{\bar{x} - a}{\sigma_{N_2}/\sqrt{N_2}}\right| < u_\alpha\right\} = 1 - 2\alpha$$

получается доверительный интервал для математического ожидания a величины $x_{i\max}$:

$$P\left\{\bar{x} - u_\alpha \frac{\sigma_{N_2}}{\sqrt{N_2}} < a < \bar{x} + u_\alpha \frac{\sigma_{N_2}}{\sqrt{N_2}}\right\} \approx 1 - 2\alpha, \tag{16}$$

где $1-2\alpha$ — доверительная вероятность. Ширина интервала зависит от α, по значению которого определяется u_α: из таблицы значений функции

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{u_\alpha}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx,$$

и объема выборки N_2. Оценка $\sigma^2_{N_2}$ является состоятельной, если $\sigma_{N_2} = \frac{\sigma_{\max}}{N_2}$, где $\sigma_{\max}$ — стандартная ошибка в выборке $x^k_{i\max}$, вычисляемая следующим образом [13; 14]:

$$\sigma_{\max} = \sum_{k=1}^{N_2} \left(\frac{x^k_{i\max}}{N_2}\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{N_2} \frac{x^k_{i\max}}{N_2}\right)^2.$$

Таким образом, по выборке $x^k_{i\max}$, $k = 1, \ldots, N_2$, при заданной доверительной вероятности $1-2\alpha$ построен доверительный интервал для математического ожидания (16) величины $x_{i\max}$. Аналогично можно построить интервал для математического ожидания $Mx_{i\min}$.

Теперь, взяв в качестве величины

$$\bar{x}_{i\max}(\bar{t}) = \bar{x}' + u_\alpha \frac{\sigma'_{N_2}}{\sqrt{N_2}} \quad \text{и} \quad \underline{x}_{i\min}(\bar{t}) = \bar{x}'' + u_\alpha \frac{\sigma''_{N_2}}{\sqrt{N_2}},$$

получим интервал для значений фазовой координаты $x_i(\bar{t})$:

$$\underline{x}_{i\min}(\bar{t}) \leqslant x_i(\bar{t}) \leqslant \bar{x}_{i\max}(\bar{t}),$$

внутри которого будут находиться величины $x_i(\bar{t})$ с доверительной вероятностью $1-2\alpha$. Величины $\bar{x}', \bar{x}''$ и $\sigma'_{N_2}, \sigma''_{N_2}$, вообще говоря, различны, так как представляют собой статистические средние разных выборок: $x_{i\max}$ и $x_{i\min}$ соответственно.

Процедура построения поверхности контроля системы (1) на отрезке времени $[t_0, T]$ с вектором контроля $y(t)$ сводится теперь к следующему.

Методом статистических испытаний строятся оценки $\underline{x}_{i\min}(t_l)$, $\bar{x}_{i\max}(t_l)$ для каждой из координат вектора x_i контроля $y(t)$. Моменты времени t_l представляют собой величины

$$t_l = t_0 + lh, \;\; l = 1, \ldots, \left[\frac{T - t_0}{h}\right]$$

(здесь $[\ldots]$ — целая часть), где h — шаг метода численного интегрирования системы (1).

Получаем набор оценок $\underline{x}_{i\min}(t_l)$, $\bar{x}_{i\max}(t_l)$. В качестве поверхности контроля π_k возьмем границу объема, определяемого через теоретико-множественное произведение:

$$V = \prod_{i=1}^{m} \left[\min_l \underline{x}_{k_i}(t_l), \max_l \bar{x}_{k_i}(t_l)\right], \; l = 1, \ldots, \left[\frac{T - t_0}{h}\right],$$

где k_i — номера компонент, составляющих вектор контроля $y(t)$.

Эта поверхность контроля построена с доверительной вероятностью, не меньшей чем $1-2\alpha$. Для построения такой поверхности требуется $N_1 N_2$ численных экспериментов, то есть численных интегрирований системы (1) с начальными условиями $x(t_0)$, где $x(t_0)$ — n-мерная случайная величина с заданным распределением на области X^0 начальных условий;

4) для построенной поверхности контроля π_k и заданного набора функций f_i (см. (2)) методом статистических испытаний можно установить вероятность p_i выхода траектории решения системы (2) с функцией f_i в правой части на границу π_k.

Для этого на множестве X^0 начальных условий задается некоторое распределение случайной величины $x(t_0)$ — начальных условий системы (2). Затем численно интегрируется система (2) с функцией f_i в правой части на отрезке времени $[t_0, T]$. Таким образом, получается следующая последовательность:

$$x(t_l) = L^{t_l}_{f_i}(x(t_0)), \, t_l = t_0 + lh, \, l = 1, \ldots, \left[\frac{T - t_0}{h}\right].$$

Здесь $L^{t_l}_{f_i}$ — оператор метода численного интегрирования системы (2) с функцией f_i в правой части с шагом интегрирования h.

Далее формируем следующую случайную величину ξ:

$$\xi = \begin{cases} 1, & \text{если } \exists l, i : x_i(t_l) < \underline{x}_{i\,\min} \quad \text{или } x_i(t_l) > \bar{x}_{i\,\max}; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{17}$$

то есть $\xi = 1$ при выходе траектории решения системы (2) с начальными условиями $x(t_0)$ на границу поверхности контроля π_k на отрезке времени $[t_0, T]$ и $\xi = 0$ в противном случае.

Математическое ожидание ξ равно $M\xi = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p = p_i$. Оценив по выборке значений величины ξ ее математическое ожидание, получим оценку вероятности выхода траектории на поверхность контроля π_k за время $[t_0, T]$. Таким образом, в схеме опытов Бернулли с вероятностью успеха в одном опыте p_i надо определить $M\xi$ по выборке случайной величины ξ. Одним опытом в данном случае является розыгрыш значения $x(t_0)$ как случайной величины с заданным на области X^0 распределением с дальнейшим формированием последовательности $x(t_l)$, $l = 1, \ldots, N_3$, и вычислением значения ξ по правилу (17).

Статистической оценкой математического ожидания $M\xi$ является величина

$$\bar{\xi} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N_3} \xi_k}{N_3},$$

где N_3 — объем выборки случайной величины ξ. Будучи суммой большого количества независимых одинаково распределенных случайных величин ξ, величина $\bar{\xi}$ является нормально распределенной величиной с математическим ожиданием $M\xi_k = a$ и дисперсией $\sigma^2 = D\xi_k$.

Тогда

$$\lim_{N_3 \to \infty} P\left\{ \left| \frac{\bar{\xi} - a}{\sigma/\sqrt{N_3}} \right| < u_\alpha \right\} = 1 - 2\alpha,$$

где $1 - 2\alpha$ — доверительная вероятность выполнения оценки

$$\left| \frac{\bar{\xi} - a}{\sigma/\sqrt{N_3}} \right| < u_\alpha.$$

Заменив σ ее статистической оценкой σ_{N_3}, которая является состоятельной [15; 16], получим аналогичную оценку математического ожидания случайной величины $\bar{\xi}$:

$$\lim_{N_3 \to \infty} P\left\{ \left| \frac{\bar{\xi} - a}{\sigma_{N_3}/\sqrt{N_3}} \right| < u_\alpha \right\} = 1 - 2\alpha.$$

Так как $M\xi = a = p_i$, то, взяв статистические средние в виде

$$\bar{\xi} = \frac{\mu_{N_3}}{N_3},$$

где μ_{N_3} — число успехов в N_3 опытах и

$$\sigma_{N_3} = \sqrt{\frac{\mu_{N_3}}{N_3}\left(1 - \frac{\mu_{N_3}}{N_3}\right)}$$

— состоятельная оценка для $\sigma = \sqrt{D\xi_k}$ в схеме Бернулли [17–19], получим доверительный интервал для p_i:

$$\frac{\mu_{N_3}}{N_3} - \frac{u_\alpha}{\sqrt{N_3}}\sigma_{N_3} < p_i < \frac{\mu_{N_3}}{N_3} + \frac{u_\alpha}{\sqrt{N_3}}\sigma_{N_3} \tag{18}$$

с доверительной вероятностью $1 - 2\alpha$. Задавшись доверительной вероятностью $1 - 2\alpha$, величину u_α получим из таблиц (ср. с [20; 21]).

Величины σ_{N_3} и μ_{N_3} вычисляются из выборки случайной величины ξ. Таким образом, с заданной доверительной вероятностью $1-2\alpha$ найден доверительный интервал для вероятности p_i (18) выхода траектории системы (2) с функцией f_i в правой части на поверхность контроля π_k. Величина p_i характеризует надежность контроля в случае возникновения i-й списочной неисправности. Ввиду статистического характера построения поверхности контроля π_k может быть принята следующая процедура контроля и обнаружения неисправностей: при выходе траектории вектора контроля $y(t)$ на π_k включается алгоритм диагностирования неисправностей (ср. с [22–24]);

5) при попадании траектории в слой фазового пространства, прилегающий к поверхности контроля π_k с ее внутренней стороны, также может быть включен алгоритм диагностирования. Слой фазового пространства, прилежащий к поверхности π_k, при попадании траектории в который включается алгоритм диагностирования, можно представить как трубку между поверхностью π_k и поверхностью μ_k,

где μ_k — граница объема $\bar{V}$ (здесь опять имеется в виду теоретико-множественное произведение):

$$\bar{V} = \prod_{i=1}^{m} \left[\max_l \underline{x}_{k_i}(t_l), \min_l \bar{x}_{k_i}(t_l) \right], \, l = 1, \ldots, \left[\frac{T - t_0}{h} \right].$$

Таким образом, методом статистических испытаний получено решение задачи контроля, то есть способ построения в определенных доверительных пределах поверхности контроля π_k, а также найдены вероятности выхода траектории систем с той или иной возможной неисправностью из априорного списка на границу поверхности контроля π_k. Это дает возможность выбрать такую вероятность контроля, с помощью которой в последующем решается основная задача дифференциальной диагностики — задача диагностирования, то есть задача обнаружения происшедшей в системе данной конкретной неисправности, вообще говоря, конкретной неисправности из априорного списка неисправностей.

В связи с этим возникает необходимость дать *расширенную постановку задачи контроля*, позволяющую контролировать не только неисправности из априорного списка, но и "близкие" к ним, возникшие в их окрестностях.

3. Расширенная постановка задачи контроля

Рассмотрим диагностическое пространство

$$(M; O_1, \ldots, O_l; A_1, \ldots, A_3). \tag{19}$$

В пространстве (19) будут протекать процессы, описываемые уравнениями (1) и (2), а также уравнениями

$$x' = f(x, t), \tag{20}$$

обусловленными неисправностями не из априорного списка, но близкими к ним, происшедшими в их окрестностях $O_1, \ldots, O_l$ пространства (19), например, неисправностью, закон развития которой, возможно приводящий к неисправности с математическим ожиданием $a = 0$ из априорного списка, можно моделировать путем уменьшения a до нуля, изменяющейся по линейному закону

$$a(t) = a_{nom} b(t - t_0), \, t > t_0, \tag{21}$$

где a_{nom} — номинальное значение коэффициента a, а b — отрицательная постоянная. Достигнув нуля, значение a больше не меняется. Значение $a = 0$ в силу (21) может достигаться за время, отличное от времени выхода на поверхность контроля системой (1) со списочной неисправностью при $a = 0$. Неисправность (21) близка к списочной (когда $a = 0$), но не совпадает с ней.

Таким образом, динамическая система, описываемая уравнениями (20), содержит элементы с неполной информацией, и для описания такой системы используют дифференциальные включения

$$x' \in F(x, t), \, F(x, t) \in f(x, t), \tag{22}$$

где через $F(x, t)$ обозначено обусловленное возникновением неисправностей не из априорного списка множество скоростей, которые могут возникнуть в сферах влияния опорных систем (2), то есть в окрестностях $O_1, \ldots, O_l$ опорных неисправностей пространства (19).

Расширенная постановка задачи контроля (или, другими словами, постановка расширенной задачи контроля) может быть сформулирована следующим образом.

Пусть даны уравнения движения (1), ограниченное множество начальных условий X^0, время T, набор функций $f_j(x, t)$, $j = 1, \ldots, l$, в (2) и диагностическое пространство (19) [25; 26].

Требуется найти вектор контроля (3) такой, чтобы он содержал минимальное подмножество координат фазового вектора $x(t)$ состояния системы и позволял построить выпуклую поверхность контроля π_k минимального объема в пространстве координат найденного вектора $y(t)$ такую, что вектор $y(t)$, составленный из компонент решения уравнения (1) на отрезке времени $[t_0, T]$, не выходил бы на поверхность контроля π_k, а векторы контроля $y(t)$, составленные из соответствующих компонент решений любой из систем (2) и любой из систем (20), (22), обусловленных неисправностью не из априорного списка (2), но принадлежащих окрестностям $O_1, \ldots, O_l$ диагностического пространства (19) и приводящих к недопустимым отклонениям системы (1) с начальными условиями $x^0 = x(t_0) \in X^0$, выходили бы на поверхность π_k в момент времени $t_k \in [t_0, T]$ (ср. с [27; 28]).

Таким образом, критерием наличия неисправности в диагностическом пространстве объекта, движение которого описано уравнениями (1), будет выход вектора контроля $y(t)$ на поверхность контроля π_k в некоторый момент времени $t_k < T$ (ср. с [29; 30]).

В следующих частях цикла работ перейдем к постановке и решению задачи диагностирования (ср. с [31; 32]).

Литература

[1] Шамолин М.В. Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Часть 1. Уравнения движения и классификация неисправностей // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2019. Т. 25. № 1. С. 32–43.

[2] Шамолин М.В. Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Часть 2. Задача дифференциальной диагностики // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2019. Т. 25. № 3. С. 22–31.

[3] Борисенок И.Т., Шамолин М.В. Решение задачи дифференциальной диагностики // Фундамент. и прикл. матем. 1999. Т. 5. Вып. 3. С. 775–790. URL: http://www.mathnet.ru/links/595e3ba8d2482ea55b741cb75c91b4ca/fpm401.pdf.

[4] Шамолин М.В. Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики, Издание 2-е, перераб. и доп. М.: Экзамен, 2007. URL: http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Shamolin2007-2ru.pdf.

[5] Shamolin M.V. Foundations of Differential and Topological Diagnostics // J. Math. Sci. 2003. Vol. 114. № 1. P. 976–1024. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1021807110899.

[6] Пархоменко П.П., Сагомонян Е.С. Основы технической диагностики. М.: Энергия, 1981. URL: https://www.studmed.ru/parhomenko-pp-red-osnovy-tehnicheskoy-diagnostiki-kniga-1-modeli-obektov-metody-i-algoritmy-diagnoza_5853e5d7550.html.

[7] Мироновский Л.А. Функциональное диагностирование динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1980. № 8. С. 96–121. URL: http://www.mathnet.ru/links/e98eaea228af4a5515d22fb76185e5a8/at7158.pdf.

[8] Окунев Ю.М., Парусников Н.А. Структурные и алгоритмические аспекты моделирования для задач управления. М.: Изд-во МГУ, 1983.

[9] Чикин М.Г. Системы с фазовыми ограничениями // Автоматика и телемеханика. 1987. № 10. С. 38–46. RL: http://www.mathnet.ru/links/ea42bf4ed24a9fb9a3608386e29f5a24/at4566.pdf.

[10] Жуков В.П. О достаточных и необходимых условиях асимптотической устойчивости нелинейных динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1994. № 3. С. 24–36. URL: http://www.mathnet.ru/links/b6907f0c0ee94a4f45d426d179367e37/at3855.pdf.

[11] Жуков В.П. О достаточных и необходимых условиях грубости нелинейных динамических систем в смысле сохранения характера устойчивости // Автоматика и телемеханика. 2008. № 1. С. 30–38. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=at&paperid=587&option_lang=rus.

[12] Жуков В.П. О редукции задачи исследования нелинейных динамических систем на устойчивость вторым методом Ляпунова // Автоматика и телемеханика. 2005. № 12. С. 51–64. URL: http://www.mathnet.ru/links/175dd613e6d39f66120263b755ba8b36/at1475.pdf.

[13] Борисенок И.Т., Шамолин М.В. Решение задачи дифференциальной диагностики методом статистических испытаний // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2001. № 1. С. 29–31. URL: http://www.mathnet.ru/links/5fa90ac847725484c2bde066a8cc64f7/vmumm1441.pdf.

[14] Beck A., Teboulle M. Mirror Descent and Nonlinear Projected Subgradient Methods for Convex Optimization // Oper. Res. Lett. 2003. Vol. 31. № 3. P. 167–175. URL: DOI: https://doi.org/10.1016/S0167-6377(02)00231-6.

[15] Ben-Tal A., Margalit T., Nemirovski A. The Ordered Subsets Mirror Descent Optimization Method with Applications to Tomography // SIAM J. Optim. 2001. Vol. 12. № 1. P. 79–108. URL: https://pdfs.semanticscholar.org/e19f/7697c83e692d7a459b09c229d0faef3b31ea.pdf?_ga=2.188452072.1367780915.1591514604-1525477732.1586505106.

[16] Su W., Boyd S., Candes E. A Differential Equation for Modeling Nesterov's Accelerated Gradient Method: Theory and Insights // J. Machine Learning Res. 2016. № 17(153). P. 1–43. URL: https://arxiv.org/pdf/1503.01243.pdf.

[17] Шамолин М.В. Диагностика гиростабилизированной платформы, включенной в систему управления движением летательного аппарата // Электронное моделирование. 2011. 33:3. С. 121–126.

[18] Шамолин М.В. Диагностика движения летательного аппарата в режиме планирующего спуска // Электронное моделирование. 2010. 32:5. С. 31–44.

[19] Fleming W.H. Optimal Control of Partially Observable Diffusions // SIAM J. Control. 1968. Vol. 6. № 2. P. 194–214. DOI: https://doi.org/10.1137/0320021.

[20] Choi D.H., Kim S.H., Sung D.K. Energy-efficient Maneuvering and Communication of a Single UAV-based Relay // IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst. 2014. Vol. 50. № 3. P. 2119–2326. DOI:10.1109/TAES.2013.130074.

[21] Optimization of Wireless Sensor Network and UAV Data Acquisition / D.-T. Ho [et al.] // J. Intelligent Robot. Syst. 2015. Vol. 78. № 1. P. 159–179. DOI: https://doi.org/10.1007/sl0846-015-0175-5.

[22] Ceci C., Gerardi A., Tardelli P. Existence of Optimal Controls for Partially Observed Jump Processes // Acta Appl. Math. 2002. Vol. 74. № 2. P. 155–175.

[23] Rieder U., Winter J. Optimal Control of Markovian Jump Processes with Partial Information and Applications to a Parallel Queueing Model // Math. Meth. Oper. Res. 2009. Vol. 70. P. 567–596. DOI: 10.1007/s00186-009-0284-7.

[24] Power control in wireless cellular networks / M. Chiang [et al.] // Foundat. Trends Networking. 2008. Vol. 2. № 4. P. 381–533. DOI:10.1561/1300000009.

[25] Power control in wireless cellular networks / E. Altman [et al.] // IEEE Trans. Autom. Contr. 2009. Vol. 54. № 10. P. 2328–2340.

[26] Ober R.J. Balanced Parameterization of Classes of Linear Systems // SIAM J. Control Optimization. 1991. Vol. 29. № 6. P. 1251–1287. DOI:10.1137/0329065.

[27] Ober R.J., McFarlane D. Balanced Canonical Forms for Minimal Systems: A normalized Coprime Factor Approach // Linear Algebra Appl. 1989. Vol. 122–124. P. 23–64. DOI: 10.1016/0024-3795(89)90646-0.

[28] Antoulas A.C., Sorensen D.C., Zhou Y. On the Decay Rate of Hankel Singular Values and Related Issues // Systems Contr. Lett. 2002. Vol. 46. P. 323–342. DOI: 10.1016/S0167-6911(02)00147-0.

[29] Wilson D.A. The Hankel Operator and its Induced Norms // Int. J. Contr. 1985. Vol. 42. P. 65–70. DOI: 10.1080/00207178508933346.

[30] Anderson B.D. O., Jury E.I., Mansour M. Schwarz Matrix Properties for Continuous and Discrete Time Systems / Int. J. Contr. 1976. Vol. 3. P. 1–16. DOI:10.1080/00207177608922133.

[31] Peeters R., Hanzon B., Olivi M. Canonical Lossless State-Space Systems: Staircase Forms and the Schur Algorithm // Lin. Alg. Appl. 2007. Vol. 425. № 2–3. P. 404–433. DOI: 10.1016/j.laa.2006.09.029.

[32] Tang X., Wang S. A Low Hardware Overhead Self-diagnosis Technique Using ReedSolomon Codes for Self-repairing Chips // IEEE Trans. Comput. 2010. Vol. 59. № 10. P. 1309–1319. DOI:10.1109/TC.2009.182.

References

[1] Shamolin M.V. *Zadachi differentsial'noi i topologicheskoi diagnostiki. Chast' 1. Uravneniya dvizheniya i klassifikatsiya neispravnostei* [Problems of differential and topological diagnostics. Part 1. Motion equations and classification of malfunctions]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2019, vol. 25, no. 1, pp. 32–43. DOI: https://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-1-32-43 [in Russian].

[2] Shamolin M.V. *Zadachi differentsial'noi i topologicheskoi diagnostiki. Chast' 2. Zadacha differentsial'noi diagnostiki* [Problems of differential and topological diagnostics. Part II. Problem of differential diagnostics]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2019, Vol. 25, no. 3, pp. 22–31. DOI: https://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-3-22-32. [in Russian].

[3] Borisenok I.T., Shamolin M.V. *Reshenie zadachi differentsial'noi diagnostiki* [Resolving a problem of differential diagnostics]. *Fundament. i prikl. matem.* [Fundamental and Applied Mathematics], 1999, vol. 5, issue 3, pp. 775–790. Available at: http://www.mathnet.ru/links/595e3ba8d2482ea55b741cb75c91b4ca/fpm401.pdf [in Russian].

[4] Shamolin M.V. *Nekotorye zadachi differentsial'noi i topologicheskoi diagnostiki. Izdanie 2-e, pererab. i dopoln.* [Certain problems of differential and topological diagnostics. 2nd edition, revised and enlarged]. Moscow: Ekzamen, 2007. Available at: http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Shamolin2007-2ru.pdf [in Russian].

[5] Shamolin M.V. Foundations of Differential and Topological Diagnostics. *Journal of Mathematical Sciences*, 2003, vol. 114, no. 1, pp. 976–1024. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1021807110899 [in English].

[6] Parkhomenko P.P., Sagomonian E.S. *Osnovy tekhnicheskoi diagnostiki* [Foundations of technical diagnostics]. Moscow: Energiya, 1981. Available at: https://www.studmed.ru/parhomenko-pp-red-osnovy-tehnicheskoy-diagnostiki-kniga-1-modeli-obektov-metody-i-algoritmy-diagnoza_5853e5d7550.html [in Russian].

[7] Mironovskiy L.A. *Funktsional'noe diagnostirovanie dinamicheskikh sistem* [Functional diagnosis of dynamic systems]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 1980, no. 8, pp. 96–121. Available at: http://www.mathnet.ru/links/e98eaea228af4a5515d22fb76185e5a8/at7158.pdf [in Russian].

[8] Okunev Yu.M., Parusnikov N.A. *Strukturnye i algoritmicheskie aspekty modelirovaniya dlya zadach upravleniya* [Structural and algorithmic aspects of modeling for control problems]. Moscow: Izd-vo MGU, 1983. [in Russian].

[9] Chikin M.G. *Sistemy s fazovymi ogranicheniyami* [Systems with phase restrictions]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 1987, no. 10, pp. 38–46. Available at: http://www.mathnet.ru/links/ea42bf4ed24a9fb9a3608386e29f5a24/at4566.pdf [in Russian].

[10] Zhukov V.P. *O dostatochnykh i neobkhodimykh usloviyakh asimptoticheskoi ustoichivosti nelineinykh dinamicheskikh sistem* [Sufficient and necessary conditions for the asymptotic stability of nonlinear dynamical systems]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 1994, no. 55, no. 3, pp. 321–330. Available at: http://www.mathnet.ru/links/b6907f0c0ee94a4f45d426d179367e37/at3855.pdf. [in Russian].

[11] Zhukov V.P. *O dostatochnykh i neobkhodimykh usloviyakh grubosti nelineinykh dinamicheskikh sistem v smysle sokhraneniya kharaktera ustoichivosti* [On the sufficient and necessary conditions for robustness of the nonlinear dynamic systems in terms of stability retention]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 2008, no. 69, pp. 27–35. DOI: https://doi.org/10.1134/S0005117908010037 [in Russian].

[12] Zhukov V.P. *O reduktsii zadachi issledovaniya nelineinykh dinamicheskikh sistem na ustoichivost' vtorym metodom Lyapunova* [Reduction of Stability Study of Nonlinear Dynamic Systems by the Second Lyapunov Method]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 2005, no. 66, pp. 1916–1928. DOI: https://doi.org/10.1007/s10513-005-0224-9 [in Russian].

[13] Borisenok I.T., Shamolin M.V. *Reshenie zadachi differentsial'noi diagnostiki metodom statisticheskikh ispytanii* [Solving the problem of differential diagnostics by the method of statistical tests]. *Vestnik MGU. Ser. 1. Matematika. Mekhanika* [Moscow University Mechanics Bulletin], 2001, no. 1, pp. 29–31. Available at: http://www.mathnet.ru/links/5fa90ac847725484c2bde066a8cc64f7/vmumm1441.pdf [in Russian].

[14] Beck A., Teboulle M. Mirror Descent and Nonlinear Projected Subgradient Methods for Convex Optimization. *Operations Research Letters*, 2003, vol. 31, no. 3, pp. 167–175. DOI: https://doi.org/10.1016/S0167-6377(02)00231-6 [in English].

[15] Ben-Tal A., Margalit T., Nemirovski A. The Ordered Subsets Mirror Descent Optimization Method with Applications to Tomography. *SIAM J. Optimization*, 2001, vol. 12, no. 1, pp. 79–108. URL: https://pdfs.semanticscholar.org/e19f/7697c83e692d7a459b09c229d0faef3b31ea.pdf?_ga=2.188452072.1367780915.1591514604-1525477732.1586505106 [in English].

[16] Su W., Boyd S., Candes E. A Differential Equation for Modeling Nesterov's Accelerated Gradient Method: Theory and Insights. *J. Mach. Learn. Res.*, 2016, no. 17(153), pp. 1–43. Available at: https://arxiv.org/pdf/1503.01243.pdf. [in Russian].

[17] Shamolin M.V. *Diagnostika girostabilizirovannoi platformy, vklyuchennoi v sistemu upravleniya dvizheniem letatel'nogo apparata* [Diagnostics of Gyro-Stabilized Platform, Included in the Aircraft Motion Control System]. *Elektronnoe modelirovanie* [Electronic Modeling], 2011, vol. 33, no. 3, pp. 121–126. [in Russian].

[18] Shamolin M.V. *Diagnostika dvizheniya letatel'nogo apparata v rezhime planiruyushchego spuska* [Diagnostics of Aircraft Motion in Planning Descent Mode]. *Elektronnoe modelirovanie* [Electronic Modeling], 2010, vol. 32, no. 5, pp. 31–44. [in Russian].

[19] Fleming W.H. Optimal Control for Partially Observable Diffusions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1968, vol. 6, no. 2, pp. 194–214. DOI: https://doi.org/10.1137/0320021 [in English].

[20] Choi D.H., Kim S.H., Sung D.K. Energy-efficient Maneuvering and Communication of a Single UAV-based Relay. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2014, vol. 50, no. 3, pp. 2119–2326. DOI: 10.1109/TAES.2013.130074. [in English].

[21] Ho D.-T., Grotli E.I., Sujit P.B., Johansen T.A., Sousa J.B. Optimization of Wireless Sensor Network and UAV Data Acquisition. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, April 2015, vol. 78, issue 1, pp. 159–179. DOI: https://doi.org/10.1007/sl0846-015-0175-5 [in English].

[22] Ceci C., Gerardi A., Tardelli P. Existence of Optimal Controls for Partially Observed Jump Processes. *Acta Applicandae Mathematica*, 2002, vol. 74, no. 2, pp. 155–175. DOI:10.1023/A:1020669212384. [in English].

[23] Rieder U., Winter J. Optimal Control of Markovian Jump Processes with Partial Information and Applications to a Parallel Queueing Model. *Mathematical Methods of Operational Research*, 2009, vol. 70, pp. 567–596. DOI: 10.1007/s00186-009-0284-7. [in English].

[24] Chiang M., Tan C.W., Hande P., Lan T. Power control in wireless cellular networks. *Foundations and Trends in Networking*, 2008, vol. 2, no. 4, pp. 381–533. DOI:10.1561/1300000009 [in English].

[25] Altman E., Avrachenkov K., Menache I., Miller G., Prabhu B.J., Shwartz A. Power control in wireless cellular networks. *IEEE Transactions Autom. Contr.*, 2009, Vol. 54, No. 10, pp. 2328–2340. [in English].

[26] Ober R.J. Balanced parameterization of classes of linear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1991, vol. 29, no. 6, pp. 1251–1287. DOI:10.1137/0329065 [in Russian].

[27] Ober R.J., McFarlane D. Balanced Canonical Forms for Minimal Systems: A normalized Coprime Factor Approach. *Linear Algebra and its Applications*, 1989, vol. 122-124, pp. 23–64. DOI: 10.1016/0024-3795(89)90646-0 [in English].

[28] Antoulas A.C., Sorensen D.C., Zhou Y. On the Decay Rate of Hankel Singular Values and Related Issues. *Syst. Contr. Lett.*, 2002, vol. 46, pp. 323–342. DOI: 10.1016/S0167-6911(02)00147-0. [in English].

[29] Wilson D.A. The Hankel Operator and its Induced Norms. *International Journal on Control*, 1985, vol. 42, pp. 65–70. DOI: 10.1080/00207178508933346 [in English].

[30] Anderson B.D. O., Jury E.I., Mansour M. Schwarz Matrix Properties for Continuous and Discrete Time Systems. *International Journal on Control*, 1976, vol. 3, pp. 1–16. DOI: 10.1080/00207177608922133. [in English].

[31] Peeters R., Hanzon B., Olivi M. Canonical Lossless State-Space Systems: Staircase Forms and the Schur Algorithm. *Linear Algebra and its Applications*, 2007, vol. 425, no. 2-3, pp. 404–433. DOI: 10.1016/j.laa.2006.09.029. [in English].

[32] Tang X., Wang S. A low hardware overhead self-diagnosis technique using reed-solomon codes for self-repairing chips. *IEEE Transactions on Computers*, 2010, vol. 59, no. 10, pp. 1309–1319. DOI: 10.1109/TC.2009.182. [in English].