Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Материалы Всероссийской конференции
с международным участием
«Теория управления и математическое моделирование»,
посвященной памяти
профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова

Ижевск, Россия
15–19 июня 2020 г.

Ижевск
2020

УДК 517.9 (О63)
ББК 22.161.6я431, 22.161.8я431, 22.19я431, 22.181я431
Т338

Т338 Теория управления и математическое моделирование: Материалы Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова (Ижевск, Россия, 15–19 июня 2020 г.). — Ижевск: Издательский центр «Удмуртский университет», 2020. — 370 с.

ISBN 978–5–4312–0790–7

В сборнике анонсируются результаты исследований по теории дифференциальных уравнений, математической теории управления, математическому моделированию, общей топологии. Представлены следующие научные направления: теория устойчивости, теория управления, функционально-дифференциальные уравнения, управление динамическими системами в условиях конфликта и неопределенности, задачи оценивания и идентификации в динамических системах, обратные задачи, краевые задачи, численные алгоритмы решения задач оптимального управления, краевых задач, математическое моделирование в механике сплошной среды, математическое моделирование в механике жидкости и газа, математическое моделирование в экономике, общая топология.

УДК 517.9
ББК 22.161.6, 22.161.8, 22.19

ISBN 978–5–4312–0790–7

Задачи с экспоненциальной зависимостью гамильтониана от импульсной переменной нетипичны для теории уравнений Гамильтона–Якоби. Вместе с тем такие уравнения возникают в прикладных исследованиях, в частности, в молекулярной генетике [3]. Ранее уравнение с гамильтонианом вида (3) исследовалось (см., например, [4]) в ограниченной по x области $G_0 = \{(t,x) |\, 0 < t < T,\, -1 \leqslant x \leqslant 1\}$ в случае $f(x) = (x+1)/2$, $g(x) = (1-x)/2$.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 20–01–00362.

1. *Субботин А.И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. Москва: Наука, 1991.
2. *Crandall M.G., Lions P.-L.* Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Transactions of the American Mathematical Society. 1983. Vol. 277. No. 1. Pp. 1–42.
3. *Saakian D.B., Rozanova O., Akmetzhanov A.* Dynamics of the Eigen and the Crow–Kimura models for molecular evolution // Physical Review E. 2008. Vol. 78. 041908.
4. *Субботина Н.Н., Шагалова Л.Г.* Конструкция непрерывного минимаксного / вязкостного решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана с непродолжимыми характеристиками // Труды ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20. № 4. С. 247–257.

Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией

М. В. Шамолин
Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова
e-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

В работе показана интегрируемость классов однородных по части переменных динамических систем нечетного (третьего, пятого, седьмого и девятого) порядка, в которых выделяется система на касательном расслоении к гладкому многообразию. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией разного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает ранее рассмотренные.

Дать общее определение системы с диссипацией довольно затруднительно. В каждом случае иногда это может быть сделано: вносимые в систему определенные коэффициенты указывают в одних областях фазового пространства на рассеяние энергии, а в других областях — на ее подкачку. Это и приводит к потере известных первых интегралов, являющимися гладкими функциями [1].

Исследуются системы нечетного порядка (ср. с [2, 3]). Мы проиллюстрируем подход на примере систем третьего порядка. Пусть v, α, z — переменные в гладкой системе, правые части которой — однородные полиномы по переменным v, z с коэффициентами, зависящими от α. Выбирая в качестве независимой переменной q ($dq = vdt$, $d/dq =<'>$), а также переменную Z ($z = Zv$), система перепишется как

$$v' = v\Psi(\alpha, Z),\ \Psi(\alpha, Z) = a(\alpha) + b(\alpha)Z + c(\alpha)Z^2, \tag{1}$$

$$\alpha' = g(\alpha) + h(\alpha)Z + i(\alpha)Z^2,\ Z' = d(\alpha) + e(\alpha)Z + f(\alpha)Z^2 - Z\Psi(\alpha, Z), \tag{2}$$

при этом уравнение (1) отделяется. Особняком стоит случай

$$d(\alpha) \equiv e(\alpha) \equiv f(\alpha) \equiv 0. \tag{3}$$

Тогда система (1), (2) имеет аналитический первый интеграл

$$\Phi_1(v; Z) = z = vZ = C_1 = \text{const}. \tag{4}$$

Если выполнены следующие условия $a(\alpha) = h^2(\alpha)c(\alpha)/i^2(\alpha)$, $b(\alpha) = h(\alpha)c(\alpha)/i(\alpha)$, $g(\alpha) = h^2(\alpha)/i(\alpha)$, где $c(\alpha)$, $h(\alpha)$, $i(\alpha)$ — гладкие функции на своей области определения, то система (1), (2) при условии (3) имеет два гладких первых интеграла, а именно, (4), а также $\Phi_0(v; Z; \alpha) = v^2(\gamma(\alpha) + \epsilon(\alpha)Z) = C_0 = \text{const}$, где $\gamma(\alpha)$ и $\epsilon(\alpha)$ — некоторые гладкие функции.

Внутреннее силовое поле (зависящее от функций $c(\alpha)$, $h(\alpha)$ и $i(\alpha)$) в системе (1), (2) при условии (3) не нарушает консервативности системы. Ограничимся частным случаем системы (1), (2):

$$v' = v\Psi(\alpha, Z),\ \Psi(\alpha, Z) = -b_0 Z^2 \tilde{\delta}(\alpha),\ \tilde{\delta}(\alpha) = \frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha}, \tag{5}$$

$$\alpha' = -Z + b_0 Z^2 \delta(\alpha),\ Z' = -Z\Psi(\alpha, Z), \tag{6}$$

$b_0 \geqslant 0$ — параметр, $\delta(\alpha)$ — некоторая гладкая функция, как систему при отсутствии внешнего поля сил. Система (5), (6) имеет два гладких первых интеграла: $\Phi_0(v; Z; \alpha) = v^2(1 - 2b_0 Z\delta(\alpha)) = C_0 = \text{const}$, $\Phi_1(v; Z) =$

$vZ = C_1 = \mathrm{const}$. Другими словами, независимая подсистема (6) на многообразии $N^2\{Z;\alpha\}$ имеет рациональный по Z первый интеграл вида $\Phi(Z;\alpha) = (1 - 2b_0 Z\delta(\alpha))/Z^2 = C = \mathrm{const}$, не имеющий существенно особых точек. Тогда подсистема (6) не имеет асимптотических предельных множеств.

Добавляя в систему (5), (6) внешнее поле $F(\alpha)$ при $b_0 > 0$:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \tag{7}$$

$$\alpha' = -Z + b_0 Z^2 \delta(\alpha), \; Z' = F(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z), \tag{8}$$

создается впечатление, что система осталась консервативной (что имеет место при $b_0 = 0$). Консервативность «подтвердилась» бы наличием двух гладких интегралов. Действительно, при некотором условии у системы (7), (8) существует гладкий первый интеграл $\Phi_1(v;Z;\alpha) = v^2(Z^2 + F_1(\alpha)) = C_1 = \mathrm{const}$, $dF_1(\alpha)/d\alpha = 2F(\alpha)$, структура которого напоминает интеграл полной энергии. Но дополнительного гладкого интеграла система не имеет.

Если $F(\alpha) = \delta(\alpha)\tilde{\delta}(\alpha)$, то система (7), (8) имеет два независимых (один, вообще говоря, трансцендентный и один гладкий) первых интеграла: $\Phi_0(v;Z;\alpha) = v^2\left(1 - b_0 Z\delta(\alpha) - b_0(Z^2 + \delta^2(\alpha)) \arctan \delta(\alpha)/Z\right) = C_0 = \mathrm{const}$, $\Phi_1(v;Z;\alpha) = v^2(Z^2 + \delta^2(\alpha)) = C_1 = \mathrm{const}$.

Модифицируем далее систему (7), (8), при наличии двух ключевых параметров $b_0, b_1 \geqslant 0$, введя внешнее поле. Получим систему

$$\begin{gathered} v' = v\Psi(\alpha, Z), \Psi(\alpha, Z) = -b_0 Z^2 \tilde{\delta}(\alpha) + b_1 F(\alpha)\delta(\alpha), \\ \tilde{f}(\alpha) = (\mu - \delta^2(\alpha))/\tilde{\delta}(\alpha), \; \mu = \mathrm{const}, \end{gathered} \tag{9}$$

$$\alpha' = -Z + b_0 Z^2 \delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\tilde{f}(\alpha), \; Z' = F(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z). \tag{10}$$

Мы ввели поле, добавив коэффициент $F(\alpha)$ в уравнение на Z' системы (7), (8), и убедились, что полученная система не будет консервативной. Консервативность будет при условии: $b_0 = 0$. Расширим введение силового поля, положив $b_1 > 0$. Система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения $TM^1\{Z;\alpha\}$ примет вид (9), (10). Только что было введено диссипативное силовое поле с помощью унимодулярного преобразования.

Теорема. *Если выполнено условие $F(\alpha) = \delta(\alpha)\tilde{\delta}(\alpha)$, то система (9), (10) обладает полным набором — двумя (одним гладким и одним, вообще говоря, трансцендентным) интегралами.*

1. *Шамолин М.В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 1: Твердое тело в неконсервативном поле. М.: ЛЕНАНД, 2019.
2. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией // Доклады РАН. 2019. Т. 489. № 6. С. 592–598.
3. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией // Доклады РАН. 2019. Т. 487. № 4. С. 381–386.