Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова
Российской академии наук

УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

(*конференция Пятницкого*)

Материалы
XV Международной научной конференции
(3-5 июня 2020 г., Москва)

Под общей редакцией д.ф.-м.н. В. Н. Тхай

НАУЧНОЕ ЭЛЕКТРОННОЕ ИЗДАНИЕ

Москва
ИПУ РАН
2020

УДК 681.51
ББК 32.96
У81

Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого) [Электронный ресурс]: Материалы XV Междунар. научн. конфер. (3-5 июн. 2020 г., Москва) / под общ. ред. В. Н. Тхай ; Ин-т проблем упр. им. В. А. Трапезникова Рос. акад. наук. – Электрон. текстовые дан. (1 файл: 8,3 Мб). – М.: ИПУ РАН, 2020. – 1 электрон. опт. диск (CD-R). – Систем. требования: Pentium 4; 1,3 ГГц и выше; Internet Explorer ; Acrobat Reader 4.0 или выше. – Загл. с экрана. – ISBN 978-5-91450-246-8. – № госрегистрации: 0322002427.

В научное электронное издание включены материалы XV Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого). Рассматриваются вопросы устойчивости, стабилизации, управления, колебаний, нелинейной динамики в различных областях.

Сборник материалов конференции предназначен для научных работников и специалистов в области фундаментальной теории управления, теории устойчивости, теории колебаний, прикладных задач управления.

Утверждено к изданию Программным комитетом конференции

ISBN 978-5-91450-246-8

XV Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого) проводится Федеральным государственным бюджетным учреждением науки Институтом проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук при поддержке Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН (ОЭММПУ РАН). Конференция проводится при информационной поддержке IEEE Russia Section.

Основные научные направления XV Конференции: общие вопросы теории устойчивости и стабилизации движения; общие вопросы и методы теории нелинейных колебаний; методы функций Ляпунова; гладкая и негладкая динамика; вопросы управляемости и наблюдаемости; проблемы робастного управления; управление в механических и электромеханических системах; управление роботами и мехатронными системами; колебания, устойчивость и стабилизация в сетевых и взаимосвязанных системах, устойчивость и управление гибридными системами и системами с переключениями.

Конференция проводится один раз в два года. Ранее конференция проходила (до 2004 г. — в формате Международного семинара): в Таллине (1987), в Москве (1992), в Самаре (1994), в Москве (1996, 1998, 2000, 2002, 2004, 2006, 2008, 2010, 2012, 2016, 2018).

УДК 531.01

Первые интегралы систем нечетного порядка с диссипацией

М. В. Шамолин

МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, РФ
shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

В работе показана интегрируемость классов однородных по части переменных динамических систем нечетного (третьего, пятого, седьмого и девятого) порядка, в которых выделяется система на касательном расслоении к гладкому многообразию. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией разного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает ранее рассмотренные.

Ключевые слова: динамическая система, диссипация, интегрируемость

Дать общее определение системы с диссипацией довольно затруднительно. В каждом случае иногда это может быть сделано: вносимые в систему определенные коэффициенты указывают в одних областях фазового пространства на рассеяние энергии, а в других областях — на ее подкачку. Это и приводит к потере известных первых интегралов, являющимися гладкими функциями [1].

Исследуются системы нечетного порядка (ср. с [2, 3]). Мы проиллюстрируем подход на примере систем третьего порядка. Пусть v, α, z — переменные в гладкой системе, правые части которой — однородные полиномы по переменным v, z с коэффициентами, зависящими от α. Выбирая в качестве независимой переменной q ($dq = vdt$, $d/dq =<'>$), а также переменную Z ($z = Zv$), система перепишется как

$$v' = v\Psi(\alpha, Z),\ \ \Psi(\alpha, Z) = a(\alpha) + b(\alpha)Z + c(\alpha)Z^2, \tag{1}$$

$$\begin{gathered} \alpha' = g(\alpha) + h(\alpha)Z + i(\alpha)Z^2, \\ Z' = d(\alpha) + e(\alpha)Z + f(\alpha)Z^2 - Z\Psi(\alpha, Z), \end{gathered} \tag{2}$$

при этом уравнение (1) отделяется. Особняком стоит случай

$$d(\alpha) \equiv e(\alpha) \equiv f(\alpha) \equiv 0. \tag{3}$$

Тогда система (1), (2) имеет аналитический первый интеграл

$$\Phi_1(v; Z) = z = vZ = C_1 = \text{const}. \tag{4}$$

Если выполнены следующие условия $a(\alpha) = h^2(\alpha)c(\alpha)/i^2(\alpha)$, $b(\alpha) = h(\alpha)c(\alpha)/i(\alpha)$, $g(\alpha) = h^2(\alpha)/i(\alpha)$, где $c(\alpha)$, $h(\alpha)$, $i(\alpha)$ — произвольные гладкие функции на своей области определения, то система (1), (2) при условии (3) имеет два гладких первых интеграла, а именно, (4), а также $\Phi_0(v; Z; \alpha) = v^2(\gamma(\alpha) + \epsilon(\alpha)Z) = C_0 = \mathrm{const}$, где $\gamma(\alpha)$ и $\epsilon(\alpha)$ — некоторые гладкие функции.

Внутреннее силовое поле (зависящее от функций $c(\alpha)$, $h(\alpha)$ и $i(\alpha)$) в системе (1), (2) при условии (3) не нарушает консервативности системы. Ограничимся частным случаем системы (1), (2):

$$v' = v\Psi(\alpha, Z),\ \Psi(\alpha, Z) = -b_0 Z^2 \tilde{\delta}(\alpha),\ \tilde{\delta}(\alpha) = \frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha}, \tag{5}$$

$$\alpha' = -Z + b_0 Z^2 \delta(\alpha),\ Z' = -Z\Psi(\alpha, Z), \tag{6}$$

$b_0 \geqslant 0$ — параметр, $\delta(\alpha)$ — некоторая гладкая функция, как систему при отсутствии внешнего поля сил. Система (5), (6) имеет два гладких первых интеграла: $\Phi_0(v; Z; \alpha) = v^2(1 - 2b_0 Z\delta(\alpha)) = C_0 = \mathrm{const}$, $\Phi_1(v; Z) = vZ = C_1 = \mathrm{const}$.

Другими словами, независимая подсистема (6) на многообразии $N^2\{Z; \alpha\}$ имеет рациональный по Z первый интеграл вида $\Phi(Z; \alpha) = (1 - 2b_0 Z\delta(\alpha))/Z^2 = C = \mathrm{const}$, не имеющий существенно особых точек. Тогда подсистема (6) не имеет асимптотических предельных множеств.

Добавляя в систему (5), (6) внешнее поле $F(\alpha)$ при $b_0 > 0$:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \tag{7}$$

$$\alpha' = -Z + b_0 Z^2 \delta(\alpha),\ Z' = F(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z), \tag{8}$$

создается впечатление, что система осталась консервативной (что имеет место при $b_0 = 0$). Консервативность «подтвердилась» бы наличием двух гладких интегралов. Действительно, при некотором условии у системы (7), (8) существует гладкий первый интеграл $\Phi_1(v; Z; \alpha) = v^2(Z^2 + F_1(\alpha)) = C_1 = \mathrm{const}$, $dF_1(\alpha)/d\alpha = 2F(\alpha)$, структура которого напоминает интеграл полной энергии. Но дополнительного гладкого первого интеграла система не имеет.

Если $F(\alpha) = \delta(\alpha)\tilde{\delta}(\alpha)$, то система (7), (8) имеет два независимых (один, вообще говоря, трансцендентный и один гладкий) первых интеграла: $\Phi_0(v; Z; \alpha) = v^2\left(1 - b_0 Z\delta(\alpha) - b_0(Z^2 + \delta^2(\alpha)) \arctan \delta(\alpha)/Z\right) = C_0 = \mathrm{const}$, $\Phi_1(v; Z; \alpha) = v^2(Z^2 + \delta^2(\alpha)) = C_1 = \mathrm{const}$.

Модифицируем далее систему (7), (8), при наличии двух ключевых параметров $b_0, b_1 \geqslant 0$, введя внешнее поле. Получим систему

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \Psi(\alpha, Z) = -b_0 Z^2 \tilde{\delta}(\alpha) + b_1 F(\alpha)\delta(\alpha),$$
$$\tilde{f}(\alpha) = (\mu - \delta^2(\alpha))/\tilde{\delta}(\alpha),\ \mu = \mathrm{const}, \tag{9}$$

$$\alpha' = -Z + b_0 Z^2 \delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\tilde{f}(\alpha),\ Z' = F(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z). \tag{10}$$

Мы ввели поле, добавив коэффициент $F(\alpha)$ в уравнение на Z' системы (7), (8), и убедились, что полученная система не будет консервативной. Консервативность будет при условии: $b_0 = 0$. Расширим введение силового поля, положив $b_1 > 0$. Система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения $TM^1\{Z; \alpha\}$ примет вид (9), (10). Только что было введено диссипативное силовое поле с помощью унимодулярного преобразования.

Теорема 1. *Если выполнено условие $F(\alpha) = \delta(\alpha)\tilde{\delta}(\alpha)$, то система (9), (10) обладает полным набором — двумя (одним гладким и одним, вообще говоря, трансцендентным) интегралами.*

Список литературы

1. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия // Доклады РАН. 2018. № 5. Т. 482. С. 527–533.
2. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией // Доклады РАН. 2019. № 5. Т. 485. С. 583–587.
3. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией // Доклады РАН. 2019. № 4. Т. 487. С. 381–386.

First Integrals of Odd-order Systems with Dissipation

M. V. Shamolin

M. V. Lomonosov Moscow State University, Russian Federation
shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

In this activity, we show the integrability for some classes of odd-order (third-, fifth-, seventh-, and ninth-) dynamic systems homogeneous in part of variables, in which a system on the tangent bundle of smooth manifolds is separated. Herewith, the force field is separated on both internal (conservative) and external one, which possesses the dissipation of alternating signs, and generalize the fields considered earlier.