



Общероссийский математический портал

М. В. Шамолин, Движение твердого тела с передним конусом в сопротивляющейся среде: качественный анализ и интегрируемость, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 174, 83–108

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-174-83-108>

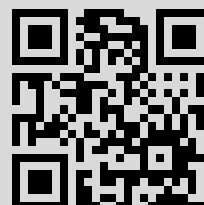
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 212.34.48.77

30 мая 2020 г., 20:41:42





ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.  
Современная математика и ее приложения.  
Тематические обзоры.  
Том 174 (2020). С. 83–108  
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-174-83-108

УДК 517.933

## ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПЕРЕДНИМ КОНУСОМ В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ: КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ

© 2020 г. М. В. ШАМОЛИН

**Аннотация.** Рассмотрена математическая модель плоскопараллельного воздействия среды на твердое тело, частью участка внешней поверхности которого является круговой конус. Приведена полная система уравнений движения в условиях квазистационарности. Получено новое семейство фазовых портретов на фазовом цилиндре квазискоростей. Также рассмотрена математическая модель пространственного воздействия среды на осесимметричное твердое тело, частью участка внешней поверхности которого является круговой конус. Исследован вопрос устойчивости по части переменных ключевого режима — пространственного прямолинейного поступательного торможения тела. Для конкретного класса тел показано, при каких инерционно-массовых характеристиках ключевой режим является устойчивым. Изучены вопросы интегрируемости.

**Ключевые слова:** твердое тело, сопротивляющаяся среда, пространственное движение, устойчивость, фазовый портрет.

## MOTION OF A RIGID BODY WITH FRONTAL CONE IN A RESISTIVE MEDIUM: QUALITATIVE ANALYSIS AND INTEGRABILITY

© 2020 M. V. SHAMOLIN

**ABSTRACT.** We consider a mathematical model of the plane-parallel action of a medium on a rigid body whose surface contains a cone-shaped being part. A complete system of equations of motion under in the quasi-stationary case is presented. A new family of phase portraits on the phase cylinder of quasi-velocity is obtained. Also, we consider a mathematical model of the influence of the medium on an axisymmetric body whose surface contains a cone-shaped part. We examine the stability with respect to a part of variables of the key mode, namely, the spatial rectilinear translational deceleration of the body. The problem of integrability is discussed.

**Keywords and phrases:** rigid body, resistive medium, spatial motion, stability, phase portrait.

**AMS Subject Classification:** 70G60

**1. Введение.** В работе изучается движение в сопротивляющейся среде твердого тела, передняя часть внешней поверхности которого имеет форму кругового конуса. При этом линия действия силы, приложенной к телу со стороны среды, меняет свою ориентацию относительно тела, поскольку раскладывается в сумму силы лобового сопротивления и боковой силы. Рассматриваемая задача является естественным обобщением задачи о движении твердого тела с передним плоским торцом в сопротивляющейся среде, когда касательные силы воздействия среды на плоский торец отсутствуют (см. [10, 11, 15, 17]).

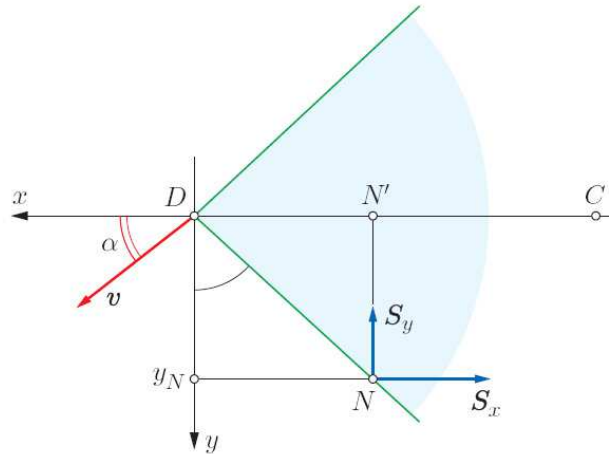


Рис. 1. Модель взаимодействия тела со средой

Основным объектом исследования является семейство тел, часть поверхности которых имеет конусообразный участок, обтекаемый средой по законам струйного обтекания. При этом поток среды предполагается однородным в том смысле, что если движущееся тело свободно, то среда на бесконечности покоится, а если (частично) закреплено (например, вращается вокруг неподвижной точки) — то скорость набегающего потока на бесконечности постоянна. Подобные условия возникают при движении тела с «большими» углами атаки в среде при струйном (см. [8, 9, 19]) или отрывном (см. [18]) обтекании.

## 2. Постановка задачи плоскопараллельного движения и невозмущенное движение.

Поставим подробно задачу плоскопараллельного движения. Предположим, что однородное твердое тело массы  $m$  совершает плоскопараллельное движение в среде и что некоторая часть внешней поверхности тела представляет собой конус, находящийся в условиях струйного обтекания средой. Конусообразная конструкция поверхности тела и гипотеза о квазистатическом воздействии среды позволяют сформулировать полную схему сил: воздействие среды на тело сводится к скользящему вектору суммарной силы  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_x + \mathbf{S}_y$ , проходящему через некоторую точку прямой  $Dy$  (рис. 1) связанной с телом системы координат  $Dxy$  ( $D$  — вершина конуса). При этом скользящий вектор силы лобового сопротивления  $\mathbf{S}_x$  параллелен оси  $Dx$  и линия его действия проходит через точку  $N$ , а скользящий вектор боковой силы  $\mathbf{S}_y$  действует вдоль прямой  $Dy$  (линия его действия проходит через точку  $D$ ). Остальная часть поверхности тела может быть размещена внутри объема, ограниченного струйной поверхностью, срывающейся с края конуса, и главное, что она не испытывает действия среды.

Координата  $y_N$  точки  $N$  приложения силы воздействия среды определяется, для простоты, лишь одним параметром — углом атаки  $\alpha$ , измеряемым между вектором скорости точки  $D$  и осью симметрии  $Dx$ :

$$y_N = R(\alpha). \quad (2.1)$$

Силы лобового и бокового сопротивления (рис. 1) будем представлять в квадратичном виде по скорости точки  $D$ :

$$\mathbf{S}_x = -s(\alpha)v^2\mathbf{e}_x, \quad \mathbf{S}_y = -b(\alpha)v^2\mathbf{e}_y, \quad |\mathbf{v}_D| = v, \quad (2.2)$$

с некоторыми коэффициентами  $s$ ,  $b$ , зависящими лишь от угла атаки. Таким образом, тройка функций  $R(\alpha)$ ,  $s(\alpha)$ ,  $b(\alpha)$  определяет воздействие среды на твердое тело в условиях квазистационарности (см. [1, 43]). В данном случае конструкция поверхности тела с передней конусообразной частью и гипотеза о квазистатическом воздействии среды позволили сформулировать полную схему сил. При этом в дальнейшем нелинейный анализ построенных систем проводится, вообще

говоря, как ранее известными методами качественной теории, так и новыми методами, полученными исключительно для возникающих систем с так называемой переменной диссипацией (см. [2, 20, 32, 33]).

Допустим, что среди движений тела существует режим прямолинейного поступательного торможения с нулевым углом атаки (невозмущенное движение). Это возможно при выполнении двух условий, а именно:

- (i) скорости движения всех точек тела параллельны оси  $Dx$ ;
- (ii) перпендикуляр, опущенный из центра масс  $C$  тела на ось  $Dy$ , принадлежит линии действия силы  $S$ .

Если формально провести ось  $Dz$ , перпендикулярную плоскости рисунка, и считать для простоты  $Dzx$  плоскостью геометрической симметрии тела, то это обеспечит выполнение условия (ii) при движении, удовлетворяющем условию (i).

Для построения динамической модели введем первые три фазовые координаты: величину  $v$  скорости точки  $D$  относительно потока (рис. 1), угол атаки  $\alpha$  и значение  $\Omega$  проекции абсолютной угловой скорости тела на ось  $Dz$ .

Коэффициенты лобового сопротивления  $s$  и боковой силы  $b$  обычно представляют в виде

$$s = \frac{1}{2}\rho P c_x, \quad b = \frac{1}{2}\rho P c_y,$$

где  $c_x, c_y$  — безразмерные коэффициенты лобового сопротивления и боковой силы соответственно ( $\rho$  — плотность среды,  $P$  — характерная поперечная площадь). Эти коэффициенты зависят от угла атаки, числа Струхала и других величин, которые в статических моделях обычно считают параметрами. Мы же в дальнейшем введем безразмерную фазовую переменную «типа Струхала»  $\omega = \Omega D_1/v$ , где  $D_1$  — характерный размер.

Таким образом, в дальнейшем в уравнениях движения возникают следующие три функции фазовых переменных:  $R, s$  и  $b$ , которые будем называть функциями воздействия среды. Ограничимся зависимостью коэффициентов  $c_x, c_y$  от угла атаки, т.е. в принципе будем считать величины  $s$  и  $b$  функциями  $\alpha$ , а величину  $R$  — функцией, вообще говоря, пары безразмерных переменных  $(\alpha, \omega)$ .

Задача о движении тела с малыми углами атаки формирует представление о нелинейных динамических системах, исследуемых в дальнейшем.

Прямолинейное поступательное (невозмущенное) движение задается уравнениями  $\alpha(t) \equiv 0, \omega(t) \equiv 0$ . Поэтому функцию  $R$  при малых  $\alpha, \omega$  примем в виде  $R = D_1(k\alpha - h_0\omega)$ , где  $k$  и  $h_0$  — некоторые постоянные,  $D_1$  — характерный размер. Функцию  $b$  при малых  $\alpha$  примем в виде  $b = b_1\alpha$ . Зависимостью же  $s$  от  $\alpha$ , в силу геометрической симметрии тела, обеспечивающей четность функции  $s$ , пренебрегаем.

Отметим, что величины  $k, h_0$  могут быть экспериментально определены путем весовых измерений в установках типа гидро- или аэродинамических труб. В литературе (см. [9, 11]) имеется также информация о теоретическом определении этих величин для отдельных случаев (для движения твердого тела с передним плоским торцом, т.е. когда боковая сила отсутствует, см. [4, 5]). Эта информация позволяет считать, что  $k > 0$ . Что же касается параметра  $h_0$ , который вносит в систему дополнительную зависимость момента силы от угловой скорости, то даже сама необходимость введения его в модель не очевидна (см. [6, 7]).

Изучение свойств движения рассматриваемых классов тел в Институте механики МГУ им. М. В. Ломоносова было начато экспериментами по регистрации движения в воде однородных круговых цилиндров (см. [9, 11]), а также тел с конусообразной передней частью. Эксперимент позволил остановиться на важных выводах. Первый: режим прямолинейного поступательного торможения цилиндра (в воде) неустойчив по отношению к углу ориентации тела. Стало возможным также определение безразмерных параметров  $k, h_0$  воздействия воды на цилиндр. Второй вывод, полученный из проведенного натурального эксперимента, следующий: при моделировании воздействия среды на тело необходимо учитывать дополнительный параметр, эквивалентный так называемой вращательной производной момента аэрогидродинамических сил по угловой скорости тела. Этот параметр вносит в систему диссипацию.

Величина коэффициента демпфирующего момента для тел с передним плоским торцом уже была оценена в [9, 11] для некоторых случаев движения в воде. Данная там оценка говорит о неустойчивости по углу атаки и угловой скорости невозмущенного движения в воде. Чисто формально, увеличивая величину коэффициента демпфирования, возможно достижение устойчивости данного движения. Невозмущенное движение твердого тела в некоторых средах (например, в глине) устойчиво в вышеописанном смысле, как показывает эксперимент (см. [4, 5]). Возможно, данная устойчивость достигается благодаря наличию в системе значительного демпфирования со стороны среды или наличию сил, касательных к пластине. В нашем же случае конусообразного тела достижение исследуемой устойчивости станет возможным благодаря наличию боковой силы.

Первый вывод, сделанный из эксперимента, заставляет нас рассматривать класс возможных движений тела при малых углах атаки (т.е. около невозмущенного движения) в качестве «опорного» для рассмотрения класса свободного торможения тела с конечными углами атаки. При этом для конусов различной формы (например, конусов с малым раствором) углы атаки вполне могут принимать значения, близкие к  $\pi/2$ , т.е. практически любое значение из интервала  $(0, \pi/2)$ . И лишь при углах, близких к  $\pi/2$ , неизбежен так называемый замыв боковой поверхности, когда предлагаемая модель перестает работать. По этой причине возникает необходимость продолжения функций воздействия среды  $R$ ,  $b$  и  $s$ , по крайней мере, на конечные углы атаки, т.е. «расширения» их области определения на интервал  $(0, \pi/2)$ . Но мы будем продолжать данные функции на всю числовую прямую хотя бы потому, что мы не знаем точные интервалы применимости предлагаемой модели. При этом дальнейшее исследование нелинейных динамических систем мы проводим при всех действительных значениях  $\alpha$ , хотя подразумеваем, что модель справедлива лишь в ограниченной области значений  $|\alpha| < \pi/2$ .

**3. Динамическая часть уравнений движения.** Динамическая часть уравнений движения (уравнения движения центра масс и изменения кинетического момента) переписется в следующем виде ( $I$  — центральный момент инерции тела,  $\sigma = CD$ ,  $C$  — центр масс) при учете условий (2.1), (2.2):

$$\dot{v} \cos \alpha - \dot{\alpha} v \sin \alpha + \Omega v \sin \alpha + \sigma \Omega^2 = -\frac{s(\alpha)}{m} v^2, \quad (3.1)$$

$$\dot{v} \sin \alpha + \dot{\alpha} v \cos \alpha - \Omega v \cos \alpha + \sigma \dot{\Omega} = -\frac{b(\alpha)}{m} v^2, \quad (3.2)$$

$$I \dot{\Omega} = -F(\alpha) s(\alpha) v^2 + \sigma b(\alpha) v^2 - h \Omega v; \quad (3.3)$$

при этом  $F(\alpha) = R(\alpha) s(\alpha)$ , а коэффициент  $h > 0$  характеризует дополнительный момент, зависящий от угловой скорости (см. [14, 31, 37, 38, 40, 41, 44]). Вообще же, введение в таких задачах зависимости силомоментных характеристик от угловой скорости тела априори не очевидно.

Здесь первые два уравнения получены из теоремы о движении центра масс, а третье — из теоремы об изменении кинетического момента в осях Кенига. Подобные системы, но без боковой силы, ранее были рассмотрены в [35, 39].

Поскольку кинетическая энергия тела и обобщенные силы и моменты, действующие на тело, не зависят от положения тела на плоскости, позиционные координаты в системе являются циклическими. Это позволяет рассматривать систему динамических уравнений (3.1)–(3.3) в качестве независимой. При этом система кинематических уравнений (здесь переменные  $\varphi$ ,  $x_0$ ,  $y_0$  определяют положение тела на плоскости)

$$\dot{\varphi} = \Omega, \quad \dot{x}_0 = v \cos(\alpha - \varphi), \quad \dot{y}_0 = v \sin(\alpha - \varphi),$$

вместе с системой (3.1)–(3.3) является полной системой для исследования рассматриваемого движения в построенном поле сил.

Для определения вида тройки функций  $R(\alpha)$ ,  $s(\alpha)$ ,  $b(\alpha)$  используется экспериментальная информация о свойствах струйного обтекания (см. [6, 15]).

Вводимые классы динамических функций достаточно широки: они состоят из функций достаточно гладких,  $2\pi$ -периодических ( $R(\alpha)$ ,  $b(\alpha)$  — нечетные, а  $s(\alpha)$  — четная), удовлетворяющих следующим условиям:

1)  $R(\alpha), b(\alpha) > 0$  при  $\alpha \in (0, \pi)$ , причем

$$\frac{dR}{d\alpha}(0) > 0, \quad \frac{db}{d\alpha}(0) > 0, \quad \frac{dR}{d\alpha}(\pi) < 0, \quad \frac{db}{d\alpha}(\pi) < 0$$

(классы функций  $\{R\}$ ,  $\{b\}$ );

2)  $s(\alpha) > 0$  при  $\alpha \in (0, \pi/2)$ ,  $s(\alpha) < 0$  при  $\alpha \in (\pi/2, \pi)$ , причем  $s(0) > 0$ ,  $ds(\pi/2)/d\alpha < 0$  (класс функций  $\{s\}$ ).

Как  $R$ ,  $b$ , так и  $s$  меняют знак при замене  $\alpha$  на  $\alpha + \pi$ . В частности, аналитические функции

$$R(\alpha) = A \sin \alpha, \quad b(\alpha) = b_1 \sin \alpha, \quad A, b_1 > 0, \quad (3.4)$$

$$s(\alpha) = B \cos \alpha, \quad B > 0, \quad (3.5)$$

служат типичными представителями описанных классов, и две из которых ( $R$ ,  $s$ ) соответствуют функциям воздействия среды, полученным в ряде своих работ С. А. Чаплыгиным (см. [21,22]) при исследовании плоскопараллельного обтекания плоской пластины бесконечной длины однородным потоком среды.

Объясним необходимость широкого выбора классов функций  $\{R\}$ ,  $\{b\}$  и  $\{s\}$ . Геометрические характеристики конусообразного тела могут быть совершенно различными. Это и позволяет отнести три возникающие динамические функции к определенным классам. Как указано выше, на эти функциональные классы накладываются достаточно слабые условия, поэтому данные классы достаточно широки. Они заведомо включают допустимые конкретные функции, взятые для каждого мыслимого тела и для каждого мыслимого движения.

Но, конечно, не каждой конкретной тройке динамических функций можно поставить в соответствие мыслимое твердое тело со своим движением. Поэтому исследование данной проблемы для достаточно широких классов динамических функций позволяет говорить об относительно полном рассмотрении задачи о движении тела в среде в рамках данных модельных предположений в условиях квазистационарности.

Таким образом, для исследования обтекания конусообразного тела средой используются классы динамических систем, определенные с помощью тройки динамических функций, что значительно усложняет проведение глобального нелинейного анализа.

При изучении движения тела с конечными углами атаки основным вопросом нелинейного анализа является нахождение таких условий, при которых существуют колебания ограниченной амплитуды возле невозмущенного движения, что подтверждает необходимость полного нелинейного исследования.

В некоторых случаях без ограничения общности будем рассматривать представления (3.4), (3.5) для функций  $R(\alpha)$ ,  $s(\alpha)$ ,  $b(\alpha)$ , определяющих воздействие среды.

Вообще же, полное рассмотрение введенных трех классов функций опирается на понятие относительной грубости (относительной структурной устойчивости) и не является предметом исследования данной работы.

**4. Исследуемые системы на фазовом цилиндре.** Уравнения (3.1), (3.2) могут быть приведены к виду

$$\dot{v} + \sigma\Omega^2 \cos \alpha + \sigma\dot{\Omega} \sin \alpha = -\frac{s(\alpha)}{m}v^2 \cos \alpha - \frac{b(\alpha)}{m}v^2 \sin \alpha, \quad (4.1)$$

$$\dot{\alpha}v - \Omega v + \sigma\dot{\Omega} \cos \alpha - \sigma\Omega^2 \sin \alpha = -\frac{b(\alpha)}{m}v^2 \cos \alpha + \frac{s(\alpha)}{m}v^2 \sin \alpha. \quad (4.2)$$

Введем далее новое дифференцирование по формуле  $\langle \dot{\cdot} \rangle = d/dt = v d/dq = v \langle \prime \rangle$ , где  $q$  — путь, пройденный точкой  $D$ . Имеем  $\Omega = \omega v$ ,  $\dot{\Omega} = v(\omega'v + \omega v')$ . Тогда динамическая часть уравнений

движения в нашем случае примет следующий вид:

$$v' = v\Psi_1(\alpha, \omega), \quad (4.3)$$

$$\alpha' = \omega + \frac{\sigma}{I}\psi(\alpha, \omega) \cos \alpha + \sigma\omega^2 \sin \alpha + \frac{s(\alpha)}{m} \sin \alpha - \frac{b(\alpha)}{m} \cos \alpha, \quad (4.4)$$

$$\omega' = -\frac{1}{I}\psi(\alpha, \omega) - \omega\Psi_1(\alpha, \omega), \quad (4.5)$$

где

$$\psi(\alpha, \omega) = F(\alpha) - \sigma b(\alpha) + h\omega,$$

$$\Psi_1(\alpha, \omega) = \frac{\sigma}{I}\psi(\alpha, \omega) \sin \alpha - \sigma\omega^2 \cos \alpha - \frac{s(\alpha)}{m} \cos \alpha - \frac{b(\alpha)}{m} \sin \alpha.$$

Вводя далее безразмерные параметры и дифференцирование в виде

$$q = Q\sigma, \quad \bar{\omega} = \omega\sigma, \quad \beta_1 = \frac{\sigma^2 AB}{I}, \quad \beta_2 = \frac{\sigma^3 b_1}{I}, \quad \beta_3 = \frac{\sigma h}{I}, \quad \beta_4 = \frac{B\sigma}{m}, \quad \beta_5 = \frac{b_1\sigma}{m},$$

опуская при этом черту в дальнейшем над безразмерной переменной  $\bar{\omega}$ , а также по-прежнему обозначая штрихом производную по безразмерной величине  $q$ , имеем систему (4.4), (4.5) в случаях (3.4), (3.5) в следующем аналитическом виде:

$$\alpha' = \omega + \beta_1 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \beta_2 \sin \alpha \cos \alpha + \beta_3 \omega \cos \alpha + \omega^2 \sin \alpha + \beta_4 \sin \alpha \cos \alpha - \beta_5 \sin \alpha \cos \alpha, \quad (4.6)$$

$$\omega' = -\beta_1 \sin \alpha \cos \alpha + \beta_2 \sin \alpha - \beta_3 \omega + \omega^3 \cos \alpha - \beta_1 \omega \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ + \beta_2 \omega^2 \sin \alpha - \beta_3 \omega^2 \sin \alpha + \beta_4 \omega \cos^2 \alpha + \beta_5 \omega \sin^2 \alpha. \quad (4.7)$$

При этом безразмерные параметры  $\beta_k$ ,  $k = 1, \dots, 5$ , имеют следующий физический смысл:  $\beta_1$  — параметр момента силы лобового сопротивления,  $\beta_2$  — параметр момента боковой силы,  $\beta_3$  — параметр дополнительного демпфирующего момента,  $\beta_4$  — параметр силы лобового сопротивления,  $\beta_5$  — параметр момента боковой силы.

Имеем, таким образом, пятипараметрическое семейство систем (4.4), (4.5) (или (4.6), (4.7)) на двумерном фазовом цилиндре  $\{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \bmod 2\pi\}$ .

**5. Ключевой режим прямолинейного поступательного торможения.** Как уже отмечалось, среди всех возможных движений тела имеется ключевой режим — режим прямолинейного поступательного торможения: тело движется поступательно с нулевым углом атаки, при этом скорости всех точек тела убывают со временем. Ключевой режим соответствует тривиальному решению системы (4.6), (4.7).

Под устойчивостью ключевого режима будем понимать устойчивость угловых колебаний тела относительно его продольной оси по отношению к возмущениям угла атаки и угловой скорости. При этом, с точки зрения теории устойчивости, исследуемая устойчивость понимается по части упомянутых переменных.

Для исследования устойчивости линеаризуем систему (4.6), (4.7) в начале координат:

$$\alpha' = \omega + \beta_1 \alpha - \beta_2 \alpha + \beta_3 \omega + \beta_4 \alpha - \beta_5 \alpha, \quad (5.1)$$

$$\omega' = -\beta_1 \alpha + \beta_2 \alpha - \beta_3 \omega + \beta_4 \omega. \quad (5.2)$$

Матрица данной системы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \beta_1 - \beta_2 + \beta_4 - \beta_5 & 1 + \beta_3 \\ -\beta_1 + \beta_2 & -\beta_3 + \beta_4 \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

что приводит к характеристическому уравнению

$$\lambda^2 - \text{tr } A \cdot \lambda + \det A = 0, \quad (5.4)$$

где

$$\text{tr } A = \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 + 2\beta_4 - \beta_5. \quad (5.5)$$

Понятно, что условия  $\text{tr } A < 0$ ,  $\det A > 0$  обеспечивают асимптотическую устойчивость тривиальному решению системы (4.6), (4.7).

Из равенства (5.5) видно, что присутствие в системе силы лобового сопротивления (и ее момента) делает прямолинейное поступательное торможение более неустойчивым. Другими словами, увеличение коэффициентов  $\beta_1$  и  $\beta_4$  увеличивает величину  $\text{tr } A$ . Обратно, присутствие в системе силы бокового сопротивления (и ее момента), а также дополнительного демпфирующего момента делает прямолинейное поступательное торможение более устойчивым. Другими словами, увеличение коэффициентов  $\beta_2$ ,  $\beta_3$  и  $\beta_5$  уменьшает величину  $\text{tr } A$ .

**6. Двухпараметрическое семейство фазовых портретов.** Рассмотрим случай наличия двух пар сил, а именно, предположим для наглядности, что выполнены следующие условия:

$$\beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0. \quad (6.1)$$

Начнем нелинейный качественный анализ со случая аналитической системы. При этом система (4.6), (4.7) примет вид

$$\alpha' = \omega + \omega^2 \sin \alpha + \beta_1 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \beta_2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad (6.2)$$

$$\omega' = -\beta_1 \sin \alpha \cos \alpha + \beta_2 \sin \alpha + \omega^3 \cos \alpha - \beta_1 \omega \sin^2 \alpha \cos \alpha + \beta_2 \omega^2 \sin \alpha. \quad (6.3)$$

Таким образом, в системе присутствуют две пары сил (которые в принципе можно сложить): пара сил лобового сопротивления и пара боковых сил. Тогда система (6.2), (6.3) обладает двухпараметрическим семейством фазовых портретов (рис. 2–7, замена  $\Omega \leftrightarrow \omega$ ); это семейство отличается от подобных и ранее полученных (см. [26, 27, 30, 34, 36]).

**7. Многопараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой.** В данном разделе проводится исследование систем, содержащих неконсервативную пару сил, которая заставляет центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно. Найдены некоторые частные решения полной системы, проведено качественное интегрирование динамических уравнений в пространстве квазискоростей. Получено новое семейство фазовых портретов на двумерном цилиндре. Построенное семейство состоит из бесчисленного множества фазовых портретов с различными качественными свойствами. При этом в дальнейшем полный нелинейный анализ построенных систем проводится, вообще говоря, как ранее известными методами качественной теории, так и новыми методами, полученными для систем переменной диссипацией (см. [32, 33]).

Повторно оговорим, что дальнейшее исследование нелинейных динамических систем мы проводим при всех действительных значениях  $\alpha$ , хотя подразумеваем, что модель справедлива лишь в ограниченной области значений  $|\alpha| < \pi/2$ .

Будем исследовать систему следующего вида:

$$\begin{cases} \alpha' = \omega + \frac{\sigma}{I} \psi(\alpha, \omega) \cos \alpha + \sigma \omega^2 \sin \alpha, \\ \omega' = -\frac{1}{I} \psi(\alpha, \omega) - \omega \Psi_1(\alpha, \omega), \end{cases} \quad (7.1)$$

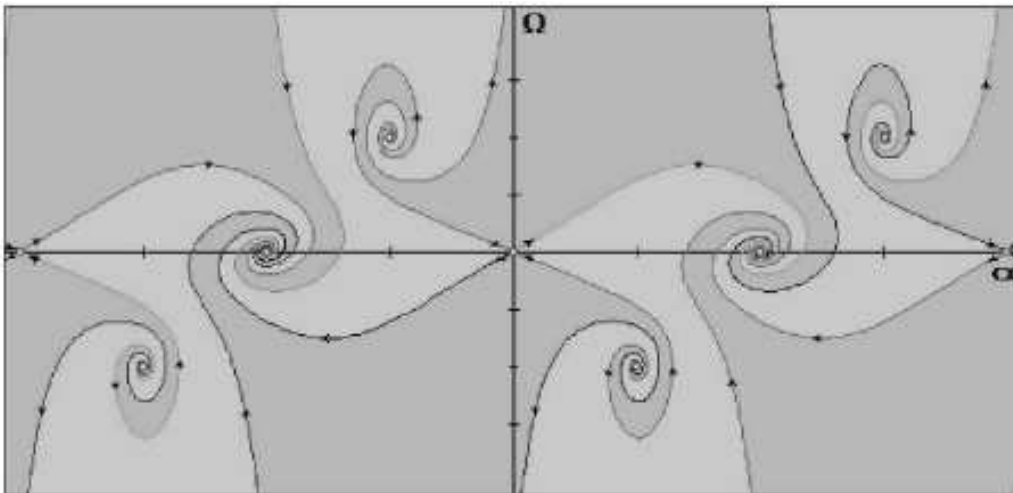
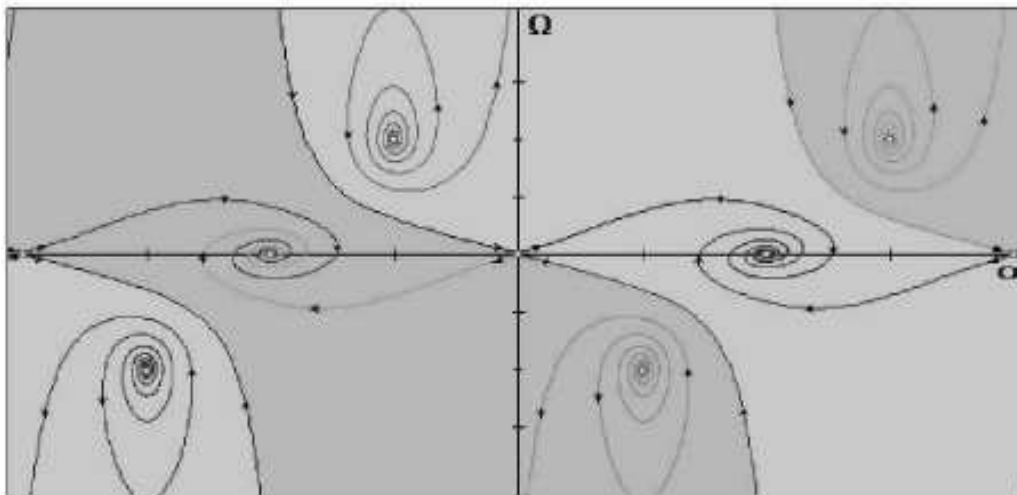
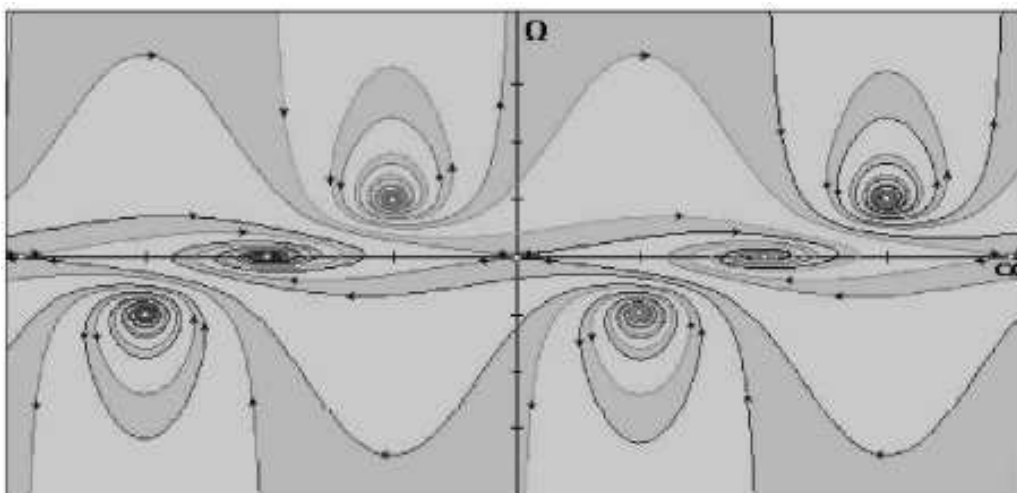
где

$$\psi(\alpha, \omega) = F(\alpha) - \sigma b(\alpha), \quad \Psi_1(\alpha, \omega) = \frac{\sigma}{I} \psi(\alpha, \omega) \sin \alpha - \sigma \omega^2 \cos \alpha.$$

Данная система получена из системы (4.4), (4.5) при  $h = 0$  и при условии присутствия в системе лишь неконсервативной пары сил; она является обобщением системы (6.2), (6.3) — типичного представителя класса систем (7.1).

Таким образом, в системе присутствуют две пары сил: пара сил лобового сопротивления и пара боковых сил. При этом полученная система (7.1) является также обобщением динамической системы, рассмотренной для случая движения тела с передним плоским торцом.



Рис. 2. Фазовый портрет без дополнительных седел,  $ibs = 0$ Рис. 3. Фазовый портрет без дополнительных седел,  $ibs = 1/2$ Рис. 4. Фазовый портрет без дополнительных седел,  $ibs = 1$

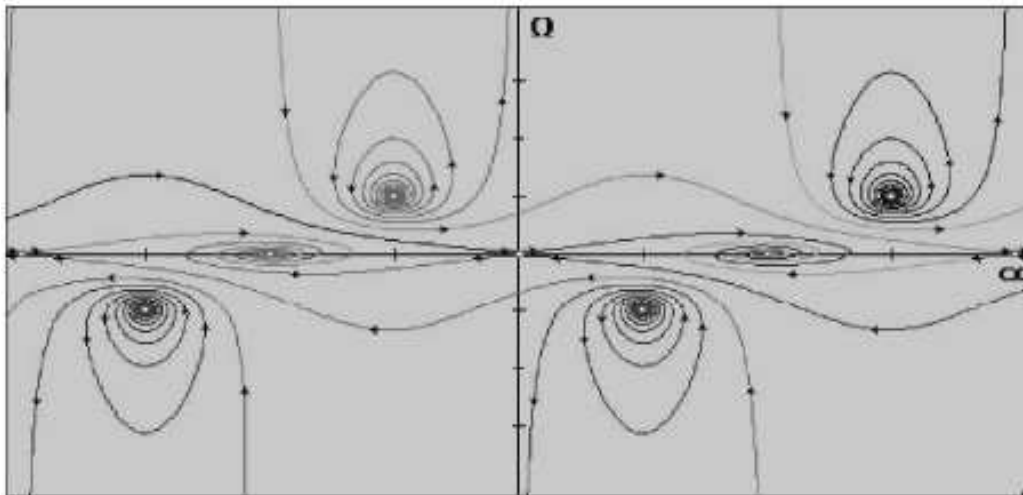


Рис. 5. Фазовый портрет без дополнительных седел,  $ibs = 3/2$

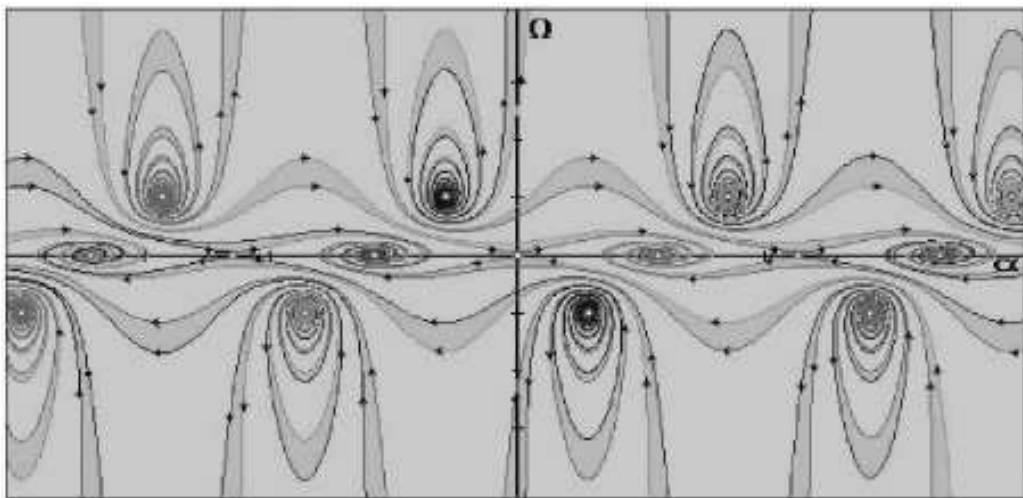


Рис. 6. Фазовый портрет без дополнительных седел,  $ibs = 2$

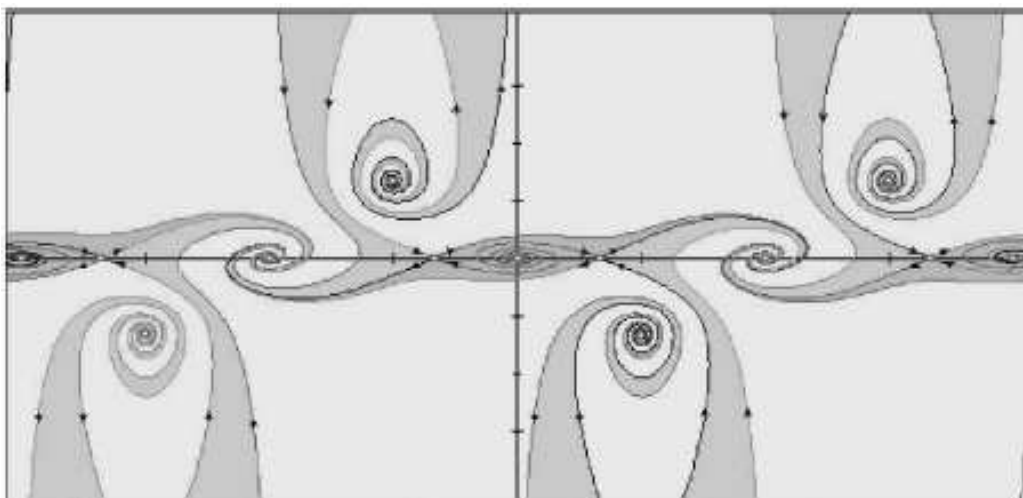


Рис. 7. Фазовый портрет с дополнительными седлами

7.1. Точки покоя системы второго порядка. У системы (7.1) существуют точки покоя на плоскости  $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ , которые задаются следующими соотношениями:

$$\alpha = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \omega = 0, \quad (7.2)$$

$$\alpha = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \omega = 0, \quad (7.3)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad \omega = -1, \quad (7.4)$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad \omega = 1. \quad (7.5)$$

Системы (7.2), (7.3) задают точки, в которые ортогонально проектируются частные решения системы (7.1) вида

$$v(q) = v^0 \exp(-\kappa q), \quad \kappa > 0, \quad \alpha(q) = s\pi, \quad s \in \mathbb{Z}, \quad \omega(q) \equiv 0,$$

при четном  $s$  соответствующее невозмущенному движению.

Наряду с точками покоя (7.2)–(7.5) могут существовать точки покоя, не лежащие на прямых  $\{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2: \sin \alpha \cos \alpha = 0\}$ . Необходимым условием существования таких точек является их представление через систему

$$F(\alpha) = \sigma b(\alpha), \quad \alpha \neq 0 \pmod{\frac{\pi}{2}}, \quad \omega = 0.$$

В силу выбора функциональных классов  $\{F\}$  и  $\{b\}$  функция

$$h(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{b(\alpha)}$$

гладкая. Тогда справедливо следующее утверждение.

**Следствие 7.1.** При выполнении условия

$$h^* = \max_{\alpha} h(\alpha) < \sigma \quad (7.6)$$

точки покоя, не лежащие на прямых  $\{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2: \sin \alpha \cos \alpha = 0\}$ , не существуют. При выполнении условия

$$h^* = \max_{\alpha} h(\alpha) > \sigma \quad (7.7)$$

такие точки покоя всегда существуют, а при  $h^* = \max_{\alpha} h(\alpha) = \sigma$  они совпадают с точками покоя (7.4), (7.5).

**Следствие 7.2.** При выполнении условия (7.7) у системы (4.3)–(4.5), где  $h = 0$ , существуют частные решения вида

$$\begin{cases} v(q) = v^0 \exp(-\kappa q), & \kappa > 0, \quad v^0 = v(0), \\ \alpha(q) \equiv \alpha^0 = \alpha(0) \neq \frac{\pi k}{2}, & k \in \mathbb{Z}, \\ \omega(q) \equiv 0. \end{cases}$$

**Следствие 7.3.** При выполнении условия (7.7) у системы (3.1)–(3.3), где  $h = 0$ , существуют частные решения вида

$$\begin{cases} v(t) = \frac{v_0}{1 + v_0 \kappa t}, & \kappa > 0, \quad v_0 = v(0), \\ \alpha(t) \equiv \alpha_0 = \alpha(0) \neq \frac{\pi k}{2}, & k \in \mathbb{Z}, \\ \Omega(t) \equiv 0. \end{cases}$$

В дальнейшем будем рассматривать систему (7.1) при условии (7.6).

7.2. *Расслоения фазового пространства, его симметрии и начало топологического анализа.* В системе (7.1) присутствуют два положительных безразмерных параметра, от которых зависит классификация точек покоя:

$$b_1 = \frac{\sigma^2}{I} \frac{dF}{d\alpha}(0), \quad b_2 = \frac{\sigma^3}{I} \frac{db}{d\alpha}(0).$$

**Предложение 7.1.** *Имеют место следующие факты.*

- (i) *Точки покоя (7.2) всегда являются неустойчивыми: седлами, если  $b_2 > b_1$ , и отталкивающими точками, если  $b_2 < b_1$ . При выполнении последнего условия указанные точки покоя являются фокусами, если  $b_2 + b_1 < 4$ , и узлами, если  $b_2 + b_1 \geq 4$ .*
- (ii) *Точки покоя (7.3) всегда являются притягивающими: фокусами, если  $b_2 + b_1 < 4$ , и узлами, если  $b_2 + b_1 \geq 4$ .*
- (iii) *Точки покоя (7.4), (7.5) всегда являются отталкивающими фокусами.*

В силу отделения от системы третьего порядка (4.3)–(4.5) независимой подсистемы второго порядка (4.4), (4.5) фазовые траектории в  $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$  лежат на поверхностях, являющихся двумерными цилиндрами. В частности, если первый интеграл системы (7.1) существует во всем фазовом пространстве, то он является функцией переменных  $(\alpha, \omega)$ , а поэтому задает семейство цилиндров в  $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ .

**Замечание 7.1.** Пусть  $\varphi$  — угол отклонения твердого тела. Поскольку  $d\varphi/dt = v d\varphi/dq$ , то в фазовом пространстве системы (3.1)–(3.3) при  $h = 0$  данному первому интегралу будет соответствовать первый интеграл, который зависит от всех трех фазовых переменных.

Благодаря вышеописанной редукции, удобнее строить фазовый портрет системы (4.3)–(4.5) при  $h = 0$  в  $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$  с помощью фазового портрета системы (4.4), (4.5) при  $h = 0$  в  $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ . Последний не будет являться частью портрета в  $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$  в теоретико-множественном смысле, а будет ортогональной проекцией портрета на плоскость  $v = \text{const}$ . Поэтому становятся возможными поднятие фазовых траекторий с плоскостей в пространство  $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$  и получение фазовых портретов системы третьего порядка.

**Замечание 7.2.** Поскольку  $v > 0$ , то движение возможно лишь в области

$$B' = \{(\alpha, \omega, v) \in \mathbb{R}^3 : v > 0\}.$$

Если формально сделать замену переменных в области  $B'$  по формуле  $p = \ln v$ , то полученное векторное поле в фазовом пространстве  $\mathbb{R}^3\{\alpha, \omega, p\}$  не зависит от  $p$ , т.е. имеет цилиндрическую природу более высокого порядка и ортогонально проектируется на все семейство плоскостей  $v = \text{const}$ .

**Замечание 7.3.** Для полного решения вопроса о поднятии траекторий в трехмерное фазовое пространство необходимо выяснить знак проекции векторного поля в  $\mathbb{R}^3\{\alpha, \omega, p\}$  на  $p$ -ось либо на  $v$ -ось в области  $B'$ .

Рассмотрим поверхность

$$M = \{(\alpha, \omega, v) \in B' : \Psi_1(\alpha, \omega) = 0\}$$

(по поводу функции  $\Psi_1$  см. систему (7.1)). Данная поверхность является цилиндром, который разрезает фазовое пространство на области, в каждой из которых проекция векторного поля на  $v$ -ось имеет фиксированный знак. На самой же поверхности  $M$  (и только на ней) проекция векторного поля на  $v$ -ось обращается в нуль.

**Замечание 7.4.** Для любых  $R \in \{R\}$ ,  $s \in \{s\}$ ,  $b \in \{b\}$  векторное поле системы (4.4), (4.5) при  $h = 0$  обладает свойством центральной симметрии относительно точек  $(\pi k, 0)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , т.е. в координатах  $(\alpha, \omega)$  векторное поле системы меняет направление при замене

$$\begin{pmatrix} \alpha + \pi k \\ \omega \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\alpha + \pi k \\ -\omega \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Другими словами, векторное поле системы (4.3)–(4.5) при  $h = 0$  обладает симметрией относительно лучей  $\{(\alpha, \omega, v) \in B' : \alpha = \pi k, \omega = 0\}$ .

*7.3. Классификация фазовых портретов системы на двумерном цилиндре для некоторой области параметров.* Как уже отмечалось, будем изучать те динамические системы, которые допускают выполнение неравенства (7.6). Таким образом, для начала рассматриваем случай отсутствия точек покоя, не лежащих на прямых  $\{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2 : \sin \alpha \cos \alpha = 0\}$ .

Далее, в общем пространстве физически допустимых параметров будем изучать область

$$J^2 = \{h^* = \max_{\alpha} h(\alpha) < \sigma, b_2 > b_1\}.$$

Для проведения классификации фазовых портретов системы на плоскости или двумерном цилиндре необходимо ответить на следующие вопросы.

**А.** *Существование и единственность траекторий, имеющих в качестве  $\alpha$ - и  $\omega$ -предельных множеств бесконечно удаленные точки.* Введем на плоскости семейство полос

$$\Pi_{(\alpha_1, \alpha_2)} = \{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2 : \alpha_1 < \alpha < \alpha_2\};$$

при этом  $\Pi_{(-\pi/2, \pi/2)} = \Pi$ ,  $\Pi_{(\pi/2, 3\pi/2)} = \Pi'$ .

У системы (7.1) существуют траектории, уходящие на бесконечность на плоскости  $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ . Их  $\alpha$ - и  $\omega$ -предельными множествами являются бесконечно удаленные точки  $(-(2k+1)\pi + 0, +\infty)$ ,  $(2k\pi - 0, +\infty)$ ,  $((2k+1)\pi - 0, -\infty)$ ,  $(-2k\pi + 0, -\infty)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Лемма 7.1.** *Рассмотрим систему (7.1) на множестве*

$$\Pi_{(-\pi, 0)} \cap \{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2 : \omega > 0\}. \quad (7.8)$$

*Тогда существует единственная траектория, имеющая в качестве  $\omega$ -предельного множества точку  $(-0, +\infty)$ , а также существует единственная траектория, имеющая в качестве  $\alpha$ -предельного множества точку  $(-\pi + 0, +\infty)$ .*

В силу имеющейся симметрии поведение аналогичных траекторий в других полосах плоскости  $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$  подобно данному.

Лемма 7.1 справедлива в более широких областях параметров.

**Б.** *Анализ наличия замкнутых траекторий или замкнутых кривых из траекторий, охватывающих цилиндр.* У системы (7.1) в области параметров  $J^2$  отсутствуют замкнутые фазовые характеристики, охватывающие фазовый цилиндр  $\mathbb{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\omega\}$ , составленные из траекторий рассматриваемой системы (см. [24, 25]).

**В.** *Существование замкнутых кривых из траекторий, стягиваемых по цилиндру в точку; в частности, существование неизолированных периодических траекторий или предельных циклов.* Заметим, что в силу  $2\pi$ -периодичности векторного поля системы по  $\alpha$  последняя задача сводится к отысканию замкнутых траекторий или замкнутых кривых из траекторий лишь вокруг точек покоя индекса 1. Таким образом, предельные циклы могут существовать только лишь вокруг точек покоя (7.3)–(7.5) (см. [24, 25]).

**Лемма 7.2.** *Вокруг точек покоя (7.4), (7.5) не существует замкнутых кривых, составленных из траекторий системы (7.1).*

Исследование наличия замкнутых кривых вокруг точек покоя (7.3) показывает, что при некоторых условиях такие кривые существуют, а при некоторых условиях — нет.

При этом пространство параметров  $J^2$  системы (7.1) разбивается на два множества по отношению к наличию в полосе  $\Pi$  предельного цикла:  $J^2 = J_0 \sqcup J_1$ . Для параметров из множества  $J_0$  у системы (7.1) не существует замкнутых кривых, составленных из ее траекторий. Для параметров из множества  $J_1$  у системы (7.1) могут существовать предельные циклы. Оба множества имеют конечную меру.

**Г.** *Анализ поведения устойчивых и неустойчивых сепаратрис имеющих гиперболических седел.* Данные сепаратрисы разделяют всю фазовую плоскость на области без положений равновесия. Ввиду последнего, фазовые портреты мгновенно достраиваются.

Рассмотрим систему (7.1) для случая параметров  $J_0$ .

**Лемма 7.3.** *Сепаратриса, выходящая из начала координат в полосу  $\Pi_{(-\pi/2,0)}$  (соответственно,  $\Pi_{(0,\pi/2)}$ ) имеет в качестве  $\omega$ -предельного множества точку  $(-\pi, 0)$  (соответственно,  $(\pi, 0)$ ).*

Лемма 7.3 вытекает из теории топографических систем Пуанкаре (см. [24,28]). В силу имеющейся симметрии поведение аналогичных траекторий в других полосах плоскости  $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$  подобно описанному.

Ключевым вопросом классификации портретов является вопрос о поведении сепаратрисы, выходящей из бесконечности в полосу  $\Pi_{(-\pi,0)}$ . Для нее дадим определение индекса сепаратрисного поведения (ИСП).

**Определение 7.1.** *Индексом сепаратрисного поведения (ИСП; обозначение  $\text{ibs}$ ) называется рациональное число  $j$ , выбираемое из множества*

$$\{j \in \mathbb{Q} : j = k/2, k \in \mathbb{N}_0\}$$

следующим образом. По определению  $\text{ibs} = j$ , если рассматриваемая сепаратриса (выходящая из бесконечности в полосу  $\Pi_{(-\pi,0)}$ ) имеет в качестве  $\omega$ -предельного множества точку  $(2\pi j - \pi, 0)$ .

Видно, что если  $j \in \mathbb{Z}$ , то рассматриваемая сепаратриса охватывает цилиндр  $j$  раз (по координате  $\alpha$ ).

Таким образом, предельным множеством рассматриваемой сепаратрисы является

- (i) при  $j = 0$  — притягивающая точка  $(-\pi, 0)$  (рис. 2,  $\text{ibs} = 0$ ,  $\Omega \leftrightarrow \omega$ );
- (ii) при  $j = 1/2$  — седло  $(0, 0)$  (рис. 3,  $\text{ibs} = 1/2$ ,  $\Omega \leftrightarrow \omega$ );
- (iii) при  $j = 1$  — притягивающая точка  $(\pi, 0)$  (рис. 4,  $\text{ibs} = 1$ ,  $\Omega \leftrightarrow \omega$ );
- (iv) при  $j = 3/2$  — седло  $(2\pi, 0)$  (рис. 5,  $\text{ibs} = 3/2$ ,  $\Omega \leftrightarrow \omega$ );
- (v) при  $j = 2$  — притягивающая точка  $(3\pi, 0)$  (рис. 6,  $\text{ibs} = 2$ ,  $\Omega \leftrightarrow \omega$ ) и т. д.

**Теорема 7.1.** *Определение 7.1 корректно.*

*Схема доказательства.* Теорема 7.1 доказывается методами топографических систем Пуанкаре (см. [24, 28]). Прежде чем изложить схему доказательства теоремы 7.1, приведем несколько вспомогательных утверждений. Предложение 7.2 характеризует поведение ключевой сепаратрисы системы

$$\begin{cases} \alpha' = \omega + \frac{\sigma}{I}F(\alpha) \cos \alpha + \sigma\omega^2 \sin \alpha, \\ \omega' = -\frac{1}{I}F(\alpha) - \omega\Psi_1(\alpha, \omega), \end{cases} \quad (7.9)$$

где

$$\Psi_1(\alpha, \omega) = \frac{\sigma}{I}F(\alpha) \sin \alpha - \sigma\omega^2 \cos \alpha,$$

при наличии «возмущения», дающего систему (7.1) (три типа фазовых портретов системы (7.9) изображены на рис. 8–10).

**Предложение 7.2.** *Возмущение системы (7.9), порождающее систему (7.1), расщепляет рассматриваемую сепаратрису (выходящую из бесконечности в полосу  $\Pi_{(-\pi,0)}$  и входящую в бесконечность в этой же полосе).*

*Доказательство.*

Действительно, характеристическая функция упорядоченной пары систем (7.9) и (7.1) имеет вид

$$\chi((7.9), (7.1)) = \frac{\sigma}{I}\omega b(\alpha)[(\sigma\omega + \sin \alpha)^2 + \cos^2 \alpha], \quad (7.10)$$

и она положительна почти всюду на множестве (7.8), поскольку в ней  $b(\alpha) > 0$  почти всюду. Предложение 7.2 следует из условия (7.10).  $\square$

Более того, в силу знакоопределенности почти всюду характеристической функции (7.10) сепаратрисы, имеющие в качестве  $\omega$ -предельного множества бесконечно удаленные точки

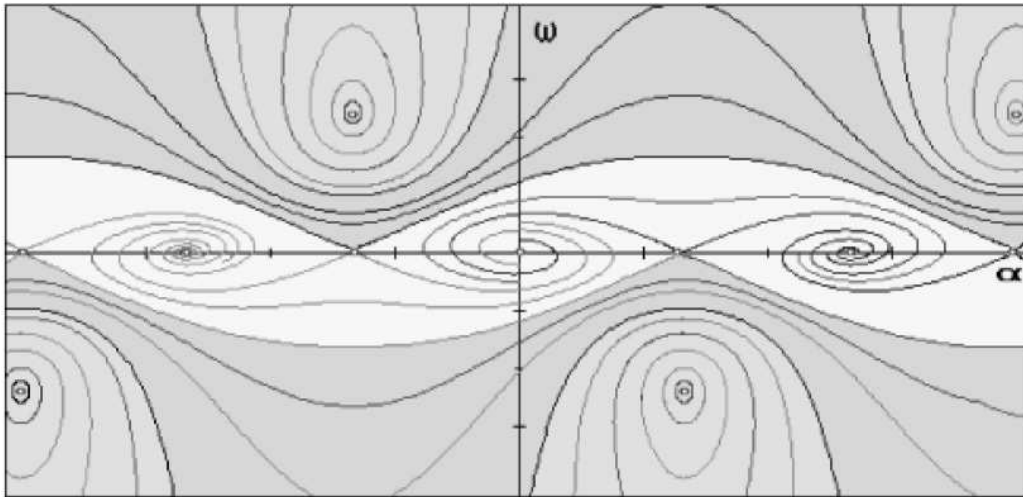


Рис. 8. Ключевая сепаратриса ограничивает область с положением равновесия типа «центр»

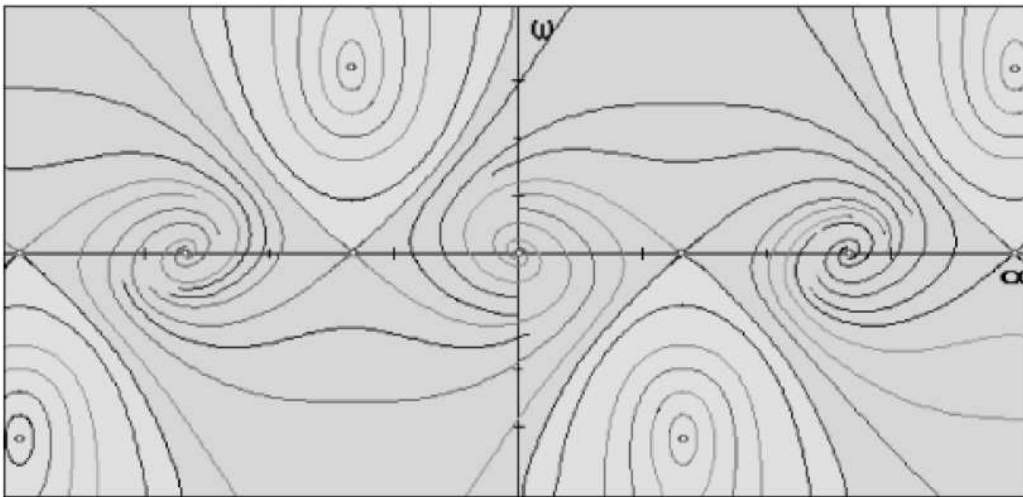


Рис. 9. Ключевая сепаратриса входит в седло  $(-\pi/2, 0)$

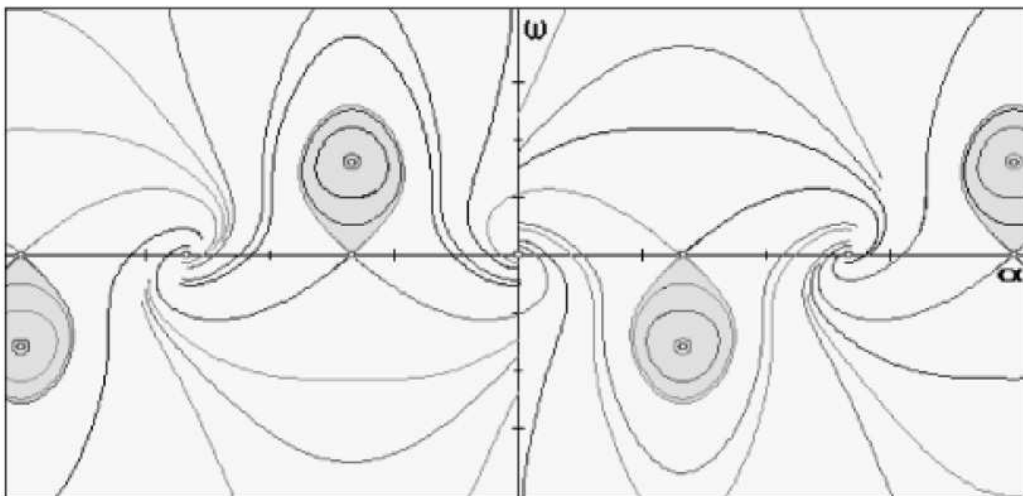


Рис. 10. Ключевая сепаратриса входит в притягивающую точку  $(-\pi, 0)$

$(2k\pi - 0, +\infty)$  и  $(-2k\pi + 0, -\infty)$ , имеют в качестве  $\alpha$ -предельных множеств точки (7.4) и (7.5) (рис. 2–6).

Введем обозначение  $b^* = \max_{\alpha} |b(\alpha)|$ . Пусть  $b_2^* = \sigma^3 b^* / I$ .

**Предложение 7.3.** *Для любого  $M > 0$  и достаточно малого значения  $b_2^* > 0$  найдется такое  $\varepsilon > 0$ , что для любого  $b_2^* < \varepsilon$  ключевая сепаратриса, выходящая из бесконечности в полосу  $\Pi_{(-\pi, 0)}$ , продолжится вправо вдоль оси  $\alpha$  более чем на  $M$ .*

Предложение 7.3 следует из теоремы о непрерывной зависимости решений от параметров и начальных условий.

Продолжим доказательство теоремы 7.1. Фазовый поток исследуемой системы (7.1) отображает часть прямой  $\Lambda_{-1}$  на прямую  $\Lambda_1$ ; здесь

$$\Lambda_k = \{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2 : \alpha = \pi k\}.$$

Рассмотрим отображение прямой  $\Lambda_{-1}$  на прямую  $\Lambda_1$  в силу фазовых траекторий. Для системы сравнения (7.9) с вращениями (рис. 8) это отображение, по крайней мере, вблизи прямой  $\Lambda_{-1}$  в области (7.8) тождественно.

**Предложение 7.4.** *Для системы (7.1) построенное отображение (там, где оно определено) таково:*

$$(-\pi, \omega_1) \rightarrow (\pi, \omega_2), \quad \omega_2 > \omega_1 > 0.$$

Предложение 7.4 вытекает из рассуждений о повороте векторного поля рассматриваемой системы.

Продолжим схему доказательства теоремы 7.1. Имея в виду непрерывную зависимость отображения, построенного в предложении 7.4, от параметра  $b_2^*$ , рассмотрим при достаточно малых значениях  $b_2^*$  зависимость типа фазового портрета от параметра  $b_2^*$ .

Предположим, что ключевая сепаратриса имеет  $\omega$ -предельное множество, отстоящее от прямой  $\Lambda_{-1}$  вдоль оси  $\alpha$  на  $2\pi j$ ,  $j \in \mathbb{N}_0$ . По теореме о непрерывной зависимости решений от параметров и начальных условий при уменьшении параметра  $b_2^*$  до необходимого значения (предложение 7.3) ключевая сепаратриса будет иметь грубое  $\omega$ -предельное множество, отстоящее от прямой  $\Lambda_{-1}$  вдоль оси  $\alpha$  на  $2\pi(j+1)$ ,  $j \in \mathbb{N}_0$ . Случай  $j \in \mathbb{N}_0$  рассмотрен.

Напомним, что у системы (7.1) на фазовом цилиндре существуют предельные точки (7.2) (седла), также отстоящие от прямой  $\Lambda_{-1}$  вдоль оси  $\alpha$  на  $2\pi j$ ,  $j \notin \mathbb{N}_0$ .

**Предложение 7.5.** *Ключевая сепаратриса может иметь в качестве  $\omega$ -предельного множества седловые точки (7.2).*

*Доказательство.* В силу гладкой зависимости ключевой сепаратрисы от параметра  $b_2^*$ , при том критическом значении параметра, при котором происходит перестройка грубого  $\omega$ -предельного множества сепаратрисы (от точки  $2\pi j$  к точке  $2\pi(j+1)$ ,  $j \in \mathbb{N}_0$ , см. выше), новым  $\omega$ -предельным множеством станет точка (7.2), а именно, седло  $(2\pi j, 0)$ ,  $j \notin \mathbb{N}_0$ . Действительно, если бы седло  $(2\pi j, 0)$ ,  $j \notin \mathbb{N}_0$ , при рассматриваемом критическом значении параметра  $b_2^*$  не было бы  $\omega$ -предельным множеством для ключевой сепаратрисы, то тогда эта сепаратриса имела бы другое грубое (точку  $2\pi j$  или точку  $2\pi(j+1)$ ,  $j \in \mathbb{N}_0$ , см. выше)  $\omega$ -предельное множество. Поскольку при малом шевелении грубое  $\omega$ -предельное множество сохранится, мы вступаем в противоречие с тем, что критическое значение параметра  $b_2^*$  соответствует грубому  $\omega$ -предельному множеству. Предложение 7.5 доказано (более подробно о таких системах см. [32, 33]).  $\square$

Более общее утверждение, в том числе и о строго монотонных полях, см. в [32, 33].

Закончим доказательство теоремы 7.1. Если в качестве системы сравнения для системы (7.1) возьмем систему (7.9), фазовый портрет которой представлен на рис. 10 (у которой ключевая сепаратриса входит в притягивающую точку  $(-\pi, 0)$ ), то тем самым реализуется случай  $\text{ibs} = j = 0$ . Схематическое доказательство теоремы 7.1 приведено полностью.  $\square$



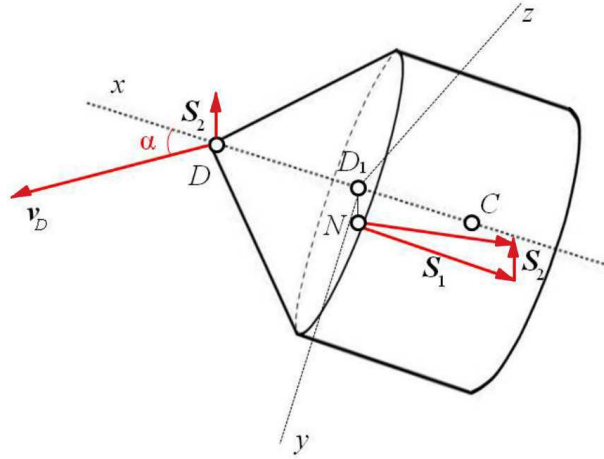


Рис. 11. Модель пространственного взаимодействия тела со средой

**8. О возможном достижении устойчивости ключевого режима.** При выполнении условия (6.1) характеристическое уравнение (5.4) примет вид

$$\lambda^2 + (\beta_2 - \beta_1)\lambda + \beta_1 - \beta_2 = 0, \quad (8.1)$$

указывающий на то, что в данной области параметров желаемой устойчивости достигнуть не удастся. Так, например, при  $\beta_1 < \beta_2$  тривиальное решение системы имеет неустойчивость, соответствующую седловой точке, а значит, выбором соответствующих начальных условий можно достигнуть условной устойчивости. Действительно, можно попытаться выбрать начальные условия вблизи устойчивых сепаратрис возле начала координат, подсчитав при этом в линейном приближении собственные направления.

Другой тип неустойчивости будет иметь тривиальное решение системы при условии  $\beta_1 > \beta_2$ . Начало координат при этом является отталкивающей особой точкой, и никакой выбор начальных условий не приведет к достижению устойчивости.

При этом семейства портретов, полученные ранее, имеют дело со случаем, когда в принципе можно достигнуть асимптотической устойчивости начала координат. Семейство же портретов, полученное в данной работе, имеет дело со случаем условной устойчивости, достигнуть которую оказывается в принципе возможным соответствующим выбором начальных условий. Так, на рис. 2–6 показаны случаи, соответствующие выполнению неравенства  $\beta_1 < \beta_2$  (начало координат — седло), а на рис. 7 показан случай, соответствующий выполнению неравенства  $\beta_1 > \beta_2$  (начало координат — отталкивающая точка).

**9. Постановка пространственной задачи.** Рассмотрим пространственное движение однородного осесимметричного твердого тела массы  $m$ , имеющего конусообразную переднюю часть, взаимодействующую с потоком среды в условиях струйного или отрывного обтекания (рис. 11) (см. [2, 42, 43]).

Если  $(v, \alpha, \beta)$  — сферические координаты вектора  $\mathbf{v}_D$  скорости точки  $D$  (вершины конуса, рис. 11), то расстояние  $D_1N$  до точки  $N$  приложения силы воздействия среды  $\mathbf{S}$  определяется лишь одним параметром — углом атаки  $\alpha$ , измеряемым между вектором скорости точки  $D$  и осью симметрии  $Dx$  (угол  $xD\mathbf{v}_D$ , рис. 11):

$$D_1N = R(\alpha). \quad (9.1)$$

При этом угол  $\beta$  равен углу  $yD_1N$  (вектор  $\mathbf{v}_D$  проецируется на прямую  $D_1N$ ).

Если  $(0, y_N(\alpha, \beta), z_N(\alpha, \beta))$  — координаты точки  $N$  в системе  $D_1xyz$ , жестко связанной с телом (рис. 11), то, очевидно,  $R^2 = y_N^2 + z_N^2$ .

Силы лобового  $\mathbf{S}_1$  и бокового  $\mathbf{S}_2$  сопротивления (рис. 11) будем представлять в квадратичном виде по скорости точки  $D$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1 &= \mathbf{S}_x = -s(\alpha)v^2\mathbf{e}_x, & \mathbf{S}_2 &= \mathbf{S}_y + \mathbf{S}_z, \\ \mathbf{S}_y &= -b(\alpha)v^2 \cos \beta \mathbf{e}_y, & \mathbf{S}_z &= -b(\alpha)v^2 \sin \beta \mathbf{e}_z, & |\mathbf{v}_D| &= v, \end{aligned} \quad (9.2)$$

при этом векторы  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$  и  $\mathbf{v}_D$  лежат в одной плоскости.

Таким образом, тройка функций  $R(\alpha)$ ,  $s(\alpha)$ ,  $b(\alpha)$  определяет воздействие среды на твердое тело при пространственном движении в условиях квазистационарности (см. [32, 33]).

**10. Динамическая часть уравнений движения и функции воздействия среды.** Если  $\text{diag}\{I_1, I_2, I_2\}$  — тензор инерции тела в осях  $D_1xyz$ , связанных с телом (оси  $D_1y$  и  $D_1z$  жестко связаны с перпендикулярным круговым сечением конуса, а ось  $D_1x$  совпадает с осью симметрии тела),  $\sigma = CD$ ,  $C$  — центр масс (рис. 11),  $\{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$  — компоненты угловой скорости тела в осях  $D_1xyz$ , то динамическую часть уравнений движения можно представить в следующем виде (учитываются условия (9.1), (9.2)):

$$\begin{aligned} \dot{v} \cos \alpha - \dot{\alpha} v \sin \alpha + \Omega_2 v \sin \alpha \sin \beta - \Omega_3 v \sin \alpha \cos \beta + \sigma(\Omega_2^2 + \Omega_3^2) &= \frac{-s(\alpha)v^2}{m}, \\ \dot{v} \sin \alpha \cos \beta + \dot{\alpha} v \cos \alpha \cos \beta - \dot{\beta} v \sin \alpha \sin \beta + \Omega_3 v \cos \alpha - \\ - \Omega_1 v \sin \alpha \sin \beta - \sigma\Omega_1\Omega_2 - \sigma\dot{\Omega}_3 &= \frac{-b(\alpha)v^2 \cos \beta}{m}, \\ \dot{v} \sin \alpha \sin \beta + \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta + \dot{\beta} v \sin \alpha \cos \beta + \Omega_1 v \sin \alpha \cos \beta - \\ - \Omega_2 v \cos \alpha - \sigma\Omega_1\Omega_3 + \sigma\dot{\Omega}_2 &= \frac{-b(\alpha)v^2 \sin \beta}{m}, \end{aligned} \quad (10.1)$$

$$\begin{aligned} I_1\dot{\Omega}_1 &= -y_N(\alpha, \beta) b(\alpha)v^2 \sin \beta + z_N(\alpha, \beta) b(\alpha)v^2 \cos \beta, \\ I_2\dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_2)\Omega_1\Omega_3 &= -z_N(\alpha, \beta) s(\alpha)v^2, \\ I_2\dot{\Omega}_3 + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2 &= y_N(\alpha, \beta) s(\alpha)v^2, \end{aligned}$$

где

$$y_N(\alpha, \beta) = R(\alpha) \cos \beta, \quad z_N(\alpha, \beta) = R(\alpha) \sin \beta. \quad (10.2)$$

Первые три уравнения системы (10.1) получены из теоремы о движении центра масс в проекциях на оси  $D_1xyz$ , а вторые три — из теоремы об изменении кинетического момента. Подобные системы, но без боковой силы, ранее были использованы также в [32, 33].

Поскольку кинетическая энергия тела и обобщенные силы и моменты, действующие на тело, не зависят от положения тела на плоскости, позиционные координаты в системе являются циклическими. Это позволяет рассматривать систему динамических уравнений (10.1) в качестве независимой. При этом система кинематических уравнений вместе с системой (10.1) является полной системой для исследования рассматриваемого движения в построенном поле сил.

Если выполнены равенства (10.2), то

$$-y_N(\alpha, \beta) b(\alpha)v^2 \sin \beta + z_N(\alpha, \beta) b(\alpha)v^2 \cos \beta \equiv 0;$$

тогда система (10.1) имеет циклический первый интеграл вида

$$\Omega_1 = \Omega_1^0 = \text{const}, \quad (10.3)$$

и в дальнейшем будем рассматривать динамику системы на его нулевом уровне:

$$\Omega_1^0 = 0. \quad (10.4)$$

Для определения вида тройки функций  $R(\alpha)$ ,  $s(\alpha)$ ,  $b(\alpha)$  используется экспериментальная информация о свойствах струйного обтекания (см. [8,10,11]). Вводимые классы динамических функций достаточно широки. Они определяются так же, как и в случае плоскопараллельного движения. В частности, аналитические функции

$$R(\alpha) = A \sin \alpha, \quad b(\alpha) = b_1 \sin \alpha, \quad A, b_1 > 0, \quad (10.5)$$

$$s(\alpha) = B \cos \alpha, \quad A > 0, \quad (10.6)$$

служат типичными представителями описанных выше классов.

Таким образом, для исследования пространственного обтекания конусообразного тела средой используются классы динамических систем, определенные с помощью тройки динамических функций, что значительно усложняет проведение глобального нелинейного анализа. В некоторых случаях без ограничения общности можно рассматривать представления (10.5), (10.6) для функций  $R(\alpha)$ ,  $s(\alpha)$ ,  $b(\alpha)$ , определяющих воздействие среды.

**11. Исследуемые системы на касательно расслоении двумерной сферы.** Введем в системе новые квазискорости:

$$z_1 = \Omega_2 \cos \beta + \Omega_3 \sin \beta, \quad z_2 = -\Omega_2 \sin \beta + \Omega_3 \cos \beta.$$

Систему (10.1) в случаях (10.3), (10.4) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{v} + \sigma(z_1^2 + z_2^2) \cos \alpha - \sigma \frac{v^2}{I_2} R(\alpha) s(\alpha) \sin \alpha &= -\frac{v^2}{m} [s(\alpha) \cos \alpha + b(\alpha) \sin \alpha], \\ \dot{\alpha} v + z_2 v - \sigma(z_1^2 + z_2^2) \sin \alpha - \sigma \frac{v^2}{I_2} R(\alpha) s(\alpha) \cos \alpha &= \frac{v^2}{m} [s(\alpha) \sin \alpha - b(\alpha) \cos \alpha], \\ \dot{\Omega}_3 = \frac{v^2}{I_2} y_N(\alpha, \beta) s(\alpha), \quad \dot{\Omega}_2 = -\frac{v^2}{I_2} z_N(\alpha, \beta) s(\alpha), \quad \dot{\beta} \sin \alpha - z_1 \cos \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (11.1)$$

Вводя далее новые безразмерные дифференцирование и фазовые переменные по формулам

$$\langle \dot{\ } \rangle = \frac{d}{dt} = n_1 v \frac{d}{dq} = n_1 v \langle \prime \rangle, \quad n_1 = \text{const} > 0, \quad z_k = n_1 v Z_k, \quad k = 1, 2,$$

система (11.1) примет следующий вид:

$$v' = v \Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \quad (11.2)$$

$$\alpha' = -Z_2 + \sigma n_1 (Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha + \frac{\sigma}{I_2 n_1} R(\alpha) s(\alpha) \cos \alpha + \frac{1}{m n_1} [s(\alpha) \sin \alpha - b(\alpha) \cos \alpha], \quad (11.3)$$

$$\begin{aligned} Z_2' = \frac{1}{I_2 n_1^2} R(\alpha) s(\alpha) - Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \sigma n_1 Z_2 (Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - \\ - \frac{\sigma}{I_2 n_1} Z_2 R(\alpha) s(\alpha) \sin \alpha + \frac{Z_2}{m n_1} [s(\alpha) \cos \alpha + b(\alpha) \sin \alpha], \end{aligned} \quad (11.4)$$

$$\begin{aligned} Z_1' = Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \sigma n_1 Z_1 (Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - \\ - \frac{\sigma}{I_2 n_1} Z_1 R(\alpha) s(\alpha) \sin \alpha + \frac{Z_1}{m n_1} [s(\alpha) \cos \alpha + b(\alpha) \sin \alpha], \end{aligned} \quad (11.5)$$

$$\beta' = Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (11.6)$$

где

$$\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) = -\sigma n_1 (Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha + \frac{\sigma}{I_2 n_1} R(\alpha) s(\alpha) \sin \alpha - \frac{1}{m n_1} [s(\alpha) \cos \alpha + b(\alpha) \sin \alpha].$$

Видно, что в системе пятого порядка (11.2)–(11.6) может быть выделена независимая подсистема четвертого порядка (11.3)–(11.6), которую можно рассматривать на касательном расслоении  $T^* \mathbb{S}^2 \{Z_2, Z_1; \alpha, \beta\}$  двумерной сферы  $\mathbb{S}^2 \{\alpha, \beta\}$ .

В системе (11.3)–(11.6), в свою очередь, может быть выделена независимая подсистема третьего порядка (11.3)–(11.5). Последнюю можно отдельно рассмотреть на ее трехмерном фазовом пространстве.

В частности, в случае функций Чаплыгина (10.5), (10.6) система (11.2)–(11.6) примет вид аналитической системы

$$v' = v\Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \quad (11.7)$$

$$\alpha' = -Z_2 + \mu_2(Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha + \mu_2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \frac{\mu_1 - \mu_3}{2} \sin \alpha \cos \alpha, \quad (11.8)$$

$$Z_2' = \sin \alpha \cos \alpha - Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \mu_2 Z_2 (Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - \\ - \mu_2 Z_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \frac{Z_2}{2} [\mu_1 \cos^2 \alpha + \mu_3 \sin^2 \alpha], \quad (11.9)$$

$$Z_1' = Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \mu_2 Z_1 (Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - \mu_2 Z_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \frac{Z_1}{2} [\mu_1 \cos^2 \alpha + \mu_3 \sin^2 \alpha], \quad (11.10)$$

$$\beta' = Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (11.11)$$

где

$$\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) = -\mu_2(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha + \mu_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha - \frac{\mu_1}{2} \cos^2 \alpha - \frac{\mu_3}{2} \sin^2 \alpha,$$

при этом выбирая в дальнейшем безразмерные параметры  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  следующим образом:

$$n_1 = n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I_2}, \quad A = R'(0), \quad B = s(0), \quad b_1 = b'(0), \\ \mu_1 = 2 \frac{B}{mn_0}, \quad \mu_2 = \sigma n_0, \quad \mu_3 = 2 \frac{b_1}{mn_0}.$$

Видно, что в случае рассматриваемого пространственного движения полученные системы имеют неопределенность в начале координат, что вызвано вырожденностью сферических координат конца вектора  $v_D$  скорости вершины  $D$  переднего конуса (кавитатора) и преодолевается доопределением правых частей динамических систем. В случае же движения плоскопараллельного подобных проблем, как известно, нет (см. [32, 33]).

**12. Достаточное условие устойчивости прямолинейного поступательного торможения.** Исследуем устойчивость ключевого режима — пространственного прямолинейного поступательного торможения — по отношению к возмущениям угла атаки и угловой скорости, т.е. по отношению к переменным  $\alpha, Z_1, Z_2$ . Другими словами, исследуем устойчивость тривиального решения независимой системы третьего порядка (11.3)–(11.5) (если, конечно, доопределить данную систему по непрерывности в начале координат, что возможно). Справедливо следующее важное утверждение.

**Предложение 12.1.** *Плоскость*

$$\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbb{R}^3 : Z_1 = 0\} \quad (12.1)$$

*является интегральным многообразием для системы (11.3)–(11.5).*

*Доказательство.* Действительно, после формальной подстановки  $Z_1 = 0$  в систему (11.3)–(11.5) последняя становится независимой и допускает частное решение вида  $\alpha = \alpha(q), Z_2 = Z_2(q), Z_1(q) \equiv 0$ , где  $\alpha(q), Z_2(q)$  — любое частное решение системы второго порядка, образованной уравнениями (11.3), (11.4):

$$\begin{cases} \alpha' = -Z_2 + \sigma n_1 Z_2^2 \sin \alpha + \frac{\sigma}{I_2 n_1} R(\alpha) s(\alpha) \cos \alpha + \frac{1}{mn_1} [s(\alpha) \sin \alpha - b(\alpha) \cos \alpha], \\ Z_2' = \frac{1}{I_2 n_1^2} R(\alpha) s(\alpha) + \sigma n_1 Z_2^3 \cos \alpha - \frac{\sigma}{I_2 n_1} Z_2 R(\alpha) s(\alpha) \sin \alpha + \frac{Z_2}{mn_1} [s(\alpha) \cos \alpha + b(\alpha) \sin \alpha], \end{cases} \quad (12.2)$$

Предложение доказано.  $\square$

Более того, система (12.2) на двумерном фазовом цилиндре описывает динамику плоскопараллельного движения тела (см. [2, 43]). В частности, в случае функций Чаплыгина (10.5), (10.6) система (12.2) примет вид аналитической:

$$\alpha' = -Z_2 + \mu_2 Z_2^2 \sin \alpha + \mu_2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \frac{\mu_1 - \mu_3}{2} \sin \alpha \cos \alpha, \quad (12.3)$$

$$Z_2' = \sin \alpha \cos \alpha + \mu_2 Z_2^3 \cos \alpha - \mu_2 Z_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \frac{Z_2}{2} [\mu_1 \cos^2 \alpha + \mu_3 \sin^2 \alpha]. \quad (12.4)$$

Таким образом, на плоскость (12.1) «укладывается» фазовый портрет системы (12.2) (или системы (12.3), (12.4)) из динамики плоскопараллельного движения. Более того, плоскость (12.1) разделяет трехмерное фазовое пространство на две части:

$$\begin{aligned} & \{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbb{R}^3 : 0 < \alpha < \pi, Z_1 > 0\}, \\ & \{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbb{R}^3 : 0 < \alpha < \pi, Z_1 < 0\}, \end{aligned} \quad (12.5)$$

в каждой из которых движение происходит самостоятельно, но не произвольно друг от друга, поскольку в системе присутствует следующая симметрия: все составляющие векторного поля системы (11.3)–(11.5) не меняют знаки при замене  $Z_1 \rightarrow -Z_1$ .

Последние факты говорят о том, что систему (11.3)–(11.5) достаточно исследовать в полуограниченном слое (12.5).

Важным следствием последних замечаний является возможность использования функции

$$V_1(\alpha, Z_1) = Z_1 \sin \alpha \quad (12.6)$$

в качестве функции Ляпунова (Четаева) в полуограниченном слое (12.5), поскольку в нем данная функция положительно определена.

**Теорема 12.1.** *Функция (12.6) в области (12.5) является для системы (11.3)–(11.5) функцией Ляпунова (Четаева), т.е. ее производная в силу системы (11.3)–(11.5) отрицательно определена при  $\mu_3 > 2(\mu_1 + \mu_2)$  и положительно определена при  $\mu_3 < 2(\mu_1 + \mu_2)$ .*

*Доказательство.* Действительно, производная функции (12.6) в силу системы (11.3)–(11.5) представляется в виде

$$\left(\mu_1 + \mu_2 - \frac{\mu_3}{2}\right) Z_1 \alpha + o(\alpha^2 + Z_1^2 + Z_2^2). \quad \square$$

Таким образом, при

$$\mu_3 > 2(\mu_1 + \mu_2) \quad (12.7)$$

система (11.3)–(11.5) имеет в начале координат (после доопределения правых частей в нем) притягивающую особую точку, а при  $\mu_3 < 2(\mu_1 + \mu_2)$  — отталкивающую. В критическом же случае  $\mu_3 = 2(\mu_1 + \mu_2)$  тривиальное решение может быть как устойчивым, так и неустойчивым.

Все это означает, что условие (12.7) является достаточным для того, чтобы ключевой режим (пространственное прямолинейное поступательное торможение) являлся бы устойчивым к возмущению угла атаки и угловой скорости (в данном случае — по отношению к трем переменным  $\alpha, Z_1, Z_2$ ).

**13. Конструктивные замечания о возможном достижении устойчивости.** Рассмотрим движение в сопротивляющейся среде (например, воде) однородного твердого тела, состоящего из кругового конуса, жестко закрепленного с круговым цилиндром конечной длины (см. рис. 11).

Переписывая условие (12.7), можно заключить, что указанная асимптотическая устойчивость имеет место при выполнении следующего неравенства:

$$\frac{b_1}{B} > 2 + \frac{m\sigma A}{I_2} \quad \text{или} \quad \frac{b_1}{B} > 2 + \frac{\sigma dk}{r_1^2}, \quad (13.1)$$

где  $d$  — диаметр цилиндрической части тела,  $r_1$  — центральный радиус инерции (относительно оси  $D_1y$ ),  $k$  — некоторый безразмерный параметр воздействия воды на тело с передней конусной

частью (см. [42]). При этом предполагаем, что при малых углах атаки функция (2.1) представляется в виде  $R(\alpha) = dk\alpha$ . Поскольку отношение  $\sigma d/r_1^2$  конечно, то второе слагаемое в неравенстве (13.1) достаточно мало (в силу малости безразмерного параметра  $k$ ). Тогда с некоторыми допущениями можно сказать, что отношение в левой части несколько больше 2. Но в левой части неравенства (13.1) стоит отношение коэффициентов бокового и лобового сопротивлений (так называемое аэродинамическое качество). Таким образом, для достижения исследуемой устойчивости нужно иметь дело с конусами достаточно малого раствора.

**14. Об интегрируемости системы.** Исследуем вопрос интегрируемости аналитической системы вида (11.7)–(11.11), зависящей от трех параметров  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ , при дополнительном ограничении вида  $\mu_1 = \mu_3$ . Более того, для простоты будем рассматривать случай  $\mu_1 = \mu_3 = 0$ .

От системы (11.7)–(11.11) отделяется независимая система четвертого порядка (11.8)–(11.11). Заметим, что значение скорости центра масс является первым интегралом системы (11.1), а именно, функция фазовых переменных  $\Psi_0(v, \alpha, \beta, z_1, z_2) = v^2 + \sigma^2(z_1^2 + z_2^2) - 2\sigma z_2 v \sin \alpha = V_C^2$  постоянна на ее фазовых траекториях.

В силу невырожденной замены независимого переменного (при  $v \neq 0$ ) у системы (11.7)–(11.11) также существует аналитический интеграл, а именно, функция фазовых переменных

$$\Psi_1(v, \alpha, \beta, Z_1, Z_2) = v^2(1 + \mu_2^2(Z_1^2 + Z_2^2) - 2\mu_2 Z_2 \sin \alpha) = V_C^2 \quad (14.1)$$

постоянна на ее фазовых траекториях.

Равенство (14.1) позволяет, не решая системы (11.7)–(11.11), найти зависимость скорости характерной точки твердого тела (точки  $D$ ) от других фазовых переменных, а именно, при  $V_C \neq 0$  выполнено равенство

$$v^2 = \frac{V_C^2}{1 + \mu_2^2(Z_1^2 + Z_2^2) - 2\mu_2 Z_2 \sin \alpha}. \quad (14.2)$$

Поскольку фазовое пространство системы (11.7)–(11.11) пятимерно, а в нем существуют асимптотические предельные множества, то равенство (14.1) задает единственный аналитический (даже непрерывный) первый интеграл системы (11.7)–(11.11) во всем фазовом пространстве (ср. [29]).

Разберем подробнее вопрос существования других (дополнительных) первых интегралов системы (11.7)–(11.11). Ее фазовое пространство расслаивается на поверхности

$$\{(v, \alpha, \beta, Z_1, Z_2) : V_C = \text{const}\}. \quad (14.3)$$

Для начала поставим в соответствие независимой подсистеме третьего порядка (11.8)–(11.10) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{cases} \frac{dZ_2}{d\alpha} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha + \mu_2 Z_2 (Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - \mu_2 Z_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha - Z_1^2 \cos \alpha / \sin \alpha}{-Z_2 + \mu_2 (Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha + \mu_2 \sin \alpha \cos^2 \alpha}, \\ \frac{dZ_1}{d\alpha} = \frac{\mu_2 Z_1 (Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - \mu_2 Z_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha + Z_1 Z_2 \cos \alpha / \sin \alpha}{-Z_2 + \mu_2 (Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha + \mu_2 \sin \alpha \cos^2 \alpha}. \end{cases} \quad (14.4)$$

Используя замену  $\tau = \sin \alpha$ , перепишем систему (14.4) в алгебраическом виде

$$\begin{cases} \frac{dZ_2}{d\tau} = \frac{\tau + \mu_2 Z_2 (Z_1^2 + Z_2^2) - \mu_2 Z_2 \tau^2 - Z_1^2 / \tau}{-Z_2 + \mu_2 \tau (1 - \tau^2) + \mu_2 \tau (Z_1^2 + Z_2^2)}, \\ \frac{dZ_1}{d\tau} = \frac{\mu_2 Z_1 (Z_1^2 + Z_2^2) - \mu_2 Z_1 \tau^2 + Z_1 Z_2 / \tau}{-Z_2 + \mu_2 \tau (1 - \tau^2) + \mu_2 \tau (Z_1^2 + Z_2^2)}. \end{cases} \quad (14.5)$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам  $Z_k = u_k \tau$ ,  $k = 1, 2$ , приводим систему (14.5) к следующему виду:

$$\begin{cases} \tau \frac{du_2}{d\tau} + u_2 = \frac{1 - \mu_2 u_2 \tau^2 + \mu_2 u_2 (u_1^2 + u_2^2) \tau^2 - u_1^2}{-u_2 + \mu_2 \tau^2 (u_1^2 + u_2^2) + \mu_2 (1 - \tau^2)}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} + u_1 = \frac{\mu_2 u_1 (u_1^2 + u_2^2) \tau^2 - \mu_2 u_1 \tau^2 + u_1 u_2}{-u_2 + \mu_2 \tau^2 (u_1^2 + u_2^2) + \mu_2 (1 - \tau^2)}, \end{cases} \quad (14.6)$$

что эквивалентно

$$\begin{cases} \tau \frac{du_2}{d\tau} = \frac{1 - \mu_2 u_2 + u_2^2 - u_1^2}{-u_2 + \mu_2 \tau^2 (u_1^2 + u_2^2) + \mu_2 (1 - \tau^2)}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} = \frac{2u_1 u_2 - \mu_2 u_1}{-u_2 + \mu_2 \tau^2 (u_1^2 + u_2^2) + \mu_2 (1 - \tau^2)}. \end{cases} \quad (14.7)$$

Поставим в соответствие системе второго порядка (14.7) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - \mu_2 u_2 + u_2^2 - u_1^2}{2u_1 u_2 - \mu_2 u_1}, \quad (14.8)$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d \left( \frac{u_2^2 + u_1^2 - \mu_2 u_2 + 1}{u_1} \right) = 0. \quad (14.9)$$

Итак, уравнение (14.8) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 - \mu_2 u_2 + 1}{u_1} = C_1 = \text{const}, \quad (14.10)$$

который в прежних переменных выглядит следующим образом:

$$\frac{Z_2^2 + Z_1^2 - \mu_2 Z_2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{Z_1 \sin \alpha} = C_1 = \text{const}. \quad (14.11)$$

**Замечание 14.1.** Рассмотрим систему (11.8)–(11.10) с переменной диссипацией с нулевым средним, становящейся консервативной при  $\mu_2 = 0$  (напомним, при этом ранее предполагалось, что  $\mu_1 = \mu_3 = 0$ ):

$$\begin{cases} \alpha' = -Z_2, \\ Z_2' = \sin \alpha \cos \alpha - Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ Z_1' = Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \end{cases} \quad (14.12)$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$Z_2^2 + Z_1^2 + \sin^2 \alpha = C_1^* = \text{const}, \quad (14.13)$$

$$Z_1 \sin \alpha = C_2^* = \text{const}. \quad (14.14)$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (14.13), (14.14) также является первым интегралом системы (14.12). Но при  $\mu_2 \neq 0$  каждая из функций

$$Z_2^2 + Z_1^2 - \mu_2 Z_2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha \quad (14.15)$$

и (14.14) по отдельности не является первым интегралом системы (11.8)–(11.10). Однако отношение функций (14.15), (14.14) является первым интегралом системы (11.8)–(11.10) при любом  $\mu_2$ .

Далее, произведем поиск дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (11.8)–(11.10). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (14.10) при  $u_1 \neq 0$  следующим образом:

$$\left( u_2 - \frac{\mu_2}{2} \right)^2 + \left( u_1 - \frac{C_1}{2} \right)^2 = \frac{\mu_2^2 + C_1^2}{4} - 1. \quad (14.16)$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$\mu_2^2 + C_1^2 - 4 \geq 0, \quad (14.17)$$

и фазовое пространство системы (11.8)–(11.10) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (14.16).

Таким образом, в силу соотношения (14.10) первое уравнение системы (14.7) примет вид

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} = \frac{1 - \mu_2 u_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}{-u_2 + \mu_2 (1 - \tau^2) + \mu_2 \tau^2 (U_1^2(C_1, u_2) + u_2^2)}, \quad (14.18)$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2} \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - \mu_2 u_2 + 1)} \right\}; \quad (14.19)$$

при этом постоянная интегрирования  $C_1$  выбирается из условия (14.17), или вид уравнения Бернулли:

$$\frac{d\tau}{du_2} = \frac{(\mu_2 - u_2)\tau - \mu_2\tau^3(1 - U_1^2(C_1, u_2) - u_2^2)}{1 - \mu_2 u_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}. \quad (14.20)$$

Уравнение (14.20) при помощи (14.19) легко приводится к линейному неоднородному уравнению:

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2(u_2 - \mu_2)p + 2\mu_2(1 - U_1^2(C_1, u_2) - u_2^2)}{1 - \mu_2 u_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}, \quad p = \frac{1}{\tau^2}. \quad (14.21)$$

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл (см. [12, 13, 16, 23, 32, 33]) в явном виде (т.е. через конечную комбинацию квадратур). При этом общее решение уравнения (14.21) зависит от произвольной постоянной  $C_2$ . Полные выкладки приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (14.21), даже в частном случае  $\mu_2 = C_1 = 2$  имеет следующий вид:

$$p = p_0(u_2) = C \left[ \sqrt{1 - (u_2 - 1)^2} \pm 1 \right] \exp \left[ \sqrt{\frac{1 \mp \sqrt{1 - (u_2 - 1)^2}}{1 \pm \sqrt{1 - (u_2 - 1)^2}}} \right], \quad C = \text{const}. \quad (14.22)$$

**Замечание 14.2.** В выражение найденного первого интеграла формально можно вместо  $C_1$  подставить левую часть первого интеграла (14.10). Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий вид (аналогичный трансцендентному первому интегралу из плоской динамики):

$$K_1 \left( \sin \alpha, Z_2, Z_1, \frac{Z_2}{\sin \alpha}, \frac{Z_1}{\sin \alpha} \right) = C_2 = \text{const}. \quad (14.23)$$

Таким образом, для интегрирования системы четвертого порядка (11.8)–(11.10) уже найдены два независимых первых интеграла. Для полной же ее интегрируемости достаточно найти еще один (дополнительный) первый интеграл, «привязывающий» уравнение (11.11). Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{d\tau} &= \frac{u_1}{-u_2\tau + \mu_2\tau^3(u_1^2 + u_2^2) + \mu_2\tau(1 - \tau^2)}, \\ \frac{du_1}{d\tau} &= \frac{u_1(2u_2 - \mu_2)}{-u_2\tau + \mu_2\tau^3(u_1^2 + u_2^2) + \mu_2\tau(1 - \tau^2)}, \end{aligned}$$

то

$$\frac{du_1}{d\beta} = 2u_2 - \mu_2. \quad (14.24)$$

Очевидно, что при  $u_1 \neq 0$  выполнено равенство

$$u_2 = \frac{1}{2} \left( \mu_2 \pm \sqrt{\mu^2 - 4 \left( u_1 - \frac{C_1}{2} \right)^2} \right), \quad \mu^2 = \mu_2^2 + C_1^2 - 4; \quad (14.25)$$

тогда квадратура

$$\beta + \text{const} = \pm \int \frac{du_1}{\sqrt{\mu^2 - 4 \left( u_1 - \frac{C_1}{2} \right)^2}} \quad (14.26)$$

приводит к инвариантному соотношению

$$2(\beta + C_3) = \pm \arcsin \frac{2u_1 - C_1}{\sqrt{\mu_2^2 + C_1^2 - 4}}, \quad C_3 = \text{const}. \quad (14.27)$$

Другими словами, выполнено равенство

$$\sin [2(\beta + C_3)] = \pm \frac{2u_1 - C_1}{\sqrt{\mu_2^2 + C_1^2 - 4}} \quad (14.28)$$



или, при переходе к старым переменным,

$$\sin [2(\beta + C_3)] = \pm \frac{2Z_1 - C_1 \sin \alpha}{\sqrt{\mu_2^2 + C_1^2 - 4 \sin \alpha}}. \quad (14.29)$$

В принципе, с целью получения дополнительного инвариантного соотношения, «привязывающего» уравнение (11.11), на последнем равенстве можно остановиться, добавив к этому то, что в последнем выражении формально можно вместо  $C_1$  подставить левую часть первого интеграла (14.11).

Проведем некоторые преобразования, приводящие к получению следующего явного вида дополнительного первого интеграла (при этом используется равенство (14.10)):

$$\operatorname{tg}^2 [2(\beta + C_3)] = \frac{(u_1^2 - u_2^2 + \mu_2 u_2 - 1)^2}{u_1^2(4u_2^2 - 4\mu_2 u_2 + \mu_2^2)}. \quad (14.30)$$

Возвращаясь к старым координатам, получим дополнительное инвариантное соотношение в виде

$$\operatorname{tg}^2 [2(\beta + C_3)] = \frac{(Z_1^2 - Z_2^2 + \mu_2 Z_2 \sin \alpha - \sin^2 \alpha)^2}{Z_1^2(4Z_2^2 - 4\mu_2 Z_2 \sin \alpha + \mu_2^2 \sin^2 \alpha)}, \quad (14.31)$$

или окончательно

$$-\beta \pm \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{Z_1^2 - Z_2^2 + \mu_2 Z_2 \sin \alpha - \sin^2 \alpha}{Z_1(2Z_2 - \mu_2 \sin \alpha)} = C_3 = \operatorname{const}. \quad (14.32)$$

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (11.8)–(11.11) имеет первый интеграл вида (14.11), также имеется первый интеграл, находящийся из соотношения (14.21) (или (14.23)), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и, наконец, трансцендентный первый интеграл вида (14.32).

**Теорема 14.1.** Система (11.7)–(11.11) обладает четырьмя инвариантными соотношениями (полным набором), три из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. При этом по крайней мере три из четырех соотношений выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.

**15. Заключение.** Благодаря проведенному анализу неустойчивость простейшего движения тела — прямолинейного поступательного торможения — может быть использована в методических целях, а именно, для определения неизвестных параметров воздействия среды на твердое тело в условиях квазистационарности.

При изучении класса торможений тела с конечными углами атаки главным вопросом является нахождение таких условий, при которых существуют колебания в конечной окрестности прямолинейного поступательного торможения. Возникает, таким образом, необходимость полного нелинейного исследования.

Начальным этапом такого исследования является пренебрежение демпфирующим воздействием со стороны среды на твердое тело. На функциональном языке это означает предположение о том, что тройка динамических функций, определяющих воздействие среды, зависит лишь от одного параметра — угла атаки. Динамические системы, возникающие при таком нелинейном описании, носят характер систем с переменной диссипацией.

При качественном описании взаимодействия тела со средой по причине использования экспериментальной информации о свойствах струйного обтекания возникает определенный разброс в моделировании силомоментных характеристик. Это делает естественным введение определения относительной грубости (относительной структурной устойчивости) и дальнейшее доказательство такой грубости для исследуемых систем (см. [3, 32, 33]).

Результаты, найденные при простейшем предположении об отсутствии демпфирующего воздействия со стороны среды на твердое тело, позволяют сделать вывод о возможности нахождения таких условий, при которых существовали бы колебания в конечной окрестности прямолинейного поступательного торможения. В результате всего этого прямолинейное поступательное торможение тела в принципе может стать устойчивым.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев А. В., Шамолин М. В. Математическое моделирование воздействия среды на твердое тело и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — № 10 (121). — С. 109–115.
2. Андреев А. В., Шамолин М. В. Моделирование воздействия среды на тело конической формы и семейства фазовых портретов в пространстве квазискоростей// Прикл. мех. техн. физ. — 2015. — 56, № 4. — С. 85–91.
3. Андронов А. А., Понтрягин Л. С. Грубые системы// Докл. АН СССР. — 1937. — 14, № 5. — С. 247–250.
4. Бивин Ю. К. Изменение направления движения твердого тела на границе раздела сред// Изв. АН СССР. Мех. тв. тела. — 1981. — № 4. — С. 105–109.
5. Бивин Ю. К., Викторов В. В., Степанов Л. П. Исследование движения твердого тела в глинистой среде// Изв. АН СССР. Мех. тв. тела. — 1978. — № 2. — С. 159–165.
6. Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В. Динамика продольного и бокового движения. — М.: Машиностроение, 1969.
7. Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В. Динамика самолета. Пространственное движение. — М.: Машиностроение, 1988.
8. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. — М.: Наука, 1979.
9. Ерошин В. А. Экспериментальное исследование входа упругого цилиндра в воду с большой скоростью// Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1992. — № 5. — С. 20–30.
10. Ерошин В. А., Привалов В. А., Самсонов В. А. Две модельные задачи о движении тела в сопротивляющейся среде// в кн.: Сб. научн.-метод. статей по теор. мех.. — М.: Наука, 1987. — С. 75–78.
11. Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В. Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
12. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971.
13. Козлов В. В. Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — 79, № 3. — С. 307–316.
14. Кулешов А. С., Черняков Г. А. Исследование задачи о движении тяжелого тела вращения по абсолютно шероховатой плоскости с помощью алгоритма Ковачича// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2018. — 145. — С. 3–85.
15. Локшин Б. Я., Привалов В. А., Самсонов В. А. Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. — М.: МГУ, 1986.
16. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. — М.-Л.: ОГИЗ, 1947.
17. Самсонов В. А., Шамолин М. В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
18. Сычев В. В., Рубан А. И., Сычев Вик. В., Королев Г. Л. Асимптотическая теория отрывных течений. — М.: Наука, 1987.
19. Табачников В. Г. Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки// Тр. ЦАГИ. — 1974. — 1621. — С. 18–24.
20. Трофимов В. В., Шамолин М. В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — 16, № 4. — С. 3–229.
21. Чаплыгин С. А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// в кн.: Полн. собр. соч.. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — Т. 1. — С. 133–135.
22. Чаплыгин С. А. Избранные труды. — М.: Наука, 1976.
23. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
24. Шамолин М. В. Применение методов топографических систем Пуанкаре и систем сравнения в некоторых конкретных системах дифференциальных уравнений// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1993. — № 2. — С. 66–70.
25. Шамолин М. В. Существование и единственность траекторий, имеющих в качестве предельных множеств бесконечно удаленные точки, для динамических систем на плоскости// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1993. — № 1. — С. 68–71.
26. Шамолин М. В. Новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов в задаче о движении тела в среде// Докл. РАН. — 1994. — 337, № 5. — С. 611–614.
27. Шамолин М. В. Многообразие типов фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой// Докл. РАН. — 1996. — 349, № 2. — С. 193–197.

28. *Шамолин М. В.* Пространственные топографические системы Пуанкаре и системы сравнения// Усп. мат. наук. — 1997. — 52, № 3. — С. 177–178.
29. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — 53, № 3. — С. 209–210.
30. *Шамолин М. В.* Новое семейство фазовых портретов в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 2000. — 371, № 4. — С. 480–483.
31. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете вращательных производных момента сил по угловой скорости// Докл. РАН. — 2005. — 403, № 4. — С. 482–485.
32. *Шамолин М. В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. — М.: Экзамен, 2007.
33. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — 14, № 3. — С. 3–237.
34. *Шамолин М. В.* Трехпараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 2008. — 418, № 1. — С. 46–51.
35. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости в пространственной динамике твердого тела// Докл. РАН. — 2010. — 431, № 3. — С. 339–343.
36. *Шамолин М. В.* Многопараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2011. — № 3. — С. 24–30.
37. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — 442, № 4. — С. 479–481.
38. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — 20, № 4. — С. 3–231.
39. *Шамолин М. В.* Моделирование движения твердого тела в сопротивляющейся среде и аналогии с вихревыми дорожками// Мат. модел. — 2015. — 27, № 1. — С. 33–53.
40. *Шамолин М. В.* К задаче о свободном торможении твердого тела с передним конусом в сопротивляющейся среде// Мат. модел. — 2016. — 28, № 9. — С. 3–23.
41. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — 475, № 5. — С. 519–523.
42. *Шамолин М. В.* Моделирование пространственного воздействия среды на тело конической формы// Сиб. ж. индустр. мат. — 2018. — 21, № 2 (74). — С. 122–130.
43. *Andreev A. V. and Shamolin M. V.* Methods of mathematical modeling of the action of a medium on a conical body// J. Math. Sci. — 2017. — 221, № 2. — P. 161–168.
44. *Lokshin B. Ya., Samsonov V.A., Shamolin M. V.* Pendulum systems with dynamical symmetry// J. Math. Sci. — 2017. — 227, № 4. — P. 461–519.

Шамолин Максим Владимирович  
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru