М. В. Шамолин, Некоторые интегрируемые динамические системы нечетного порядка с диссипацией, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 174, 52–69

DOI: https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-174-52-69

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 174 (2020). С. 52–69
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-174-52-69

УДК 517.933

НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ

© 2020 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. В работе показана интегрируемость некоторых классов однородных по части переменных динамических систем нечетного (третьего, пятого и седьмого) порядка, в которых выделяется система на касательном расслоении к гладким многообразиям. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией разного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает ранее рассмотренные.

Ключевые слова: динамическая система, неконсервативное поле сил, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

ODD-ORDER INTEGRABLE DYNAMICAL SYSTEMS WITH DISSIPATION

© 2020 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. In this paper, we prove the integrability of some classes of odd-order dynamical systems (namely, systems of order 3, 5, and 7), which are homogeneous in some variables and contain a system on the tangent bundle of a smooth manifolds. In this case, we separate force fields into internal (conservative) and external, which has sign-alternating dissipation. External fields are introduced by using some unimodular transformations and generalize fields considered earlier.

Keywords and phrases: dynamical system, nonconservative force field, integrability, transcendental first integral.

AMS Subject Classification: 70G60

Дать общее определение динамической системы с диссипацией довольно затруднительно. Иногда это может быть сделано: вносимые в систему определенные коэффициенты в уравнениях указывают на рассеяние энергии в одних областях фазового пространства или на ее подкачку в других областях. Это обстоятельство приводит к потере известных первых интегралов (законов сохранения), выражающихся через гладкие функции. Но как только в системе обнаруживаются притягивающие или отталкивающие предельные множества, необходимо забыть о полном наборе даже непрерывных во всем фазовом пространстве первых интегралов (см. [1, 3, 6, 12]).

В некоторых случаях для систем с диссипацией если и удается найти полный набор первых интегралов, то среди них обязательно будут первые интегралы, являющиеся трансцендентными (в смысле комплексного анализа) функциями, имеющими существенно особые точки. Полученные в работе результаты особенно важны в случае присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

Во многих работах автора уже затрагивалась данная тематика (см., например, [13, 14, 16, 17, 19, 20]). В данной работе показана интегрируемость некоторых классов однородных по части переменных динамических систем пятого порядка, в которых выделяется система на касательном расслоении к двумерным многообразиям. При этом силовые поля обладают диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные случаи.

1. Системы третьего порядка. Пусть v, α, z — фазовые переменные в гладкой динамической системе, правые части которой являются однородными полиномами (для простоты, степени 2) по переменным v, z с коэффициентами, зависящими от α следующим образом:

$$\begin{cases} \dot v = a(\alpha)v^2 + b(\alpha)vz + c(\alpha)z^2, \\ \dot z = d(\alpha)v^2 + e(\alpha)vz + f(\alpha)z^2, \\ v\dot\alpha = g(\alpha)v^2 + h(\alpha)vz + i(\alpha)z^2. \end{cases} \tag{1.1}$$

Выбирая в качестве новой независимой переменной величину q, $dq = v\,dt$, $v \neq 0$, вводя новую фазовую переменную Z по формуле $z = Zv$ и обозначая дифференцирование по q штрихом, систему (1.1) можно переписать в следующем виде:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \tag{1.2}$$

$$\begin{cases} \alpha' = g(\alpha) + h(\alpha)Z + i(\alpha)Z^2, \\ Z' = d(\alpha) + e(\alpha)Z + f(\alpha)Z^2 - Z\Psi(\alpha, Z), \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\Psi(\alpha, Z) = a(\alpha) + b(\alpha)Z + c(\alpha)Z^2;$$

при этом уравнение (1.2) для v отделяется, что дает возможность рассматривать два оставшихся уравнения в качестве системы (1.3) с одной степенью свободы на двумерном многообразии $N^2\{Z;\alpha\}$ (см. [15, 18, 23, 26]).

Особняком стоит *случай*, когда выполнены тождества

$$d(\alpha) \equiv e(\alpha) \equiv f(\alpha) \equiv 0. \tag{1.4}$$

При этом остальные шесть функций $a(\alpha)$, $b(\alpha)$, $c(\alpha)$, $g(\alpha)$, $h(\alpha)$, $i(\alpha)$, вообще говоря, не равны тождественно нулю. Тогда система (1.2), (1.3) имеет естественный аналитический первый интеграл

$$\Phi_1(v; Z) = z = vZ = C_1 = \mathrm{const}\,. \tag{1.5}$$

Для полной интегрируемости системы (1.2), (1.3) при условии (1.4) нужно найти еще один первый интеграл, независимый с (1.5). Для этого можно предъявить достаточные условия существования искомого первого интеграла.

Предложение 1.1. *Предположим, что выполнены следующие условия*:

$$a(\alpha) = \frac{h^2(\alpha)}{i^2(\alpha)}c(\alpha), \quad b(\alpha) = \frac{h(\alpha)}{i(\alpha)}c(\alpha), \quad g(\alpha) = \frac{h^2(\alpha)}{i(\alpha)}, \tag{1.6}$$

где $c(\alpha)$, $h(\alpha)$, $i(\alpha)$ — произвольные гладкие функции на своей области определения, то система (1.2), (1.3) *при условии* (1.4) *имеет два гладких первых интеграла, а именно,* (1.5), *а также*

$$\Phi_0(v; Z; \alpha) = v^2(\gamma(\alpha) + \epsilon(\alpha)Z) = C_0 = \mathrm{const}, \tag{1.7}$$

где функции $\gamma(\alpha)$ и $\epsilon(\alpha)$ имеют вид

$$\gamma(\alpha) = \gamma_0 \exp\left[-2\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{c(\xi)}{i(\xi)}d\xi\right], \quad \epsilon(\alpha) = \epsilon_0 \exp\left[-\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{c(\xi)}{i(\xi)}d\xi\right], \quad \gamma_0 = \gamma(\alpha_0), \quad \epsilon_0 = \epsilon(\alpha_0). \tag{1.8}$$

Доказательство. Действительно, полная производная функции (1.7) в силу системы (1.2), (1.3) при условии (1.4) имеет вид

$$v^2\Big[2\gamma(\alpha)a(\alpha) + \gamma'(\alpha)g(\alpha)\Big] + v^2Z\Big[2b(\alpha)\gamma(\alpha) + a(\alpha)\epsilon(\alpha) + \gamma'(\alpha)h(\alpha) + \epsilon'(\alpha)g(\alpha)\Big] + \\ + v^2Z^2\Big[2c(\alpha)\gamma(\alpha) + b(\alpha)\epsilon(\alpha) + \gamma'(\alpha)i(\alpha) + \epsilon'(\alpha)h(\alpha)\Big] + v^2Z^3\Big[\epsilon(\alpha)c(\alpha) + \epsilon'(\alpha)i(\alpha)\Big],$$

и она тождественно равна нулю, поскольку выполнены соотношения (1.6) и (1.8). □

Другими словами, независимая подсистема (1.3) на многообразии $N^2\{Z;\alpha\}$ при условии (1.4) имеет рациональный по Z первый интеграл вида

$$\Phi(Z;\alpha) = \frac{\gamma(\alpha) + \epsilon(\alpha)Z}{Z^2} = C = \mathrm{const} \tag{1.9}$$

(см. [2, 4, 5, 21, 22]), который не имеет существенно особых точек (по крайней мере, если функция $\gamma(\alpha)$ нигде не равна нулю). Поэтому подсистема (1.3) не имеет притягивающих или отталкивающих предельных множеств, позволяющих говорить о наличии в системе диссипации того или иного знака.

Таким образом, внутреннее силовое поле (зависящее от трех произвольных гладких функций $c(\alpha)$, $h(\alpha)$ и $i(\alpha)$) в системе (1.2), (1.3) при условии (1.4) не нарушает консервативности самой системы.

В данной работе мы ограничимся важным частным случаем системы (1.2), (1.3).

В качестве представителя семейства систем вида (1.2), (1.3) при условии (1.4) будем рассматривать следующую систему третьего порядка при отсутствии внешнего поля сил:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \tag{1.10}$$

$$\begin{cases} \alpha' = -Z + b_0 Z^2 \delta(\alpha), \\ Z' = -Z\Psi(\alpha, Z), \end{cases} \tag{1.11}$$

$$\Psi(\alpha, Z) = -b_0 Z^2 \delta'(\alpha),$$

где $z = Zv$, $b_0 \geqslant 0$ — параметр, $\delta(\alpha)$ — некоторая гладкая функция.

Предложение 1.2. *Система* (1.10), (1.11) *имеет два гладких первых интеграла*:

$$\Phi_0(v; Z; \alpha) = v^2(1 - 2b_0 Z\delta(\alpha)) = C_0 = \mathrm{const},$$
$$\Phi_1(v; Z) = vZ = C_1 = \mathrm{const}.$$

Для доказательства достаточно продифференцировать функции Φ_0 и Φ_1 в силу системы (1.10), (1.11).

Другими словами, независимая подсистема (1.11) на многообразии $N^2\{Z;\alpha\}$ имеет рациональный по Z первый интеграл вида

$$\Phi(Z;\alpha) = \frac{1 - 2b_0 Z\delta(\alpha)}{Z^2} = C = \mathrm{const}, \tag{1.12}$$

который не имеет существенно особых точек. В силу последнего, подсистема (1.11) не имеет притягивающих или отталкивающих предельных множеств, позволяющих говорить о наличии в системе диссипации того или иного знака. Таким образом, внутреннее силовое поле (зависящее от параметра $b_0 > 0$) в системе (1.10), (1.11) не нарушает консервативности системы.

Приведем фазовый портрет системы (1.11), слегка преобразовав ее. Правая часть линейно зависит от величины Z. Таким образом, вся ось абцисс $\{(\alpha, Z) \in \mathbb{R}^2 : Z = 0\}$ состоит из неизолированных положений равновесия.

Немного поправим правую часть за счет ее сокращения на величину Z (изменив скорость движения вдоль фазовых траекторий). Таким образом, фазовые характеристики остались на своем месте, при этом ось абцисс перестала состоять из неизолированных положений равновесия. Рассматриваемая система примет вид

$$\begin{cases} \alpha' = -1 + b_0 Z\delta(\alpha), \\ Z' = b_0 Z^2 \delta'(\alpha). \end{cases} \tag{1.13}$$

Для функции $\delta(\alpha) = \sin\alpha$ поле направлений фазового портрета системы (1.13) представлено на рис. 1.

Добавим в систему (1.10), (1.11) внешнее силовое поле $F(\alpha)$ при наличии внутреннего ($b_0 > 0$) следующим образом:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \tag{1.14}$$

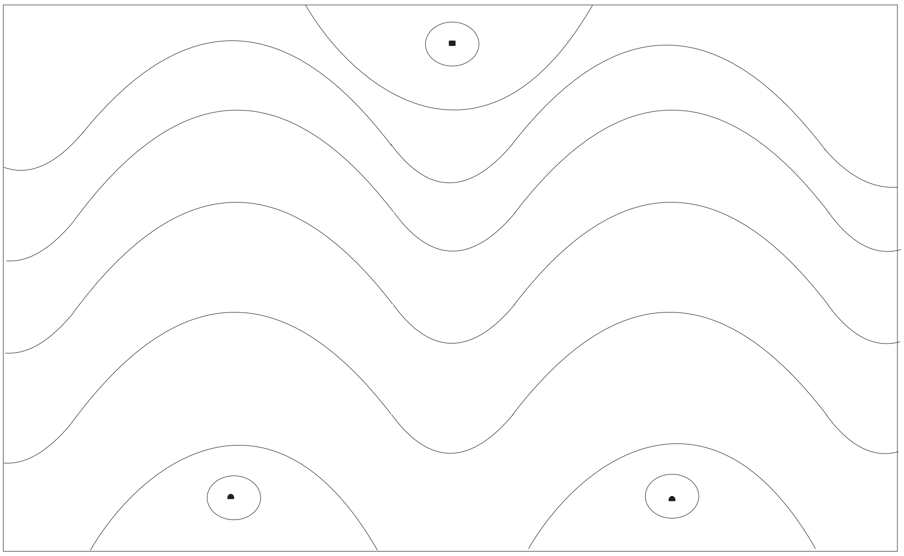

Рис. 1. Поле направлений для фазового портрета системы (1.13)

$$\begin{cases} \alpha' = -Z + b_0 Z^2 \delta(\alpha), \\ Z' = F(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z). \end{cases} \tag{1.15}$$

Создается впечатление, что система осталась консервативной (это действительно имеет место при $b_0 = 0$, т.е. при отсутствии внутреннего поля; см. [24,25]). Консервативность «подтвердилась» бы наличием в системе двух гладких первых интегралов.

Действительно, при некотором естественном условии у системы (1.14), (1.15) существует гладкий первый интеграл вида

$$\Phi_1(v; Z; \alpha) = v^2(Z^2 + F_1(\alpha)) = C_1 = \text{const}, \quad F_1'(\alpha) = 2F(\alpha), \tag{1.16}$$

структура которого напоминает интеграл полной энергии. Но дополнительного гладкого первого интеграла система, вообще говоря, не имеет. Более того, если, в частности, $F(\alpha) = \delta(\alpha)\delta'(\alpha)$, то дополнительный интеграл является трансцендентной функцией фазовых переменных (т.е. имеет существенно особые точки, означающие наличие в системе притягивающих предельных множеств) (см. следующее предложение, а также [8,10,11]).

Предложение 1.3. *Если* $F(\alpha) = \delta(\alpha)\delta'(\alpha)$, *то система* (1.14), (1.15) *имеет два независимых* (*один, вообще говоря, трансцендентный и один гладкий*) *первых интеграла*:

$$\Phi_0(v; Z; \alpha) = v^2 \left(1 - b_0 Z\delta(\alpha) - b_0\big(Z^2 + \delta^2(\alpha)\big) \operatorname{arctg} \frac{\delta(\alpha)}{Z}\right) = C_0 = \text{const}, \tag{1.17}$$

$$\Phi_1(v; Z; \alpha) = v^2(Z^2 + \delta^2(\alpha)) = C_1 = \text{const}. \tag{1.18}$$

Для доказательства достаточно продифференцировать функции (1.17) и (1.18) в силу системы (1.14), (1.15) при условии $F(\alpha) = \delta(\alpha)\delta'(\alpha)$.

Более того, как видно из вида первого интеграла (1.17), притягивающее множество рассматриваемой системы (1.14), (1.15) может быть найдено из системы равенств $Z = \delta(\alpha) = 0$.

В данном случае первый интеграл (1.18) является частным случаем интеграла (1.16).

Модифицируем далее систему (1.14), (1.15) при наличии двух ключевых параметров $b_0, b_1 \geqslant 0$, введя внешнее силовое поле. Получим систему

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \tag{1.19}$$

$$\begin{cases} \alpha' = -Z + b_0 Z^2 \delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\tilde{f}(\alpha), \\ Z' = F(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z), \end{cases} \tag{1.20}$$

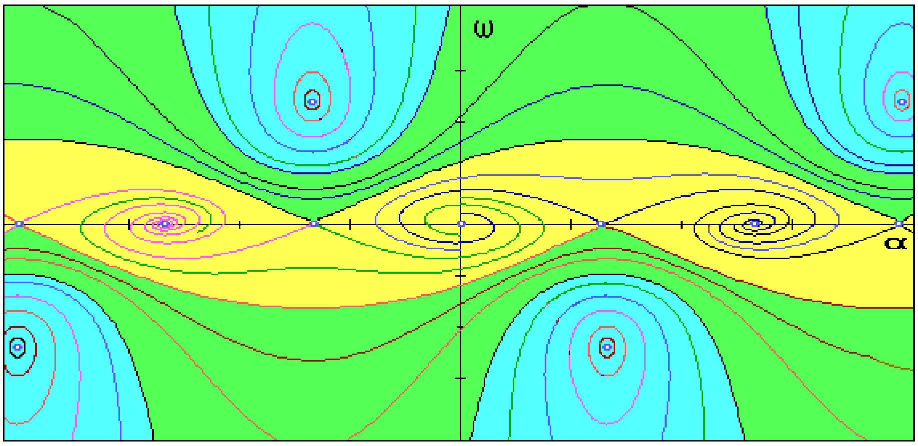

Рис. 2. Фазовый портрет системы с диссипацией

$$\Psi(\alpha, Z) = -b_0 Z^2 \delta'(\alpha) + b_1 F(\alpha)\delta(\alpha), \quad \tilde{f}(\alpha) = \frac{\mu - \delta^2(\alpha)}{\delta'(\alpha)},$$

где $\mu = \mathrm{const}$. При этом коэффициенты консервативной составляющей силового поля содержат параметр b_0, а неконсервативной составляющей внешнего поля — параметр b_1.

Только что мы ввели такое поле, добавив коэффициент $F(\alpha)$ в уравнение на Z' системы (1.14), (1.15), и убедились, что полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность появится при дополнительном условии $b_0 = 0$.

Но мы расширим введение силового поля, положив $b_1 > 0$. Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения $T^*M^1\{Z;\alpha\}$ примет вид (1.19), (1.20). Как будет показано далее, диссипативное силовое поле было введено с помощью унимодулярного преобразования.

Теорема 1.1. *Если выполнено условие $F(\alpha) = \delta(\alpha)\delta'(\alpha)$, то система* (1.19), (1.20) *обладает полным набором первых интегралов, состоящим из двух первых интегралов*: *одним гладким и одним, вообще говоря, трансцендентным.*

В дальнейшем будет доказана более общая теорема 4.1, поэтому доказательство теоремы 1.1 мы опускаем.

Для функций $\delta(\alpha) = \sin\alpha$, $F(\alpha) = \delta(\alpha)\delta'(\alpha)$, $\mu = 1$, три типа фазовых портретов системы (1.20) представлены на рис. 2–4 ($\omega \leftrightarrow Z$).

2. Системы пятого порядка при отсутствии внешнего силового поля. Пусть v, α, β, z_1, z_2 — фазовые переменные в гладкой динамической системе, правые части которой — однородные полиномы степени 2 по переменным v, z_1, z_2 с коэффициентами, зависящими от α и β. Выбирая в качестве нового времени переменную q ($dq = v\,dt$, $v \neq 0$) и обозначая штрихом дифференцирование по q, рассмотрим систему пятого порядка

$$v' = \Psi(\alpha, Z_1, Z_2)v, \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} \alpha' = -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\delta(\alpha), \\ Z_2' = \Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) Z_1^2 - Z_2 \Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \\ Z_1' = \left[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_1 Z_2 - Z_1 \Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \\ \beta' = Z_1 f(\alpha), \end{cases} \tag{2.2}$$

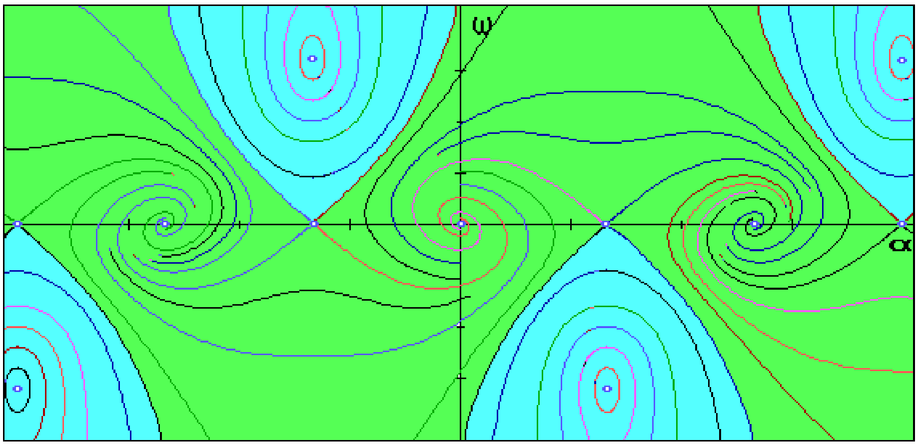

Рис. 3. Фазовый портрет системы с диссипацией

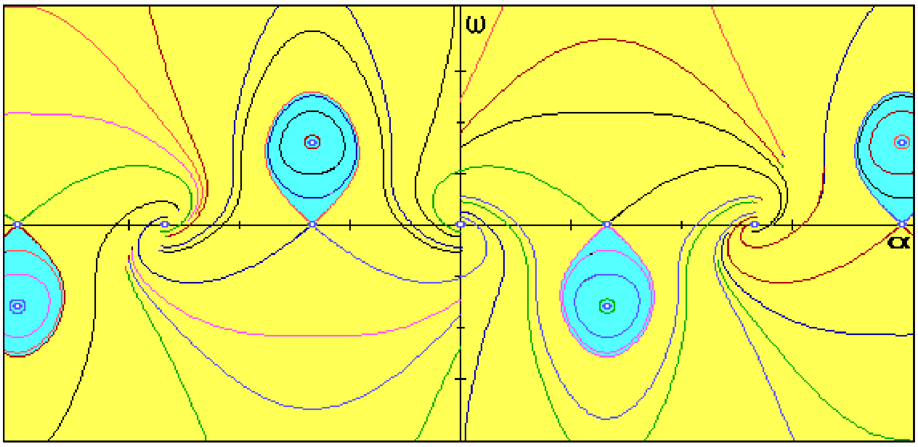

Рис. 4. Фазовый портрет системы с диссипацией

$$\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) = -b(Z_1^2 + Z_2^2)\delta'(\alpha),$$

где $z_k = Z_k v$, $k = 1, 2$, $b \geqslant 0$, $\delta(\alpha)$, $f(\alpha)$ — некоторые гладкие функции, как систему при отсутствии внешнего поля сил. При этом уравнение (2.1) отделяется, что дает возможность рассматривать уравнения (2.2) в качестве независимой системы (с двумя степенями свободы) на четырехмерном многообразии $N^4\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta\} = TM^2\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta\}$ (касательном расслоении гладкого двумерного многообразия $M^2\{\alpha, \beta\}$; см. [20]).

Рассмотрим структуру системы (2.2). Она соответствует следующим уравнениям геодезических линий на касательном расслоении $TM^2\{\dot\alpha, \dot\beta; \alpha, \beta\}$ многообразия $M^2\{\alpha, \beta\}$ (в частности, сферы или поверхностей вращения — с двумя или тремя ненулевыми коэффициентами связности):

$$\begin{cases} \ddot\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\dot\beta^2 = 0, \\ \ddot\beta + 2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Действительно, выбрав новые координаты Z_1, Z_2 в касательном пространстве в виде

$$\dot\alpha = -Z_2, \quad \dot\beta_1 = Z_1 f(\alpha), \tag{2.4}$$

получим соотношения на них в виде

$$\begin{aligned} Z_1' &= \left[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_1Z_2 - Z_1\Psi(\alpha,Z_1,Z_2), \\ Z_2' &= \Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha,Z_1,Z_2), \end{aligned} \tag{2.5}$$

(ср. с системой (2.2)); при этом уравнения (2.3) почти всюду эквивалентны совокупности (2.4), (2.5), которая, прежде всего, присутствует в системе (2.2).

Далее, в системе (2.2) также присутствуют коэффициенты при параметре $b \geqslant 0$. Но, как и в системе (1.11), они не нарушают консервативности, поскольку система (2.1), (2.2) обладает полным набором (четырьмя) гладких первых интегралов.

Предложение 2.1. *Если всюду справедливо равенство*

$$2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)f^2(\alpha) \equiv 0, \tag{2.6}$$

то система (2.1), (2.2) *имеет аналитический первый интеграл вида*

$$\Phi_1(v;Z_2,Z_1) = v^2(Z_1^2+Z_2^2) = C_1^2 = \mathrm{const}\,. \tag{2.7}$$

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (2.7) в силу системы (2.1), (2.2) дает

$$2v^2\left[\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)f^2(\alpha) + 2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_1^2Z_2 \equiv 0,$$

поскольку выполнено свойство (2.6). □

Предложение 2.2. *Если функция $\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)$ является функцией лишь α:*

$$\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) = \Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha), \tag{2.8}$$

то система (2.1), (2.2) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_2(v;Z_1;\alpha) = v^2Z_1\delta(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}; \tag{2.9}$$

при этом функция $\delta(\alpha)$ должна удовлетворять равенству

$$\delta(\alpha) = A_1 f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(b)db\right\}, \quad A_1 = \mathrm{const}\,. \tag{2.10}$$

Доказательство. Будем искать первый интеграл в виде $v^2Z_1\Phi_0(\alpha)$. Дифференцирование этой последней функции в силу системы (2.1), (2.2) дает

$$v^2\left\{\left[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha) - \Phi_0'(\alpha)\right\} Z_1Z_2 - v^2bZ_1(Z_1^2+Z_2^2)\Big[\delta'(\alpha)\Phi_0(\alpha) - \delta(\alpha)\Phi_0'(\alpha)\Big].$$

Для того, чтобы эта производная тождественно равнялась нулю, достаточно, чтобы функция $\Phi_0(\alpha)$ удовлетворяла уравнению

$$\Phi_0'(\alpha) = \left[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),$$

а также было выполнено тождество

$$\delta'(\alpha)\Phi_0(\alpha) \equiv \delta(\alpha)\Phi_0'(\alpha).$$

Но для этого, в свою очередь, достаточно выполнения свойства (2.10) и равенства функций $\Phi_0(\alpha)$ и $\delta(\alpha)$ с точностью до множителя. Предложение доказано. □

Если выполнено свойство (2.8) и функция $\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)$ также является функцией лишь α, $\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta) = \Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha)$, то в системе (2.2) выделяется независимая подсистема третьего порядка, состоящая из первых трех уравнений (уравнение на β' отделяется). В частности, если выполнены свойства (2.6), (2.8), то такая независимая подсистема выделяется.

Аналогичным образом доказывается и следующее утверждение.

Предложение 2.3. *Пусть функция $\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)$ является функцией лишь α, $\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta) = \Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha)$. Тогда система* (2.1), (2.2) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_0(v; Z_2; \alpha) = v^2(1 - 2bZ_2\delta(\alpha)) = C_0 = \mathrm{const}, \tag{2.11}$$

если функция $\delta(\alpha)$ удовлетворяет равенству:

$$\delta(\alpha) = A_2 \exp\left\{-\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma^\alpha_{\beta\beta}(b)db\right\}, \quad A_2 = \mathrm{const}\,.$$

В частности, если выполнены свойства (2.6), (2.8), (2.10), то система (2.1), (2.2) имеет гладкий первый интеграл вида (2.11).

Предложение 2.4. *Если выполнены условия* (2.6), (2.8), (2.10), *то система* (2.1), (2.2) *имеет первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_3(\alpha,\beta) = \beta + \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{C_2^2 f(b)}{A_3 + bC_1^2\delta^2(b)}\,db = C_4 = \mathrm{const}, \tag{2.12}$$

где, после взятия интеграла (2.12), *вместо постоянных C_1^2, C_2 можно подставить левые части равенств* (2.7), (2.9) *соответственно* ($A_3 = \mathrm{const}$).

Доказательство. Данное предложение вытекает из предложений 2.1 и 2.2 и явных видов первых интегралов (2.7) и (2.9). □

Прямым следствием предложений 2.1–2.4 является следующая основная теорема данного раздела.

Теорема 2.1. *Если выполнены условия* (2.6), (2.8), (2.10), *то система* (2.1), (2.2) *обладает полным набором* (*четырьмя*) *гладких независимых первых интегралов вида* (2.7), (2.9), (2.11), (2.12).

3. Введение внешнего силового поля и унимодулярные преобразования для систем пятого порядка. Модифицируем систему (2.1), (2.2), при наличии двух ключевых параметров $b, b_1 \geqslant 0$, введя внешнее силовое поле. Если ввести такое поле, добавив коэффициент $F(\alpha)$ в уравнение на Z_2' системы (3.1), (3.2) и даже положив при этом $b_1 = 0$, то полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность появляется при дополнительном условии $b = 0$. Положим $b_1 > 0$. Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения $T^*M^2\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta\}$ примет вид

$$v' = \Psi(\alpha, Z_1, Z_2)v, \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} \alpha' = -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\delta(\alpha) + b_1F(\alpha)\tilde f(\alpha), \\ Z_2' = F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \\ Z_1' = \left[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_1Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \\ \beta' = Z_1 f(\alpha), \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) = -b(Z_1^2 + Z_2^2)\delta'(\alpha) + b_1 F(\alpha)\delta(\alpha), \quad \tilde{f}(\alpha) = \frac{\mu - \delta^2(\alpha)}{\delta'(\alpha)},$$

$\mu = \mathrm{const}$. При этом коэффициенты консервативной составляющей силового поля содержат параметр b, а неконсервативной составляющей внешнего поля — параметр b_1.

Силовое поле в уравнениях на v', Z_1', Z_2' определяется функцией $\Psi(\alpha, Z_1, Z_2)$. Опишем введение силового поля в виде двумерного столбца, в первой строке которого стоят коэффициенты из функции $\Psi(\alpha, Z_1, Z_2)$, а во второй строке — коэффициенты из уравнения на α'. Таким образом, совместное силовое поле (в котором присутствуют три параметра $b, b_1 \geqslant 0$, $\mu \in \mathbb{R}$) будут иметь вид

$$U \begin{pmatrix} b(Z_1^2 + Z_2^2) \\ b_1 F(\alpha) \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} -\delta'(\alpha) & \delta(\alpha) \\ \delta(\alpha) & \tilde{f}(\alpha) \end{pmatrix},$$

где U — преобразование с определителем, равным $-\mu$, и являющееся унимодулярным преобразованием при $\mu = \pm 1$. Такое преобразование вносит в систему диссипацию (как одного знака, так и другого; см. также [7, 9, 16, 18, 20]).

4. Интегрирование системы пятого порядка с диссипацией. Перейдем теперь к интегрированию искомой системы пятого порядка (3.1), (3.2) при выполнении свойств (2.6), (2.8). Она также допускает отделение независимой подсистемы третьего порядка.

Теорема 4.1. *Пусть для некоторых $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ выполняются равенства*

$$\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha) f^2(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln|\delta(\alpha)|, \quad F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{\delta^2(\alpha)}{2}. \tag{4.1}$$

Тогда система (3.1), (3.2) *при выполнении равенств* (2.6), (2.8) *обладает четырьмя независимыми (вообще говоря, трансцендентными в смысле комплексного анализа, см. [12]) первыми интегралами.*

Доказательство. Для начала поставим в соответствие рассматриваемой подсистеме третьего порядка неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{dZ_2}{d\alpha} &= \frac{F(\alpha) + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2)\delta'(\alpha) - b_1 Z_2 F(\alpha)\delta(\alpha) + \Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha) f^2(\alpha) Z_1^2}{-Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\tilde{f}(\alpha)}, \\ \frac{dZ_1}{d\alpha} &= \frac{bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2)\delta'(\alpha) + \left[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_1 Z_2 - b_1 Z_1 F(\alpha)\delta(\alpha)}{-Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\tilde{f}(\alpha)}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$Z_k = u_k \delta(\alpha), \quad k = 1, 2, \tag{4.3}$$

и пользуясь (4.1), приводим систему (4.2) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \delta \frac{du_2}{d\delta} + u_2 &= \frac{\lambda + bu_2(u_1^2 + u_2^2)\delta^2 - b_1\lambda u_2 \delta^2 + \kappa u_1^2}{-u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\delta^2 + b_1\lambda(\mu - \delta^2)}, \\ \delta \frac{du_1}{d\delta} + u_1 &= \frac{bu_1(u_1^2 + u_2^2)\delta^2 - b_1\lambda u_1 \delta^2 - \kappa u_1 u_2}{-u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\delta^2 + b_1\lambda(\mu - \delta^2)}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

В дальнейшем система (4.4) приводится к уравнению первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda - b_1\lambda\mu u_2 + u_2^2 + \kappa u_1^2}{(1 - \kappa)u_1 u_2 - b_1\lambda\mu u_1}. \tag{4.5}$$

Уравнение (4.5) имеет вид уравнения Абеля (см. [2, 9]). В частности, при $\kappa = -1$ оно имеет первый интеграл

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 - b_1\lambda\mu u_2 + \lambda}{u_1} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{4.6}$$

который в прежних переменных выглядит следующим образом:

$$\Theta_1(Z_2, Z_1; \alpha) = G_1\left(\frac{Z_2}{\delta(\alpha)},\ \frac{Z_1}{\delta(\alpha)}\right) = \frac{Z_2^2 + Z_1^2 - b_1\lambda\mu Z_2\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)}{Z_1\delta(\alpha)} = C_1 = \mathrm{const}\,. \tag{4.7}$$

Итак, в общем случае первые интегралы имеют довольно громоздкий вид. В частности, явный вид одного из первых интегралов при $\kappa = -1$ был только что приведен.

При помощи интеграла (4.7) получаются и другие первые интегралы:

$$\Theta_2(Z_2, Z_1; \alpha) = G_2\left(\delta(\alpha),\ \frac{Z_2}{\delta(\alpha)},\ \frac{Z_1}{\delta(\alpha)}\right) = C_2 = \mathrm{const}, \tag{4.8}$$

$$\Theta_3(Z_2, Z_1; \alpha, \beta) = G_3\left(\delta(\alpha),\ \beta,\ \frac{Z_2}{\delta(\alpha)},\ \frac{Z_1}{\delta(\alpha)}\right) = C_3 = \mathrm{const}\,. \tag{4.9}$$

Выражение первых интегралов (4.8), (4.9) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\delta(\alpha)$. Например, при $\kappa = -1$ второй из интегралов системы (3.1), (3.2) найдется из уравнения Бернулли

$$\frac{d\delta}{du_2} = \frac{(b_1\lambda\mu - u_2)\delta + b\delta^3(U^2(C_1, u_2) + u_2^2) - b_1\lambda\delta^3}{\lambda - b_1\lambda\mu u_2 + u_2^2 - U^2(C_1, u_2)},$$

$$U(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(\lambda - b_1\lambda\mu u_2 + u_2^2)}\right\}.$$

При этом после взятия этого интеграла вместо C_1^2 можно подставить левую часть равенства (4.7).

Кроме того, у системы (3.1), (3.2) существует гладкий первый интеграл (по аналогии с (2.11)), который, например, при $b = b_1$, $\mu = 1$ примет вид

$$\Theta_0(v; Z_2; \alpha) = v^2(1 - 2bZ_2\delta(\alpha) + b^2(Z_1^2 + Z_2^2)) = C_0 = \mathrm{const}\,. \qquad \square$$

Справедлива теорема, обратная к теореме 4.1.

Теорема 4.2. *Условия* (2.6), (2.8), (4.1) (*например, при* $\kappa = -1$) *являются необходимыми условиями существования первого интеграла* (4.7) *для системы* (3.1), (3.2).

5. Строение первых интегралов для систем пятого порядка с диссипацией. Если α — периодическая координата периода 2π, то система (3.1), (3.2) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним. При $F(\alpha) \equiv 0$ она превращается в консервативную систему (2.1), (2.2). Последняя, в частности, обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (2.7) и (2.9). Более того, если функция $F(\alpha)$ не равна тождественно нулю, но $b_1 = 0$, то система (3.1), (3.2) при втором условии из (4.1) обладает первым интегралом вида

$$\Theta_0(v; Z_2, Z_1; \alpha) = v^2(Z_1^2 + Z_2^2 + \lambda\delta^2(\alpha)) = \mathrm{const}\,. \tag{5.1}$$

Очевидно, отношение двух первых интегралов (5.1), (2.9) также является первым интегралом системы (3.1), (3.2), если функция $F(\alpha)$ не равна тождественно нулю, но $b_1 = 0$. При $b_1 > 0$ каждая из функций

$$\Theta_{b_1}(v; Z_2, Z_1; \alpha) = v^2(Z_1^2 + Z_2^2 - b_1\lambda\mu + \lambda\delta^2(\alpha)) \tag{5.2}$$

и (2.9) по отдельности не является первым интегралом системы (3.1), (3.2), однако отношение функций (5.2), (2.9) является первым интегралом (4.7) системы (3.1), (3.2) при любом $b_1 > 0$ (при $\kappa = -1$).

Вообще же, как и указывалось ранее, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств.

6. Заключение для систем пятого порядка. Выделим существенный случай для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на двумерной сфере, и функции $\delta(\alpha)$:

$$f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \delta(\alpha) = \sin\alpha. \tag{6.1}$$

В случае (6.1) получаем класс систем (3.1), (3.2) при $\mu = 1$, соответствующих пространственному движению динамически симметричного твердого тела на нулевом уровне циклического интеграла в неконсервативном поле сил (см. [15]). В частности, при $\delta(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ рассматриваемая система описывает геодезический поток на двумерной сфере. В случае (6.1), если

$$\delta(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{\cos\alpha},$$

то система описывает пространственное движение твердого тела в силовом поле $F(\alpha)$ под действием следящей силы (см. [16]). В частности, если

$$F(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha, \quad \delta(\alpha) = \sin\alpha,$$

то система эквивалентна пространственному (сферическому) маятнику, помещенный в поток набегающей среды, и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Если функция $\delta(\alpha)$ не является периодической, то почти всегда рассматриваемая система является системой с переменной диссипацией с ненулевым средним (т.е. она является «собственно» диссипативной). Тем не менее, и в этом случае (благодаря теореме 4.1) можно получить явный вид трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Последнее также является новым нетривиальным случаем интегрируемости диссипативных систем в явном виде.

7. Системы седьмого порядка при отсутствии внешнего силового поля. Пусть v, α, β $(\beta = (\beta_1, \beta_2))$, z $(z = (z_1, z_2, z_3))$ — фазовые переменные в системе, правые части которой — однородные полиномы степени 2 по переменным v, z, с коэффициентами, зависящими от α, β. Тогда, выбирая в качестве нового времени переменную q $(dq = v\,dt,\ v \neq 0)$ и обозначая штрихом дифференцирование по q, будем рассматривать систему седьмого порядка

$$v' = \Psi(\alpha, Z)v, \tag{7.1}$$

$$\begin{cases} \alpha' = -Z_3 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\delta(\alpha), \\ Z_3' = \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) f_1^2(\alpha) Z_2^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1) Z_1^2 - Z_3\Psi(\alpha, Z), \\ Z_2' = \left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_2 Z_3 - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2(\beta_1) Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z), \\ Z_1' = \left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_1 Z_3 - \left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1(\alpha) Z_1 Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z), \\ \beta_1' = Z_2 f_1(\alpha), \\ \beta_2' = -Z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1), \end{cases} \tag{7.2}$$

$$\Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\delta'(\alpha),$$

$Z = (Z_1, Z_2, Z_3)$, $z_k = Z_k v$, $k = 1, 2, 3$, $b \geqslant 0$, $\delta(\alpha)$, $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $g(\beta_1)$ — некоторые гладкие функции, как систему при отсутствии внешнего поля сил. При этом уравнение (7.1) отделяется, что дает возможность рассматривать уравнения (7.2) в качестве независимой системы (с тремя степенями свободы) на шестимерном многообразии

$$N^6\{Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\} = TM^3\{Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$$

— касательном расслоении гладкого трехмерного многообразия $M^3\{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$ (см. также [21]).

Рассмотрим структуру системы (7.2). Она для простоты соответствует следующим уравнениям геодезических линий на касательном расслоении $TM^3\{\dot\alpha, \dot\beta_1, \dot\beta_2; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ многообразия

$M^3\{\alpha,\beta_1,\beta_2\}$ (в частности, сферы или поверхностей вращения — с шестью или девятью ненулевыми коэффициентами связности):

$$\begin{cases} \ddot\alpha+\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2+\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2=0,\\ \ddot\beta_1+2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1+\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2=0,\\ \ddot\beta_2+2\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2+2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2=0. \end{cases} \tag{7.3}$$

Действительно, выбрав новые координаты Z_1, Z_2, Z_3 в касательном пространстве в виде

$$\dot\alpha=-Z_3,\quad \dot\beta_1=Z_2f_1(\alpha),\quad \dot\beta_2=Z_1f_2(\alpha)g(\beta_1), \tag{7.4}$$

мы получаем соотношения на них в виде (ср. с системой (7.2))

$$\begin{aligned} Z_1'&=\left[2\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]Z_1Z_3-\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]f_1(\alpha)Z_1Z_2,\\ Z_2'&=\left[2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]Z_2Z_3-\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g^2(\beta_1)Z_1^2,\\ Z_3'&=\Gamma^\alpha_{11}f_1^2(\alpha)Z_2^2+\Gamma^\alpha_{22}f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)Z_1^2; \end{aligned} \tag{7.5}$$

при этом уравнения (7.3) почти всюду эквивалентны совокупности (7.4), (7.5), которая, прежде всего, присутствует в системе (7.2).

Далее, в системе (7.2) также присутствуют коэффициенты при параметре $b\geqslant 0$. Но, как и в системе (1.11), они не нарушают консервативности, поскольку система (7.1), (7.2) обладает полным набором (пятью) гладких первых интегралов (тот факт, что полный набор состоит не из шести, а из пяти первых интегралов, объясним ниже).

Предложение 7.1. *Если всюду на своей области определения справедлива система равенств*

$$\begin{cases} 2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}+\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)f_1^2(\alpha)\equiv0,\\ 2\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}+\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\equiv0,\\ \left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]f_1^2(\alpha)+\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\equiv0, \end{cases} \tag{7.6}$$

то система (7.1), (7.2) *имеет аналитический первый интеграл вида*

$$\Phi_1(v;Z_3,Z_2,Z_1)=v^2(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2)=C_1^2=\mathrm{const}. \tag{7.7}$$

Можно доказать отдельную теорему существования решения $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $g(\beta_1)$ системы (7.6) для условий наличия аналитического первого интеграла (7.7) для системы (7.4), (7.5) уравнений геодезических (7.3). Но, как будет показано ниже, данные рассуждения справедливы или для систем при отсутствии силового поля, или для систем при наличии потенциального силового поля. Но для систем с диссипацией условия (7.6) приобретут несколько иной смысл.

Тем не менее, в дальнейшем будем предполагать в уравнениях (7.4) выполнение условий

$$f_1(\alpha)=f_2(\alpha)=f(\alpha); \tag{7.8}$$

при этом функция $g(\beta_1)$ должна удовлетворять преобразованному третьему равенству из (7.6):

$$2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}+\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1)\equiv0. \tag{7.9}$$

Таким образом, функцию $g(\beta_1)$ будем брать в зависимости от коэффициентов связности, а вот ограничения на функцию $f(\alpha)$ будут описаны ниже.

Предложение 7.2. *Если выполнены свойства* (7.8), (7.9) *и при этом справедливы равенства*

$$\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta)=\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha,\beta)=\Gamma_1(\alpha), \tag{7.10}$$

то система (7.1), (7.2) *имеет гладкий первый интеграл*

$$\Phi_2(v; Z_2, Z_1; \alpha) = v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\delta(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}; \tag{7.11}$$

при этом функция $\delta(\alpha)$ *должна удовлетворять равенству*

$$\delta(\alpha) = A_1 f(\alpha) \exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b)db\right\}, \quad A_1 = \mathrm{const}\,. \tag{7.12}$$

Предложение 7.3. *Если выполнено свойство* (7.8) *и условие*

$$\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) = \Gamma_2(\beta_1), \tag{7.13}$$

а также второе равенство из (7.10) ($\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) = \Gamma_1(\alpha)$) *и* (7.12), *то система* (7.1), (7.2) *имеет гладкий первый интеграл*

$$\begin{gathered} \Phi_3(v; Z_1; \alpha, \beta_1) = v^2 Z_1 \delta(\alpha)\Phi(\beta_1) = C_3 = \mathrm{const}, \\ \Phi(\beta_1) = g(\beta_1) \exp\left\{2\int\limits_{\beta_{01}}^{\beta_1} \Gamma_2(b)db\right\}. \end{gathered} \tag{7.14}$$

Предложение 7.4. *Пусть выполнено свойство* (7.8) *и*

$$\Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha, \beta) = \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha, \beta) g^2(\beta_1) = \Gamma_3(\alpha). \tag{7.15}$$

Тогда система (7.1), (7.2) *имеет гладкий первый интеграл*

$$\Phi_0(v; Z_3; \alpha) = v^2(1 - 2bZ_3\delta(\alpha)) = C_0 = \mathrm{const}, \tag{7.16}$$

если функция $\delta(\alpha)$ *удовлетворяет равенству*

$$\delta(\alpha) = A_2 \exp\left\{-\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_3(b)db\right\}, \quad A_2 = \mathrm{const}\,.$$

В частности, если выполнены свойства (7.6), (7.8), (7.10), (7.12), (7.15), то система (7.1), (7.2) имеет гладкий первый интеграл вида (7.16).

Предложение 7.5. *Если выполнены условия* (7.8)–(7.10), (7.12), *то система* (7.1), (7.2) *имеет первый интеграл*

$$\Phi_4(\beta_1, \beta_2, C_2, C_3) = \beta_2 + \int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1} \frac{C_3^2 g(b)}{C_2^2\Phi^2(b) - C_3^2}\, db = C_4 = \mathrm{const}; \tag{7.17}$$

после взятия интеграла (7.17) *вместо постоянных* C_2 *и* C_3 *можно подставить левые части равенств* (7.11) *и* (7.14) *соответственно.*

Прямым следствием предложений 7.1–7.5 является следующая теорема — основная теорема данного раздела.

Теорема 7.1. *Если выполнены условия* (7.6), (7.8)–(7.10), (7.12), (7.15), *то система* (7.1), (7.2) *обладает полным набором (пятью) гладких независимых первых интегралов вида* (7.7), (7.11), (7.14), (7.16), (7.17).

8. Введение внешнего силового поля и унимодулярные преобразования для систем седьмого порядка. Модифицируем систему (7.1), (7.2) при условиях (7.8)–(7.10), (7.13), (7.15) при наличии двух ключевых параметров $b, b_1 \geqslant 0$, введя внешнее силовое поле. Если ввести такое поле, добавив коэффициент $F(\alpha)$ лишь в уравнение на Z_3' системы (8.1), (8.2) и даже положив при этом $b_1 = 0$, то полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность появится при дополнительном условии $b = 0$. Расширим введение силового поля, положив $b_1 > 0$. Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения $T^*M^3\{Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ примет вид

$$v' = \Psi(\alpha, Z)v, \tag{8.1}$$

$$\begin{cases} \alpha' = -Z_3 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\tilde{f}(\alpha), \\ Z_3' = F(\alpha) + \Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) Z_2^2 + \Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) Z_1^2 - Z_3 \Psi(\alpha, Z), \\ Z_2' = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_2 Z_3 - \\ \qquad - \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) Z_1^2 - Z_2 \Psi(\alpha, Z), \\ Z_1' = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_1 Z_3 - \\ \qquad - \left[2\Gamma_2(\beta) + \dfrac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f(\alpha) Z_1 Z_2 - Z_1 \Psi(\alpha, Z), \\ \beta_1' = Z_2 f(\alpha), \\ \beta_2' = Z_1 f(\alpha) g(\beta_1), \end{cases} \tag{8.2}$$

$$\Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\delta'(\alpha) + b_1 F(\alpha)\delta(\alpha), \quad \tilde{f}(\alpha) = \frac{\mu - \delta^2(\alpha)}{\delta'(\alpha)},$$

$\mu = \mathrm{const}$. При этом коэффициенты консервативной составляющей силового поля содержат параметр b, а неконсервативной составляющей внешнего поля — параметр b_1.

Силовое поле в уравнениях на v', Z_1', Z_2', Z_3' определяется функцией $\Psi(\alpha, Z)$. Опишем введение силового поля в виде двумерного столбца, в первой строке которого стоят коэффициенты из функции $\Psi(\alpha, Z)$, а во второй строке — коэффициенты из уравнения на α'. Таким образом, совместное силовое поле (в котором присутствуют три параметра $b, b_1 \geqslant 0$, $\mu \in \mathbb{R}$) будут иметь вид

$$U \begin{pmatrix} b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \\ b_1 F(\alpha) \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} -\delta'(\alpha) & \delta(\alpha) \\ \delta(\alpha) & \tilde{f}(\alpha) \end{pmatrix},$$

где U — преобразование с определителем, равным $-\mu$, и являющееся унимодулярным преобразованием при $\mu = \pm 1$. Такое преобразование вносит в систему диссипацию (как одного знака, так и другого).

9. Интегрирование системы седьмого порядка с диссипацией. Перейдем теперь к интегрированию искомой системы седьмого порядка (8.1), (8.2) при выполнении свойства (7.9). Она также допускает отделение независимой подсистемы пятого порядка.

Введем также (по аналогии с (7.9)) ограничение и на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять преобразованному первому равенству из (7.6):

$$2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) \equiv 0. \tag{9.1}$$

Для полного интегрирования системы (8.2) необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$Z_1, Z_2 \to Z_0, Z_*, \quad Z_0 = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}, \quad Z_* = \frac{Z_2}{Z_1},$$

система (8.2) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \alpha' = -Z_3 + b(Z_3^2 + Z_0^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\tilde{f}(\alpha), \\ Z_3' = F(\alpha) + \Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) Z_0^2 - Z_3 \Psi(\alpha, Z), \\ Z_0' = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_0 Z_3 - Z_0 \Psi(\alpha, Z), \end{cases} \tag{9.2}$$

$$\begin{cases} Z_*' = \pm Z_0 \sqrt{1 + Z_*^2} f(\alpha) \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right], \\ \beta_1' = \pm \dfrac{Z_0 Z_*}{\sqrt{1 + Z_*^2}} f(\alpha), \end{cases} \tag{9.3}$$

$$\beta_2' = \pm \frac{Z_0}{\sqrt{1 + Z_*^2}} f(\alpha) g(\beta_1), \tag{9.4}$$

$$\Psi(\alpha, Z) = -b(Z_3^2 + Z_0^2)\delta'(\alpha) + b_1 F(\alpha)\delta(\alpha), \quad \tilde{f}(\alpha) = \frac{\mu - \delta^2(\alpha)}{\delta'(\alpha)}.$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (8.2) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (9.2), один — системы (9.3), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (9.4) (т.е. всего четыре).

Теорема 9.1. *Пусть для некоторых $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ выполняются равенства*

$$\Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\delta(\alpha)|, \quad F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{\delta^2(\alpha)}{2}. \tag{9.5}$$

Тогда система (8.1), (8.2) *при выполнении свойств* (7.9), (9.1) *обладает пятью независимыми* (*вообще говоря, трансцендентными; см. [12] в смысле комплексного анализа*) *первыми интегралами.*

Доказательство. Для начала поставим в соответствие рассматриваемой подсистеме третьего порядка неавтономную систему второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dZ_3}{d\alpha} = \dfrac{F(\alpha) + \Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) Z_0^2 + b Z_3 (Z_3^2 + Z_0^2)\delta'(\alpha) - b_1 Z_3 F(\alpha)\delta(\alpha)}{-Z_3 + b(Z_3^2 + Z_0^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\tilde{f}(\alpha)}, \\ \dfrac{dZ_0}{d\alpha} = \dfrac{\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_0 Z_3 + b Z_0 (Z_3^2 + Z_0^2)\delta'(\alpha) - b_1 Z_0 F(\alpha)\delta(\alpha)}{-Z_3 + b(Z_3^2 + Z_0^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\tilde{f}(\alpha)}. \end{cases} \tag{9.6}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$Z_0 = u_1 \delta(\alpha), \quad Z_3 = u_2 \delta(\alpha), \tag{9.7}$$

пользуясь (9.5), приводим систему (9.6) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \delta \frac{du_2}{d\delta} + u_2 &= \frac{\lambda + b u_2 (u_1^2 + u_2^2)\delta^2 - b_1 \lambda u_2 \delta^2 + \kappa u_1^2}{-u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\delta^2 + b_1 \lambda (\mu - \delta^2)}, \\ \delta \frac{du_1}{d\delta} + u_1 &= \frac{b u_1 (u_1^2 + u_2^2)\delta^2 - b_1 \lambda u_1 \delta^2 - \kappa u_1 u_2}{-u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\delta^2 + b_1 \lambda (\mu - \delta^2)}. \end{aligned} \tag{9.8}$$

В дальнейшем система (9.8) приводится к уравнению первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda - b_1 \lambda \mu u_2 + u_2^2 + \kappa u_1^2}{(1 - \kappa) u_1 u_2 - b_1 \lambda \mu u_1}. \tag{9.9}$$

Уравнение (9.9) имеет вид уравнения Абеля. В частности, при $\kappa = -1$ оно имеет первый интеграл

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 - b_1 \lambda \mu u_2 + \lambda}{u_1} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{9.10}$$

который в прежних переменных выглядит следующим образом:

$$\Theta_1(Z_3, Z_0; \alpha) = G_1\left(\frac{Z_3}{\delta(\alpha)}, \frac{Z_0}{\delta(\alpha)}\right) = \frac{Z_3^2 + Z_0^2 - b_1\lambda\mu Z_3\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)}{Z_0\delta(\alpha)} = C_1 = \mathrm{const}\,. \tag{9.11}$$

В общем случае вид первых интегралов довольно громоздок. В частности, один из первых интегралов при $\kappa = -1$ был только что приведен.

При помощи интеграла (9.11) получается и дополнительный первый интеграл для системы (8.2):

$$\Theta_2(Z_3, Z_0; \alpha) = G_2\left(\delta(\alpha), \frac{Z_3}{\delta(\alpha)}, \frac{Z_0}{\delta(\alpha)}\right) = C_2 = \mathrm{const}\,. \tag{9.12}$$

Выражение первого интеграла (9.12) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\delta(\alpha)$. Например, при $\kappa = -1$ этот первый интеграл найдется из уравнения Бернулли

$$\frac{d\delta}{du_2} = \frac{(b_1\lambda\mu - u_2)\delta + b\delta^3(U^2(C_1, u_2) + u_2^2) - b_1\lambda\delta^3}{\lambda - b_1\lambda\mu u_2 + u_2^2 - U^2(C_1, u_2)},$$

$$U(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(\lambda - b_1\lambda\mu u_2 + u_2^2)}\right\}, \quad u_2 = \frac{Z_3}{\delta(\alpha)}.$$

При этом после взятия этого интеграла вместо C_1 можно подставить левую часть равенства (9.11).

Первый интеграл для независимой (после замены независимого переменного) подсистемы (9.3) будет иметь вид

$$\Theta_3(Z_*; \beta_1) = \frac{\sqrt{1 + Z_*^2}}{\Phi(\beta_1)} = C_3 = \mathrm{const} \tag{9.13}$$

(о функции $\Phi(\beta_1)$ см. (7.14)). Дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (9.4), находится по аналогии с (7.17):

$$\Theta_4(\beta_1, \beta_2, C_3) = \beta_2 \pm \int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1} \frac{g(b)}{C_3^2\Phi^2(b) - 1}\, db = C_4 = \mathrm{const};$$

при этом после взятия этого интеграла вместо C_3 можно подставить левую часть равенства (9.13).

Кроме того, по аналогии с (7.16), у системы (8.1), (8.2) существует гладкий первый интеграл, «привязывающий» уравнение (8.1)), который, например, при $b = b_1$, $\mu = 1$ примет вид

$$\Theta_0(v; Z_3, Z_0; \alpha) = v^2\big(1 - 2bZ_3\delta(\alpha) + b^2(Z_3^2 + Z_0^2)\big) = C_0 = \mathrm{const}\,.$$

□

Справедлива и теорема, обратная к теореме 9.1.

Теорема 9.2. *Условия* (7.9), (9.1), (9.5) (*например, при* $\kappa = -1$) *являются необходимыми условиями существования первого интеграла* (9.11) *для системы* (8.1), (8.2).

10. Строение первых интегралов для систем седьмого порядка с диссипацией. Если α — периодическая координата периода 2π, то система (8.1), (8.2) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним. При $F(\alpha) \equiv 0$ она превращается в консервативную систему (7.1), (7.2). Последняя, в частности, обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (7.7), (7.11). Более того, если функция $F(\alpha)$ не равна тождественно нулю, но $b_1 = 0$, то система (8.1), (8.2) при втором условии из (9.5) обладает первым интегралом вида

$$\Theta_0(v; Z_3, Z_2, Z_1; \alpha) = v^2\big(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + \lambda\delta^2(\alpha)\big) = \mathrm{const}\,. \tag{10.1}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (10.1), (7.11) также является первым интегралом системы (8.1), (8.2) при не равенстве функции $F(\alpha)$ тождественно нулю, но $b_1 = 0$. Но при $b_1 > 0$ каждая из функций

$$\Theta_{b_1}(v; Z_3, Z_2, Z_1; \alpha) = v^2\big(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 - b_1\lambda\mu Z_3\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)\big) \tag{10.2}$$

и (7.11) по отдельности не является первым интегралом системы (8.1), (8.2). Однако отношение функций (10.2), (7.11) является первым интегралом (9.11) системы (8.1), (8.2) при любом $b_1 > 0$ (при $\kappa = -1$).

Вообще же, как и указывалось ранее, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств.

11. Заключение для систем седьмого порядка. Выделим существенный случай для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на трехмерной сфере, и функции $\delta(\alpha)$:

$$f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \delta(\alpha) = \sin\alpha. \tag{11.1}$$

В случае (11.1) получается класс систем (8.1), (8.2) при $\mu = 1$, соответствующих движению четырехмерного динамически симметричного твердого тела на нулевых уровнях циклических интегралов в неконсервативном поле сил (см. [16, 22, 23]). В частности, при $\delta(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ рассматриваемая система описывает геодезический поток на трехмерной сфере. В случае (11.1), если

$$\delta(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{\cos\alpha},$$

то система описывает движение четырехмерного твердого тела в силовом поле $F(\alpha)$ под действием следящей силы (см. [16]). В частности, если

$$F(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha, \quad \delta(\alpha) = \sin\alpha,$$

то система эквивалентна обобщенному (сферическому) четырехмерному маятнику, помещенному в некоторое неконсервативное поле, и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Справедливо также важное замечание, сделанное выше для систем меньшего порядка. Если функция $\delta(\alpha)$ не является периодической, то почти всегда рассматриваемая система является системой с переменной диссипацией с ненулевым средним (т.е. она является «собственно» диссипативной). Тем не менее, и в этом случае (благодаря теоремам 9.1 и 9.2) можно получить явный вид трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. — М.: Мир, 1972.
2. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971.
3. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — *38*, № 1. — С. 3–67.
4. *Козлов В. В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — *79*, № 3. — С. 307–316.
5. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. — М.-Л.: ОГИЗ, 1947.
6. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 4. — С. 3–229.
7. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// в кн.: Полн. собр. соч.. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
8. *Чаплыгин С. А.* Избранные труды. — М.: Наука, 1976.
9. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
10. *Шамолин М. В.* Существование и единственность траекторий, имеющих в качестве предельных множеств бесконечно удаленные точки, для динамических систем на плоскости// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1993. — № 1. — С. 68–71.
11. *Шамолин М. В.* Пространственные топографические системы Пуанкаре и системы сравнения// Усп. мат. наук. — 1997. — *52*, № 3. — С. 177–178.
12. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209–210.

13. *Шамолин М. В.* Новое семейство фазовых портретов в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 2000. — *371*, № 4. — С. 480–483.
14. *Шамолин М. В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. — М.: «Экзамен», 2007.
15. *Шамолин М. В.* Задача о движении тела в сопротивляющейся среде с учетом зависимости момента силы сопротивления от угловой скорости// Мат. модел. — 2012. — *24*, № 10. — С. 109–132.
16. *Шамолин М. В.* Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил// в кн.: Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Тематич. обзоры., 2013. — *125*. — С. 5–254.
17. *Шамолин М. В.* Моделирование движения твердого тела в сопротивляющейся среде и аналогии с вихревыми дорожками// Мат. модел. — 2015. — *27*, № 1. — С. 33–53.
18. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к сфере// Пробл. мат. анал. — 2016. — № 86. — С. 139–151.
19. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости систем с диссипацией на касательных расслоениях к двумерной и трехмерной сферам// Докл. РАН. — 2016. — *471*, № 5. — С. 547–551.
20. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *475*, № 5. — С. 519–523.
21. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *477*, № 2. — С. 168–172.
22. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией// Пробл. мат. анал. — 2018. — № 95. — С. 79–101.
23. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с диссипацией с двумя и тремя степеням свободы// Пробл. мат. анал. — 2018. — № 94. — С. 91–109.
24. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *482*, № 5. — С. 527–533.
25. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *479*, № 3. — С. 270–276.
26. *Шамолин М. В.* Случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Пробл. мат. анал. — 2018. — № 90. — С. 107–113.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: `shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru`