Н. Л. Поляков, М. В. Шамолин, Теоремы о редукции в теории коллективного выбора, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 174, 46–51

DOI: https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-174-46-51

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 174 (2020). С. 46–51
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-174-46-51

УДК 510.63

ТЕОРЕМЫ О РЕДУКЦИИ В ТЕОРИИ КОЛЛЕКТИВНОГО ВЫБОРА

© 2020 г. **Н. Л. ПОЛЯКОВ, М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. В работе получены комбинаторные теоремы, относящиеся к теории коллективного выбора. Эти теоремы описывают достаточно общие условия, при которых задача о сохранении произвольным правилом агрегирования f множества предпочтений $\mathcal{D}$ и задача о совместимости множества предпочтений $\mathcal{D}$ с парой $(f, \mathcal{C})$ могут быть сведены к аналогичным задачам для двух конкретных правил агрегирования: правила большинства maj и правила «считалочки» cog. Результаты получены в рамках *клонового подхода* к теории коллективного выбора, который был предложен С. Шелахом и разработан авторами.

***Ключевые слова*:** теория коллективного выбора, правило агрегирования, множество предпочтений.

REDUCTION THEOREMS IN THE SOCIAL CHOICE THEORY

© 2020 **N. L. POLYAKOV, M. V. SHAMOLIN**

Abstract. In the paper, combinatorial theorems relating to the theory of social choice are obtained. These theorems describe general conditions under which the problem on the preserving the preference set $\mathcal{D}$ by an arbitrary aggregation rule f and the problem on the compatibility of the preference set $\mathcal{D}$ with a pair $(f, \mathcal{C})$ can be reduced to similar problems for two specific aggregation rules: the majority rule maj and the "counting rhyme" rule cog. Results are obtained within the framework of *clone approach* in the theory of social choice proposed by S. Shelah and developed by the authors.

***Keywords and phrases*:** social choice theory, aggregation rule, preference set.

***AMS Subject Classification*:** 91B14

1. Основные определения. Рассмотрим стандартную модель коллективного выбора (см. [14, 15]). Даны конечные множества $N = \{1, 2, \dots, n\}$ (участников) и A (альтернатив). Во избежание рассмотрения тривиальных ситуаций будем считать, что $|A| \geqslant 3$ и $n \geqslant 2$. *Предпочтения* участников представляют собой, вообще говоря, произвольные рефлексивные бинарные отношения на множестве A. Множество всех возможных предпочтений обозначим символом $\mathcal{R}(A)$. Кортежи $\pi = (P_1, P_2, \dots, P_n) \in \mathcal{R}(A)$ называются *профилями.* Наиболее важные множества всех полных антисимметричных отношений $P \in \mathcal{R}(A)$ и всех полных антисимметричных и транзитивных отношений (линейных порядков) $P \in \mathcal{R}(A)$ обозначим, соответственно, через $\mathcal{C}(A)$ и $\mathcal{L}(A)$. Элементы множества $\mathcal{L}(A)$ будем для краткости записывать в виде последовательностей: запись $a_0 a_1 \dots a_m$ обозначает линейный порядок

$$\succeq = \{(a_i, a_j) : 0 \leqslant i \leqslant j \leqslant m\}.$$

Правилом агрегирования называется любая функция

$$f : (\mathcal{R}(A))^n \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}(A),$$

удовлетворяющая следующим условиям:

(IIA) *условие независимости от посторонних альтернатив*:

$$\big((x,y)\in P_1 \Leftrightarrow (x,y)\in P_1'\big)\ \&\ \ldots\ \&\ \big((x,y)\in P_n \Leftrightarrow (x,y)\in P_n'\big) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \big((x,y)\in f(\pi) \Leftrightarrow (x,y)\in f(\pi')\big)$$

для всех $\pi=(P_1,\ldots,P_n)$, $\pi'=(P_1',\ldots,P_n')\in(\mathcal{R}(A))^n$ и $x,y\in A$.

(U) *условие единогласия*:

$$(x,y)\in P_1\cap\ldots\cap P_n \quad \Rightarrow \quad (x,y)\in f(\pi)$$

для всех $\pi=(P_1,\ldots,P_n)\in(\mathcal{R}(A))^n$ и $x,y\in A$.

Правило агрегирования f называется *диктаторским* на множестве $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{R}(A)$, если существует номер $i\in N$, для которого

$$f(P_1,P_2,\ldots,P_n)=P_i$$

для всех $P_1,P_2,\ldots,P_n\in\mathcal{C}$.

Пусть $n=3$. *Правилом большинства* (majority rule) называется функция

$$\mathrm{maj}:(\mathcal{R}(A))^3\to\mathcal{R}(A),$$

которая определяется условием

$$(x,y)\in\mathrm{maj}(P_1,P_2,P_3) \quad \Leftrightarrow \quad \big|\{i\in\{1,2,3\}:(x,y)\in P_i\}\big|\geqslant 2$$

для всех различных $x,y\in A$.

Правилом «считалочки» (counting rhyme rule) назовем функцию

$$\mathrm{cog}:(\mathcal{R}(A))^3\to\mathcal{R}(A),$$

которая определяется равенствами

$$(x,y)\in\mathrm{cog}(P_1,P_2,P_3) \quad \Leftrightarrow \quad \big|\{i\in\{1,2,3\}:(x,y)\in P_i\}\big|=1 \pmod 2.$$

Легко убедиться, что правила maj и cog удовлетворяет условиям **(U)** и **(IIA)**.

Хорошо известно (см. [14, 15]), что каждое правило агрегирования, удовлетворяющее **(IIA)**, может быть определено с помощью *локальных решающих коалиций*. А именно, правило агрегирования

$$f:(\mathcal{R}(A))^n\to\mathcal{R}(A)$$

удовлетворяет **(IIA)** тогда и только тогда, когда для каждой пары $(x,y)\in A\times A$, $x\neq y$, существует такое множество $\mathfrak{C}^f_{x,y}\subseteq 2^N$, что

$$(x,y)\in f(\pi) \quad \Leftrightarrow \quad \{i\in N:(x,y)\in P_i\}\in\mathfrak{C}^f_{x,y}$$

для всех $\pi=(P_1,\ldots,P_n)\in(\mathcal{R}(A))^n$. Если правило f удовлетворяет **(IIA)**, то условие **(U)** равносильно условию $N\in\mathfrak{C}^f_{x,y}$ (для всех $x\neq y\in A$).

Пусть σ — перестановка множества A. Для каждого отношения $P\in\mathcal{R}(A)$ и множества $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{R}(A)$ положим

$$P_\sigma=\big\{(\sigma(a),\sigma(b)):(a,b)\in P\big\},\quad \mathcal{C}_\sigma=\big\{P_\sigma:P\in\mathcal{C}\big\}.$$

Множество $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{R}(A)$ назовем *симметричным*, если $\mathcal{C}_\sigma=\mathcal{C}$ для любой перестановки σ множества A. Например, множества $\mathcal{C}(A)$ и $\mathcal{L}(A)$ симметричны. Класс $\mathfrak{C}\subseteq 2^{\mathcal{R}(A)}$ назовем *симметричным*, если

$$\mathcal{C}\in\mathfrak{C} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C}_\sigma\in\mathfrak{C}$$

для любого множества $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{R}(A)$ и перестановки σ множества A.

Например, класс всех множеств *однопиковых* (single-peaked) предпочтений (см. [17]) симметричен. Изучение симметричных классов предпочтений естественно. Действительно, если некоторое множество предпочтений $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{R}(A)$ удовлетворяет какой-либо теоретико-множественной формуле φ, не содержащей констант из A, то этой же формуле удовлетворяет и любое множество $\mathcal{C}_\sigma$, поэтому класс всех множеств $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{R}(A)$, удовлетворяющих такой формуле φ, симметричен.

2. Инвариантные множества предпочтений. При рассмотрении некоторого правила агрегирования хочется надеяться, что его применение не выводит за рамки того или иного «естественного» множества предпочтений. Наиболее простое с математической точки зрения уточнение этого условия приводит к понятию *инвариантного множества.*

Определение 1. Правило агрегирования

$$f : (\mathcal{R}(A))^n \to \mathcal{R}(A)$$

сохраняет множество $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}(A)$ (а $\mathcal{D}$ есть *инвариантное множество* правила f), если

$$\pi \in \mathcal{D}^n \quad \Rightarrow \quad f(\pi) \in \mathcal{D}$$

для всех $\pi \in (\mathcal{R}(A))^n$. Класс всех инвариантных множеств правила f обозначается символом $\mathrm{Inv}(f)$.

Будем говорить, что правило агрегирования $f : (\mathcal{R}(A))^n \to \mathcal{R}(A)$ *сохраняет бинарный выбор* (или удовлетворяет условию **(PBC)**), если

$$\mathcal{C}(A) \in \mathrm{Inv}(f).$$

Можно заметить, что каждое **(IIA)**-правило агрегирования $f : (\mathcal{R}(A))^n \to \mathcal{R}(A)$ удовлетворяет условию **(PBC)** тогда и только тогда, когда для всех $X \subseteq N$ и различных $x, y \in A$

$$N \setminus X \in \mathfrak{C}^f_{x,y} \quad \Leftrightarrow \quad X \notin \mathfrak{C}^f_{y,x}.$$

Множество $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}(A)$ назовем *тривиальным*, если

$$\mathcal{D} = \{P \in \mathcal{C}(A) : Q \subseteq P\}$$

для некоторого бинарного отношения $Q \in \mathcal{R}(A)$. Например, любое одноэлементное множество $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}(A)$ и множество

$$\{abc, acb\} \in \mathcal{L}(\{a, b, c\})$$

тривиальны. Легко проверить, что тривиальное множество сохраняется каждым правилом агрегирования, удовлетворяющим условиям **(IIA)**, **(U)** и **(PBC)**. Класс $\mathfrak{D} \subseteq 2^{\mathcal{C}(A)}$ назовем *тривиальным*, если он состоит только из тривиальных множеств.

Теорема 1 (о редукции для инвариантных множеств предпочтений)**.** *Пусть* $|A| \geqslant 5$. *Пусть* $\mathbb{D} \subseteq 2^{\mathcal{C}(A)}$ — *нетривиальный симметричный класс множеств предпочтений и*

$$f : (\mathcal{R}(A))^n \to \mathcal{R}(A)$$

есть недиктаторское на множестве $\mathcal{C}(A)$ *правило агрегирования, удовлетворяющее условиям* ***(IIA)****,* ***(U)*** *и* ***(PBC)****. Пусть, наконец,* $\mathbb{D} \subseteq \mathrm{Inv}(f)$. *Тогда*

$$\mathbb{D} \subseteq \mathrm{Inv}(\mathrm{maj}) \quad \text{или} \quad \mathbb{D} \subseteq \mathrm{Inv}(\mathrm{cog}).$$

Эта теорема позволяет сводить изучение симметричных классов инвариантных множеств предпочтений произвольного правила агрегирования, удовлетворяющего условиям **(IIA)**, **(U)** и **(PBC)**, к изучению симметричных классов предпочтений правил maj и cog. В частности, хорошо известную теорему Эрроу о невозможности (при $n \geqslant 5$; (см. [14]) легко получить, положив $\mathbb{D} = \{\mathcal{L}(A)\}$. С другой стороны, теорему о редукции можно использовать для обобщения теорем о возможности типа [16]. Заметим, что инвариантные множества предпочтений правил maj и cog могут быть описаны явным, хотя и несколько утомительным образом.

3. Совместимые множества предпочтений. Понятие совместимых множеств предпочтений является естественным обобщением понятия инвариантных множеств.

Определение 2. Пусть f — n-арное правило агрегирования и $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{R}(A)$. Множество $\mathcal{D}$ называется *совместимым с парой* $(f, \mathcal{C})$, если $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ и

$$\pi \in \mathcal{D}^n \quad \Rightarrow \quad f(\pi) \in \mathcal{C}$$

для всех $\pi \in (\mathcal{R}(A))^n$. Класс всех множеств, совместимых с парой $(f, \mathcal{C})$ обозначается символом $\mathrm{Comp}(f, \mathcal{C})$.

По всей видимости, теория отношения совместимости множеств $\mathcal{D}$ и пар $(f,\mathcal{C})$ значительно сложнее теории отношения сохранения правилом f множества $\mathcal{D}$. Однако в некоторых случаях первую удается свести ко второй. Очевидно,

$$\mathcal{C} \in \mathrm{Inv}(f) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{C} \in \mathrm{Comp}(f,\mathcal{C}).$$

С другой стороны, для каждой тройки множеств $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}(A)$ имеем

$$\mathcal{D}' \in \mathrm{Inv}(f) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C} \in \mathrm{Comp}(f,\mathcal{D}).$$

Определение 3. Пусть даны правило агрегирования $f : (\mathcal{R}(A))^n \to \mathcal{R}(A)$ и множество $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}(A)$. Множество $\mathcal{C} \in \mathrm{Comp}(f,\mathcal{D})$ будем называть *нормальным*, если существует такое множество $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{R}(A)$, что

(i) $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$,

(ii) $\mathcal{D}' \in \mathrm{Inv}(f)$.

Нас будут интересовать условия, при которых каждое множество $\mathcal{D}$, совместимое с парой $(f,\mathcal{C})$ нормально. Мы сосредоточимся на случае $\mathcal{C} = \mathcal{L}(A)$, который являются классическим для теории коллективного выбора. Легко показать, что для произвольного правила f интересующее нас условие не выполнено. Действительно, пусть, например, $n = 3$, $A = \{a,b,c\}$, и правило агрегирования f задано следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}^f_{a,b} = \mathcal{C}^f_{b,a} &= \big\{\{1\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{1,2,3\}\big\},\\
\mathcal{C}^f_{b,c} = \mathcal{C}^f_{c,b} &= \big\{\{2\},\ \{2,1\},\ \{2,3\},\ \{1,2,3\}\big\},\\
\mathcal{C}^f_{a,c} = \mathcal{C}^f_{c,a} &= \big\{\{1,2\},\ \{2,3\},\ \{1,3\},\ \{1,2,3\}\big\}.
\end{aligned}$$

Пусть $\mathcal{C} = \{abc, cba\}$. Значение f на всех возможных профилях $\pi \in \mathcal{C}^3$ представлены в следующей таблице:

P_1	P_2	P_3	$f(P_1,P_2,P_3)$
abc	abc	abc	abc
abc	abc	cba	abc
abc	cba	abc	acb
abc	cba	cba	cab
cba	abc	abc	bac
cba	abc	cba	bca
cba	cba	abc	cba
cba	cba	cba	cba

Таким образом,

$$\big\{f(\pi) : \pi \in \mathcal{C}^3\big\} \subseteq \mathcal{L}(A);$$

значит,

$$\mathcal{C} \in \mathrm{Comp}(f,\mathcal{L}(A)).$$

С другой стороны, легко убедиться, что

$$f(bca, acb, acb) \notin \mathcal{L}(A).$$

Следовательно, $\mathcal{C}$ не включено ни в одно подмножество $\mathcal{L}(A)$, которое сохраняется правилом f. (Вместо непосредственного вычисления $f(bca, acb, acb)$ можно было бы воспользоваться теоремой Эрроу, если заметить, что $\big\{f(\pi) : \pi \in \mathcal{C}^3\big\} = \mathcal{L}(A)$.)

Оказывается, при некоторых достаточно общих предположениях можно сформулировать критерий нормальности произвольного множества, совместимого с парой $(f,\mathcal{L}(A))$.

Будем говорить, что правило агрегирования $f : (\mathcal{R}(A))^n \to \mathcal{R}(A)$ удовлетворяет условию *бинарной нейтральности* $(\mathbf{N}^0)$, если для любых различных $x,y \in A$ и профилей

$$\pi = (P_1,P_2,\ldots,P_n),\ \pi' = (P'_1,P'_2,\ldots,P'_n) \in (\mathcal{R}(A))^n$$

выполнено условие

$$\{i : (x,y) \in P_i\} = \{i : (y,x) \in P'_i\} \quad \Rightarrow \quad \big((x,y) \in f(\pi) \Leftrightarrow (y,x) \in f(\pi')\big).$$

Можно заметить, что каждое **(IIA)**-правило агрегирования $f : (\mathcal{R}(A))^n \to \mathcal{R}(A)$ удовлетворяет условию $(\mathbf{N}^0)$ тогда и только тогда, когда для всех различных $x, y \in A$

$$\mathfrak{C}^f_{x,y} = \mathfrak{C}^f_{y,x}.$$

Теорема 2. *Пусть* $f : (\mathcal{P}(A))^n \to \mathcal{P}(A)$ *есть правило агрегирования, удовлетворяющее условиям* **(IIA)**, **(U)**, **(PBC)** *и* $(\mathbf{N}^0)$. *Тогда следующие условия равносильны*:

(i) *каждое множество* $\mathcal{C}$, *совместимое с парой* $(f, \mathcal{L}(A))$, *нормально*;

(ii) *для любых попарно различных* $x, y, z \in A$

$$\mathfrak{C}^f_{x,y} \cap \mathfrak{C}^f_{y,z} \subseteq \mathfrak{C}^f_{x,z} \quad \Rightarrow \quad \left(\mathfrak{C}^f_{x,y} = \mathfrak{C}^f_{x,z} \vee \mathfrak{C}^f_{y,z} = \mathfrak{C}^f_{x,z}\right).$$

Теорема 3 (о редукции для совместимых множеств)**.** *Пусть* $|A| \geqslant 5$. *Пусть* $\mathbb{C} \subseteq 2^{\mathcal{L}(A)}$ *— нетривиальный симметричный класс множеств предпочтений и* $f : (\mathcal{R}(A))^n \to \mathcal{R}(A)$ *— недиктаторское на* $\mathcal{L}(A)$ *правило агрегирования, удовлетворяющее условиям* **(IIA)**, **(U)**, **(PBC)** *и* $(\mathbf{N}^0)$. *Пусть, наконец,* $\mathbb{C} \subseteq \mathrm{Comp}(f, \mathcal{L}(A))$. *Тогда существует симметричный класс* $\mathbb{D} \subseteq 2^{\mathcal{L}(A)}$, *для которого*

(1) $\mathbb{D} \subseteq \mathrm{Inv}(\mathrm{maj}) \cap \mathrm{Inv}(f)$ *или* $\mathbb{D} \subseteq \mathrm{Inv}(\mathrm{cog}) \cap \mathrm{Inv}(f)$;

(2) *для каждого* $\mathcal{C} \in \mathbb{C}$ *существует* $\mathcal{D} \in \mathbb{D}$, *для которого* $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$

и, значит, каждое множество $\mathcal{C} \in \mathbb{C}$ *нормально.*

Хорошо известно, что множества линейных порядков, совместимые с парой $(\mathrm{maj}, \mathcal{L}(A))$, — это в точности множества, удовлетворяющие критерию Сена (см. [20]). Теорема о редукции для совместимых множеств может быть использована для получения различных обобщений теоремы Сена о возможности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боднарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А.* Теория Галуа для алгебр Поста, I// Кибернетика. — 1969. — *3*. — С. 1–10.
2. *Боднарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А.* Теория Галуа для алгебр Поста, II// Кибернетика. — 1969. — *5*. — С. 1–9.
3. *Кон П.* Универсальная алгебра. — М.: Мир, 1968.
4. *Курош А. Г.* Лекции по общей алгебре. — СПб.: Лань, 2005.
5. *Мальцев А. И.* Итеративные алгебры и многообразия Поста// Алгебра и логика. — 1966. — *5*, № 2. — С. 5–24.
6. *Марченков С. С.* Замкнутые классы булевых функций. — М.: Физматлит, 2000.
7. *Марченков С. С.* Клоновая классификация дуально дискриминаторных алгебр с конечным носителем// Мат. заметки. — 1997. — *61*, № 3. — С. 359–366.
8. *Марченков С. С.* Функциональные системы с операцией суперпозиции. — М.: Физматлит, 2004.
9. *Нгуен Ван Хоа* О семействах замкнутых классов k-значной логики, сохраняемых всеми автоморфизмами// Дискр. мат. — 1993. — *5*, № 4. — С. 87–108.
10. *Парватов Н. Г.* Соответствие Галуа для замкнутых классов дискретных функций// Прикл. дискр. мат. — 2010. — *2 (8)*. — С. 10–15.
11. *Поляков Н. Л., Шамолин М. В.* О замкнутых симметричных классах функций, сохраняющих любой одноместный предикат// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — № (6) 107. — С. 61–73.
12. *Поляков Н. Л., Шамолин М. В.* Об одном обобщении теоремы Эрроу impossibility theorem// Докл. РАН. — 2014. — *456*, № 2. — С. 143–145.
13. *Яблонский С. В.* Функциональные построения в k-значной логике// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1958. — *51*. — С. 5–142.
14. *Arrow K.* Social Choice and Individual Values. — Yale University Press, 1963.
15. *Aleskerov F. T.* Arrovian Aggregation Models. — Springer US, 1999.
16. *Kaneko M.* Necessary and Suffient Condition for Transitivity in Voting Theory// J. Econ. Theory. — 1975. — *11*. — P. 385–393.
17. *Moulin H.* Axioms of Cooperative Decision Making. — Cambridge Univ. Press, 1991.

18. *Polyakov N. L.* Functional Galois connections and a classification of symmetric conservative clones with a finite carrier/ `arXiv: 1810.02945 [math.LO]`.
19. *Post E. L.* Two-valued iterative systems of mathematical logic. — Princeton Univ. Press, 1941.
20. *Sen A. K.* A possibility theorem on majority decisions// Econometrica. — 1966. — *3*, № 4. — P. 491–499.
21. *Shelah S.* On the Arrow property// Adv. Appl. Math. — 2005. — *34*. — P. 217–251.
22. *Shelah S.* What majority decisions are possible// Discr. Math. — 2009. — *309*. — P. 2349–2364.
23. *Rosenberg I. G.* La structure des fonctions de plusieurs variables sur un ensemble fini// C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A. B. — 1965. — *260*. — P. 3817–3819.
24. *Rubinstein A., Fishburn P.* Algebraic aggregation theory// J. Econ. Theory. — 1986. — *38*.

Поляков Николай Львович
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва
E-mail: gelvella@mail.ru

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru