Д. В. Георгиевский, М. В. Шамолин, Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 174, 3–11

DOI: https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-174-3-11

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 174 (2020). С. 3–11
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-174-3-11

УДК 517, 531.01

ЗАСЕДАНИЯ СЕМИНАРА МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ ИМ. М. В. ЛОМОНОСОВА «АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ГЕОМЕТРИИ И МЕХАНИКИ» ИМ. ПРОФ. В. В. ТРОФИМОВА ПОД РУКОВОДСТВОМ С. А. АГАФОНОВА, Д. В. ГЕОРГИЕВСКОГО И М. В. ШАМОЛИНА

© 2020 г. **Д. В. ГЕОРГИЕВСКИЙ, М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. Приведена краткая информация о заседаниях семинара в 2017 г.

Ключевые слова: динамическая система, неконсервативное поле сил, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

SESSIONS OF THE WORKSHOP OF THE MATHEMATICS AND MECHANICS DEPARTMENT OF THE LOMONOSOV MOSCOW STATE UNIVERSITY, "URGENT PROBLEMS OF GEOMETRY AND MECHANICS" NAMED AFTER V. V. TROFIMOV

© 2020 **D. V. GEORGIEVSKY, M. V. SHAMOLIN**

Abstract. Brief information on sessions of the workshop in 2017 is presented.

Keywords and phrases: dynamical system, nonconservative force field, integrability, transcendental first integral.

AMS Subject Classification: 58-xx, 70-xx

Заседание 368, юбилейное, посвященное 50-летию профессора М. В. Шамолина (10 февраля 2017 г.).

М. В. Шамолин.

Интегрируемые системы с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия.

Как известно, понятие интегрируемости, вообще говоря, достаточно расплывчатое. При его построении необходимо учитывать, в каком смысле оно понимается, в классе каких функций ищутся первые интегралы и т. д. В данной работе принимается такой подход, который учитывает в качестве класса функций как первых интегралов трансцендентные функции, причем элементарные. Здесь трансцендентность понимается не в смысле теории элементарных функций (например, тригонометрических), а в смысле наличия у них существенно особых точек (в силу классификации, принятой в теории функций комплексного переменного, когда функция имеет существенно особые точки).

Ранее уже была показана полная интегрируемость уравнений пространственного движения тела в сопротивляющейся среде, когда у системы динамических уравнений существует полный набор трансцендентных первых интегралов. Далее, была исследована динамическая часть уравнений движения различных динамически симметричных четырехмерных твердых тел. При этом рассматриваемые системы в некоторых случаях сводились к системе с диссипацией на касательном расслоении двумерной сферы.

В данной работе сначала рассматриваются уравнения геодезических на касательном расслоении гладкого двумерного многообразия (система в отсутствие внешнего поля сил). Строится переход к удобным координатам касательного пространства. В дальнейшем сначала вводятся внешние силовые поля, которые являются потенциальными, и рассматриваемые системы четвертого порядка обладают полным набором (тремя) гладких первых интегралов. Затем в таких системах вводятся дополнительные члены, в результате чего системы перестают быть консервативными, а точнее, становятся системами с так называемой знакопеременной диссипацией. При этом при некоторых условиях они обладают полным набором (негладких) трансцендентных первых интегралов, в ряде случаев выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Заседание 369. Выездное заседание в МГТУ имени Н. Э. Баумана, посвященное 80-летию профессора В. И. Ванько (17 февраля 2017 г.).

Заседание 370 (10 марта 2017 г.)

Д. А. Брюхов.

Отображения, связанные с классическими конформными отображениями второго рода в $\mathbb{R}^3$, и задачи о стационарных меридиональных полях скорости в неоднородных средах.

Earlier, the author demonstrated some properties of axially symmetric generalizations of conformal mappings of the second kind within the framework of Fueter construction in $\mathbb{R}^3$. Corresponding models of stationary meridional velocity fields in axially symmetric inhomogeneous media were characterized in terms of gradient dynamical systems. New quadratic and cubic gradient dynamical systems with variable dissipation were described.

However, geometric properties of singular sets of axially symmetric generalizations of conformal mappings of the second kind have been insufficiently studied. Hypothesis about properties of the Jacobian matrix in the framework of Fueter's construction, formulated by the author during ICNAAM 2014, was proved by the author jointly with U. Kähler (Aveiro, Portugal) in 2015. In particular, problems of singular sets of an axially symmetric generalization of Joukowski transformation in $\mathbb{R}^3$ are discussed now.

Заседание 371 (17 марта 2017 г.)

И. Л. Покровский.

О краевых задачах с нелокальными граничными условиями.

Заседание 372 (24 марта 2017 г.)

Р. Р. Шабайкин.

Динамическое сдавливание цилиндрического идеального жесткопластического слоя соосными цилиндрами..

В работе рассмотрено течение тонкого идеально пластичного слоя конечной длины между сближающимися цилиндрами, где внешний цилиндр неподвижен, а внутренний расширяется с постоянной скоростью. Решение проводится методом асимптотического интегрирования, в ходе которого возникает два безразмерных параметра. Один из них, $1/\mathrm{Eu}$, связан с динамическими слагаемыми и равен обратному числу Эйлера. В задаче он принимается малым и не меняется со временем. Другой, a, — естественный малый геометрический параметр, равный отношению толщины слоя к половине его длины, который явно зависит от времени и убывает к нулю, что позволяет рассматривать параметр $1/\mathrm{Eu}$ как величину порядка a^b.

Для трех различных конфигураций цилиндров (радиусы цилиндров порядка длины образующей, порядка толщины слоя, промежуточного порядка) рассмотрены два режима сдавливания (случаи $b = 2$ и $b = 1$) и найдены главные члены асимптотик. Показано изменение эпюры давления с линейной на параболическую, что говорит об увеличении суммарной силы, действующей на поверхность.

Поскольку параметр $1/\mathrm{Eu}$ является константой, то с уменьшением параметра a степень b должна убывать к нулю. Таким образом, независимо от скорости сдавливания, существует момент времени (в случае $b = 2$), после которого динамические эффекты проявляются в главных членах разложения, и дальнейшее использование квазистатического приближения становится некорректным.

Заседание 373 (21 апреля 2017 г.)

С. В. Богомолов.

Микро- и макромодели газа из твердых сфер.

Поведение газа из твердых сфер формализуется с помощью стохастической микроскопической модели в фазовом пространстве. Плотность вероятности полученного скачкообразного случайного процесса удовлетворяет уточненному уравнению Больцмана. При умеренных числах Кнудсена проводится переход к модели, диффузионной в пространстве скоростей, выводятся макроскопические уравнения газовой динамики, отличные от системы уравнений Навье—Стокса или систем квазигазодинамики. Главной особенностью этого вывода является более точное осреднение по скорости благодаря аналитическому решению стохастических дифференциальных уравнений по винеровской мере, в виде которых представлена наша переходная мезо-модель. На примере задачи о структуре фронта ударной волны показано, что такой подход приводит к более сильному, чем навье-стоксовское, размытию фронта, что соответствует реальности. Численное решение проводится с помощью хорошо подходящего для суперкомпьютерных применений специального «разрывного» метода частиц.

Заседание 374 (28 апреля 2017 г.)

Д. В. Георгиевский.

Определяющие соотношения многомерной упругости и их сужения на подпространства меньшей размерности.

Обсуждаются механический смысл и связь материальных констант в n-мерной изотропной упругой среде. Производятся сужения определяющих соотношений (закона Гука) на подпространства меньшей размерности, вызванные условиями того, что в среде реализуется m-мерное деформированное либо m-мерное напряженное состояния ($1 \leqslant m < n$). Терминология, как и в целом идея математического построения, выбраны по аналогии со случаем $n = 3$, $m = 2$, хорошо известным в классической плоской задаче теории упругости. Выражены друг через друга пятерки упругих постоянных одной и той же среды, входящие в n-мерные соотношения и в соотношения, записанные для любого m-мерного сужения. Эти выражения по известным постоянным, например, трехмерной среды, т.е. классическим упругим постоянным, позволяют судить о материальных свойствах этой же среды, погруженной в пространство большего числа измерений.

Заседание 375 (26 мая 2017 г.)

М. С. Максютов.

Об одной постановке и решении осесимметричной задачи о напряженно-деформированном состоянии тора.

В рамках моментной теории тонких оболочек ставится осесимметричная краевая задача относительно напряженно-деформированного состояния тора, нагруженного равномерным внутренним давлением. Краевая задача описывается линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка. Задача решается методом конечных разностей и методом ортогональной прогонки. Полученные решения сравниваются с решением Феппля, построенным на основе безмоментной теории.

Заседание 376 в рамках пятого совместного научного семинара механико-математического факультета МГУ и Киевского политехнического института (9 июня 2017 г.).

1. *А. Т. Фоменко, К. И. Солодских.*

Трехмерные многообразия постоянной энергии и инварианты интегрируемых динамических систем.

2. *В. Д. Романенко, Ю. Л. Милявский.*

Автоматизация управления импульсными процессами в когнитивных картах с разнотемповой дискретизацией координат вершин.

3. *Г. М. Кобельков, А. Г. Соколов.*

О разностных схемах для уравнений газовой динамики.

4. *И. А. Пышнограев.*

Распределенное оптимальное управление для параболо-гиперболического уравнения с нелокальными граничными условиями и квадратичным критерием качества.

5. *А. В. Аксенов.*

Фундаментальное решение уравнений в перемещениях в трансверсально-изотропной теории упругости.

6. *М. З. Згуровский, П. О. Касьянов, Н. В. Горбань, Л. С. Палийчук.*

Асимптотическое поведение решений климатологической модели энергетического баланса.

Заседание 377 (23 июня 2017 г.)
В. Г. Байдулов.

О движении источника волн в непрерывно стратифицированной жидкости.

Заседание 378 (30 июня 2017 г.)
В. В. Власов, Р. Перез Отрис, А. В. Давыдов.

Спектральный анализ интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в задачах наследственной механики и теплофизики.

Заседание 379 (15 сентября 2017 г.)
М. В. Шамолин.

Интегрируемые системы с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия.

В задачах динамики систем с тремя степенями свободы пространствами положений являются трехмерные многообразия. Фазовыми пространствами таких систем естественным образом становятся касательные расслоения к данным многообразиям. Так, например, изучение четырехмерного твердого тела (обобщенного сферического маятника) в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе на касательном расслоении к трехмерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий. В данном случае динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают переменной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Известен также класс задач о движении точки по трехмерной поверхности, при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой объемлющего четырехмерного пространства. В ряде случаев в системах с переменной диссипацией также удается найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных функций. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

В работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательных расслоениях к трехмерным многообразиям. При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные.

Например, рассмотрим следующую динамическую систему с диссипацией на касательном расслоении $T_*M^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ трехмерного многообразия со связностью. Наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует гладкий коэффициент $b\delta(\alpha)$, $b \neq 0$, в первом уравнении системы

$$\begin{cases} \dot\alpha = -z_3 + b\delta(\alpha), \\ \dot z_3 = F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) z_2^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) g^2(\beta_1) z_1^2, \\ \dot z_2 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_3 - \Gamma^1_{22}(\beta_1) f(\alpha) g^2(\beta_1) z_1^2, \\ \dot z_1 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_3 - \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f(\alpha) z_1 z_2, \\ \dot\beta_1 = z_2 f(\alpha), \\ \dot\beta_2 = z_1 f(\alpha) g(\beta_1), \end{cases} \tag{1}$$

которая почти всюду эквивалентна

$$\begin{cases} \ddot\alpha - b\dot\alpha\delta'(\alpha) + F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 = 0, \\ \ddot\beta_1 - b\dot\beta_1\delta(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\beta_1)\dot\beta_2^2 = 0, \\ \ddot\beta_2 - b\dot\beta_2\delta(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_2 = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $F(\alpha)$ — функция, характеризующая потенциальное силовое поле, всевозможные функции Γ — коэффициенты связности, а величины $f(\alpha)$, $g(\alpha)$ — гладкие функции на своей области определения.

Перейдем к интегрированию системы шестого порядка (1) при условии

$$2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1} + \Gamma^1_{22}(\beta_1) g^2(\beta_1) \equiv 0, \tag{3}$$

а также при выполнении равенств

$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) = \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) g^2(\beta_1) = \Gamma_3(\alpha). \tag{4}$$

Введем также ограничение и на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению

$$2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) \equiv 0. \tag{5}$$

Для полного интегрирования системы (1) необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов. Однако после замены переменных $(z_1, z_2) \to (z, z_*)$, $z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$, $z_* = \frac{z_2}{z_1}$, система (1) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot\alpha = -z_3 + b\delta(\alpha), \\ \dot z_3 = F(\alpha) + \Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) z^2, \\ \dot z = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z z_3, \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \dot z_* = \pm z\sqrt{1+z_*^2} f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right], \\ \dot\beta_1 = \pm \dfrac{z z_*}{\sqrt{1+z_*^2}} f(\alpha), \end{cases} \tag{7}$$

$$\dot\beta_2 = \pm\frac{z}{\sqrt{1+z_*^2}} f(\alpha) g(\beta_1). \tag{8}$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (6)–(8) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (6), один первый интеграл системы (7) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (8) (т.е. всего четыре первых интеграла).

Теорема. *Пусть для некоторых $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ выполняются равенства*

$$\Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln|\delta(\alpha)|, \quad F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{\delta^2(\alpha)}{2}.$$

Тогда система (1) *при выполнении равенств* (3)–(5) *обладает полным набором (четырьмя) независимых, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.*

Заседание 380 (22 сентября 2017 г.)

И. Л. Покровский.

О задаче на собственные значения с нелокальным граничным условием.

Заседание 381, выездное, посвященное 70-летию профессора С. А. Агафонова (6 октября 2017 г.).

Заседание 382 (13 октября 2017 г.)

В. И. Горбачев.

Об осреднении дифференциальных уравнений математической физики с переменными коэффициентами.

Заседание 383 (27 октября 2017 г.)

Г. С. Тлюстангелов.

Устойчивость радиально-вращательного растекания—стока цилиндрического слоя.

В работе исследуется эволюция во времени картины малых возмущений кинематических и силовых величин, налагаемых на радиальное растекание либо сток кольцевых структур, заполненных средой, определяющие соотношения которой соответствуют либо ньютоновской вязкой жидкости, либо идеально жесткопластическому телу, подчиняющегося критерию пластичности Мизеса—Генки. На основе метода интегральных соотношений, примененного к линеаризованной задаче в возмущениях, выводятся достаточные оценки экспоненциальной устойчивости основного движения. Задача исследуется как в плоском случае, так и в случае трехмерной картины возмущений, налагаемых на радиально-вращательное растекание либо сток цилиндрического слоя. Также в работе рассматривается задача развития малых возмущений в системе, состоящей из двух тяжелых несжимаемых невязких сред с разными плотностями. Получено, что гравитационная устойчивость зависит от условий на границах слоев — наличия свободной поверхности либо непротекания сквозь прямолинейную границу.

Заседание 384 (10 ноября 2017 г.)

Д. В. Георгиевский.

Устойчивость нестационарного сдвига среды Бингама в плоском слое.

Рассматривается плоскопараллельное нестационарное сдвиговое течение двухконстантной вязкопластической среды Бингама в бесконечном по простиранию слое. Полагается, что продольная скорость течения как функция одной пространственной координаты и времени известна из решения классической одномерной нестационарной задачи. Учитывается изменение со временем толщин возможных жестких зон, границы которых параллельны границам слоя. На основное течение налагается картина двумерных в плоскости слоя возмущений. Задача в терминах возмущений сводится к одному линеаризованному уравнению относительно амплитуды функции тока с соответствующим набором четырех граничных условий; при этом исследуются несколько вариантов таких четверок.

С помощью метода интегральных соотношений задача сводится к проблеме минимизации отношений квадратичных функционалов, зависящих от времени, в пространстве $H_2(a;b)$, где a и b — функции времени, определяемые движением жестких зон в основном течении. Для различных вариантов задания граничных условий доказываются обобщенные неравенства Фридрихса и выводятся достаточные интегральные оценки устойчивости, в которых участвуют числа Рейнольдса, Сен-Венана, а также максимальная по толщине скорость сдвига в основном движении. Обсуждается зависимость полученных оценок от вязких и пластических свойств среды.

Заседание 385 (17 ноября 2017 г.)

В. Г. Путкарадзе .

Закон Дарси, поромеханика и неголономные связи.

Обсуждается взаимодействие движения механического тела с вязкой жидкостью. В неподвижной пористой среде закон движения жидкости описывается законом Дарси. На простых механических примерах в докладе показано, как наивное применение закона Дарси к движущейся жидкости приводит к парадоксам, например, неубыванию энергии. В приведенных примерах выводится аналог закона Дарси как предел динамики полной механической системы, полученной при помощи вариационного принципа, и связывается с работами советской математической школы 1980–90-х гг. по реализации неголономных связей. Приведена также критика уравнений Био (M. Biot), составляющих основу изучения инерциального движения пористой среды с жидкостью в западной литературе, а также обзор недавно разработанных вариационных методов для пористой среды. При помощи вариационного принципа выведены уравнения пористой среды и проанализировано распространение нелинейных одномерных возмущений.

Работа выполнена совместно с А. Ибрагимовым (Техасский технологический университет) и Д. Зенковым (Университет Северной Каролины).

Заседание 386 (24 ноября 2017 г.)

А. В. Конюхов.

Геометрически точная теория контактного взаимодействия как фундаментальная основа вычислительной контактной механики.

Основная тактика изогеометрического анализа — это прямое вложение моделей механики при полном описании геометрического объекта с целью формулировки эффективной вычислительной стратегии. Такие преимущества изогеометрического анализа как полное описание геометрии объекта при формулировании алгоритмов вычислительной контактной механики могут быть полностью выражены, только если кинематика контактного взаимодействия полностью описана для всех геометрически возможных контактных пар. Контакт тел с геометрической точки зрения может быть рассмотрен как взаимодействие деформируемых поверхностей произвольной геометрии и гладкости. При этом различные условия гладкости поверхности приводят к рассмотрению взаимного контакта между гранями, ребрами и вершинами поверхности. Следовательно, все контактные пары могут быть иерархически классифицированы следующим образом: поверхность в поверхность, кривая в поверхность, точка в поверхность, кривая в кривую, точка в кривую, точка в точку. Кратчайшее расстояние между этими объектами является естественной мерой контакта и приводит к задаче о проекции ближайшей точки (ПБТ; англ. closest point projection, CPP).

Первой основной задачей при построении геометрически точной теории контактного взаимодействия является рассмотрение условий существования и единственности решения задачи ПБТ. Это приводит к ряду теорем, которые позволяют построить как трехмерные геометрические области существования и единственности проекции для каждого объекта (поверхность, кривая, точка) в соответствующей контактной паре, так и механизм перехода между контактными парами. Эти области строятся при рассмотрении дифференциальной геометрии объекта, в метрике криволинейной системы координат ему соответствующей: в гауссовой системе координат для поверхности, в системе координат Френе—Серре для кривых, в системе координат Дарбу для кривых на поверхности и в координатах Эйлера или кватернионных параметрах для описания конечных поворотов вокруг объекта-точки.

Второй основной задачей является рассмотрение кинематики контактного взаимодействия с точки зрения наблюдателя в соответствующей системе координат. Это позволяет определить не только стандартную меру нормального контакта как «проникновение», но и геометрически точные меры относительного контактного взаимодействия: касательного скольжения по поверхности, скольжения по отдельно взятым кривым, относительного поворота кривой (кручения), скольжения кривой по собственной касательной и по касательной нормали («протаскивание») при движении кривой по поверхности. На данном этапе с помощью аппарата ковариантного дифференцирования в соответствующей криволинейной системе координат осуществляется подготовка к вариационной формулировке задачи, а также к линеаризации, необходимой для последующего глобального численного решения, например, для итерационного метода Ньютона. Линеаризация при этом понимается как дифференцирование Гато в ковариантной форме в криволинейной системе координат.

В ряде сложных случаев, исходящих из множества решений задачи ПБТ, как например, в случае «параллельных кривых», необходимо построение дополнительных механических моделей (3D континуальная модель криволинейного каната “Solid beam finite element”), совместимых с соответствующим контактным алгоритмом “Curve-to-solid beam contact algorithm.”

Важным этапом для описания контактного взаимодействия является формулировка в ковариантной форме наиболее общего произвольного закона взаимодействия между геометрическими объектами, выходящими далеко за рамки стандартного закона трения Кулона. При этом используется фундаментальный физический принцип «максимума диссипации», являющийся следствием второго закона термодинамики. Это требует формулировки задачи оптимизации с ограничением в виде неравенств в ковариантной форме. При этом все необходимые операции для выбранного метода численного решения оптимизационной задачи, включая, например, “return-mapping algorithm” и необходимые производные, формулируются также в криволинейной системе координат. Здесь показательным результатом геометрически точной теории является как возможность получать новые аналитические решения в замкнутой форме (обобщение задачи Эйлера о трении каната по цилиндру на случай анизотропного трения по поверхности произвольной геометрии; см. [3], так и возможность получать в компактной форме обобщения закона трения Кулона, учитывающего анизотропную геометрическую структуру поверхности совместно с анизотропным микротрением.

Выбор методов решения задачи статики или динамики при условии удовлетворения законов контактного взаимодействия остается обширным. Это различные модификации итерационного метода Ньютона для глобальной задачи и методы удовлетворения ограничений на локальном и глобальном уровнях: штрафа, Лагранжа, Нитше, Мортар, а также произвольный выбор конечно-разностной схемы для динамической задачи. Основным принципом является только формулировка метода в ковариантной форме без рассмотрения каких либо аппроксимаций.

Тщательное прохождение всех этапов построения теории позволяет получить вычислительный алгоритм в ковариантной «замкнутой» форме для всех типов контактных пар, включающих произвольно выбранный закон контактного взаимодействия. Выбор типа аппроксимаций осуществляется только на окончательном этапе решения. При этом выбор окончательной реализации вычислительного алгоритма остается очень обширным: стандартный метод конечных элементов, конечные элементы высокого порядка, изогеометрический анализ, метод конечных клеток, «погруженные» методы и др.

Наиболее обсуждаемым в вычислительной механике на данный период является метод изогеометрического анализа, целью которого является замена последовательности этапов, сложившихся в инженерной практике: (a) геометрическое моделирование CAD (Creo, ProE, CATIA); (b) исправление геометрии и построение сетки конечных элементов; (c) конечно-элементный анализ (ANSYS, ABAQUS, RADIOSS, LS-DYNA), — единой стратегией, включающей три этапа одновременно. Геометрически точная теория контактного взаимодействия является фундаментальной основой, позволяющей достичь целей изогеометрического анализа, не реализованного в настоящее время ни в одном известном инженерном пакете.

Библиография

1. *Konyukhov A., Schweizerhof K.* Computational Contact Mechanics: Geometrically Exact Theory for Arbitrary Shaped Bodies. — Heidelberg–New York–Dordrecht–London: Springer, 2013.
2. *Konyukhov A., Izi R.* Introduction to Computational Contact Mechanics: A Geometrical Approach. — Chichester: Wiley, 2015.
3. *Konyukhov A.* Contact of ropes and orthotropic rough surfaces// J. Appl. Math. Mech. — 2015. — *95*, № 4. — P. 406–423.

Заседание 387 (8 декабря 2017 г.)
А. А. Бобылев .
Вариационные формулировки контактных задач теории упругости с односторонними связями и методы их аппроксимации..

Заседание 388 (15 декабря 2017 г.)
Л. А. Кабанова.
Динамические уравнения теории пластин Кирхгофа—Лява.

Заседание 389 (22 декабря 2017 г.).
Презентация вышедших в 2017 году книг участников семинара.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством проф. Д. В. Георгиевского, д.ф.-м.н. М. В. Шамолина, проф. С. А. Агафонова// Совр. мат. Фундам. направл. — 2007. — *23.* — С. 16–45.
2. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова, проводящегося на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Совр. мат. прилож. — 2009. — *62.* — С. 3–13.
3. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова, проводящегося на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Совр. мат. прилож. — 2009. — *65.* — С. 3–10.
4. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством проф. Д. В. Георгиевского, д.ф.-м.н. М. В. Шамолина, проф. С. А. Агафонова// Совр. мат. прилож. — 2012. — *76.* — С. 3–10.
5. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством проф. Д. В. Георгиевского, д.ф.-м.н. М. В. Шамолина, проф. С. А. Агафонова// Совр. мат. прилож. — 2013. — *88.* — С. 3–19.
6. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Совр. мат. прилож. — 2015. — *98.* — С. 3–8.
7. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Совр. мат. прилож. — 2016. — *100.* — С. 3–11.
8. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2018. — *150.* — С. 3–25.

Д. В. Георгиевский
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: `georgiev@mech.math.msu.su`

М. В. Шамолин
Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова
E-mail: `shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru`