ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 491, с. 95–101

МАТЕМАТИКА

УДК 517+531.01

НОВЫЕ СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ

© 2020 г. М. В. Шамолин*

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 20.01.2020 г.
Поступило 20.01.2020 г.
После доработки 20.01.2020 г.
Принято к публикации 23.01.2020 г.

В работе показана интегрируемость некоторых классов однородных по части переменных динамических систем нечетного порядка, в которых выделяется система на касательном расслоении к гладким многообразиям. При этом силовые поля обладают диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Ключевые слова: динамическая система, интегрируемость, диссипация, трансцендентный первый интеграл

DOI: 10.31857/S268695432002023X

Описание диссипации в динамической системе является довольно затруднительной задачей. Но это, к примеру, может быть сделано следующим образом: вполне определенные коэффициенты указывают на рассеяние энергии в одних областях фазового пространства, а в других его областях – на подкачку энергии. Это приводит к потере классических первых интегралов (законов сохранения), глобально выражающихся через гладкие функции.

Топологическим препятствием к наличию в системе полного набора гладких первых интегралов являются притягивающие или отталкивающие предельные множества. При их обнаружении необходимо забыть о полном наборе даже непрерывных во всем фазовом пространстве автономных первых интегралов [1].

При исследовании систем с диссипацией если и удается найти полный набор первых интегралов, то среди них обязательно будут первые интегралы, являющиеся трансцендентными (в смысле комплексного анализа) функциями (имеющими существенно особые точки). Поэтому результаты, полученные в данной работе, особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

Данная тематика уже затрагивалась в ряде работ автора (см., например, [2, 3]). В данной работе показана интегрируемость некоторых классов однородных по части переменных динамических систем нечетного порядка, в которых выделяется система на касательном расслоении к гладкому многообразию. При этом силовые поля обладают диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
**E-mail: shamolin@imec.msu.ru*

1. ЗАМЕЧАНИЯ К СИСТЕМАМ МАЛЫХ НЕЧЕТНЫХ ПОРЯДКОВ

Пусть v, α, z – фазовые переменные в некоторой системе, с правыми частями – однородными полиномами степени 2 по переменным v, z (для уравнений на $v^\bullet$, $z^\bullet$, $v\alpha^\bullet$ см. также [3, 4]). Выбирая в качестве нового времени переменную q ($dq = v dt$, $\frac{d}{dq} = \langle ' \rangle$, $v \neq 0$), изучаемая система приводится к виду

$$\begin{aligned} &v' = \Psi(\alpha, Z)v, \quad \alpha' = -Z + bZ^2\delta(\alpha), \\ &Z' = -Z\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -bZ^2\frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha}, \end{aligned} \tag{1}$$

$z = Zv$, $b \geq 0$, $\delta(\alpha)$ – гладкая функция. Система (1) рассматривается в качестве системы при отсутствии внешнего поля сил. Первое уравнение отделяется, что позволяет рассматривать два оставшихся уравнения в качестве системы с одной степенью свободы на двумерном многообразии $N^2\{Z;\alpha\}$.

Система (1) имеет два гладких первых интеграла. Независимая же подсистема на $N^2\{Z;\alpha\}$ имеет рациональный по Z первый интеграл (см. также [4–6]). Добавляя в третье уравнение системы (1) внешнее силовое поле $F(\alpha)$ при $b > 0$: $Z' = F(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z)$, создается впечатление, что система осталась консервативной (что и имеет место при $b = 0$ [2, 3]). Действительно, при некотором условии у нее существует гладкий первый интеграл, структура которого напоминает интеграл полной энергии. Но дополнительного гладкого первого интеграла система, вообще говоря, не имеет. Более того, если $F(\alpha) = \delta(\alpha)\dfrac{d\delta(\alpha)}{d\alpha}$, дополнительный первый интеграл является трансцендентной функцией фазовых переменных (т.е. имеет существенно особые точки, означающие наличие в системе притягивающих предельных множеств) [7].

Аналогично рассматривались ранее системы пятого, седьмого и даже девятого порядков на многообразии с ненулевыми коэффициентами связности Γ^i_{jk} [2, 3]. Например, системы седьмого порядка

$$v' = \Psi(\alpha, Z)v, \quad \Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha},$$
$$\alpha' = -Z_3 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\delta(\alpha),$$
$$Z_3' = \Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha)Z_2^2 + \Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha)Z_1^2 - Z_3\Psi(\alpha, Z),$$

$$Z_2' = [2\Gamma_1(\alpha) + Df]Z_2Z_3 - \Gamma^1_{22}(\alpha, \beta)f(\alpha)g^2(\beta_1)Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z),$$

$$Z_1' = [2\Gamma_1(\alpha) + Df]Z_1Z_3 - [2\Gamma_2(\beta_1) + Dg]f(\alpha)Z_1Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z),$$
$$\beta_1' = Z_2 f(\alpha), \quad \beta_2' = Z_1 f(\alpha)g(\beta_1),$$

$DQ(u) = \dfrac{d\ln|Q(u)|}{du}$, $Z = (Z_1, Z_2, Z_3)$, $z_k = Z_k v$, $k = 1, 2, 3$, $b \ge 0$, $\delta(\alpha)$, $f(\alpha)$, $g(\beta_1)$ – гладкие функции, рассматривались как системы при отсутствии внешнего поля сил, в которых также присутствуют коэффициенты при параметре $b \ge 0$. Но, как и в системе (1), данные коэффициенты не нарушают консервативности, поскольку системы обладают полным набором (пятью, и этого достаточно) гладких первых интегралов [2, 3].

2. СИСТЕМЫ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА ПРИ ОТСУТСТВИИ ВНЕШНЕГО СИЛОВОГО ПОЛЯ

Пусть v, α, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$ – фазовые переменные в системе, правые части которой – однородные полиномы степени 2 по переменным v, z (для уравнений на $v^\bullet$, $z^\bullet$, $v\alpha^\bullet$, $v\beta^\bullet$, [2, 7]), с коэффициентами, зависящими от α, β. Тогда, выбирая новую независимую переменную q ($dq = v\,dt$, $\dfrac{d}{dq} = \langle ' \rangle$, $v \neq 0$), будем рассматривать систему $(2n + 1)$-го порядка

$$v' = \Psi(\alpha, Z)v, \tag{2}$$
$$\Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + \ldots + Z_n^2)\frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha},$$

$$\alpha' = -Z_n + b(Z_1^2 + \ldots + Z_n^2)\delta(\alpha),$$
$$Z_n' = \Gamma^\alpha_{11}(\alpha, \beta)f_1^2(\alpha)Z_{n-1}^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha, \beta)f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)Z_{n-2}^2 + \ldots + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha, \beta)f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1) \times h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})Z_1^2 - Z_n\Psi(\alpha, Z),$$

$$Z_{n-1}' = [2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)]Z_{n-1}Z_n - \Gamma^1_{22}(\alpha, \beta)\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)Z_{n-2}^2 - \ldots - \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha, \beta)\frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} \times g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})Z_1^2 - Z_{n-1}\Psi(\alpha, Z), \ldots,$$

$$\begin{aligned} Z_2' = {} & [2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha, \beta) + Df_{n-2}(\alpha)]Z_2Z_n - [2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha, \beta) + Dg_{n-3}(\beta_1)]f_1(\alpha)Z_2Z_{n-1} - \ldots \\ & \ldots - [2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha, \beta) + Dr_1(\beta_{n-3})] \times f_{n-3}(\alpha)g_{n-4}(\beta_1)h_{n-5}(\beta_2)\ldots s_1(\beta_{n-4})Z_2Z_3 - \\ & - \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha, \beta)\frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)}\frac{g_{n-2}^2(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)} \times \frac{h_{n-3}^2(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)}\ldots\frac{r_2^2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})}i_1^2(\beta_{n-2})Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z), \end{aligned} \tag{3}$$

$$Z_1' = [2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha, \beta) + Df_{n-1}(\alpha)]Z_1Z_n - [2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha, \beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)]f_1(\alpha)Z_1Z_{n-1} - [2\Gamma^{n-1}_{2,n-1}(\alpha, \beta) + Dh_{n-3}(\beta_2)]f_2(\alpha)g_1(\beta_1)Z_1Z_{n-2} - \ldots - [2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha, \beta) + Di_1(\beta_{n-2})] \times f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)\ldots r_1(\beta_{n-3})Z_1Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z),$$

$$\beta_1' = Z_{n-1}f_1(\alpha), \quad \beta_2' = Z_{n-2}f_2(\alpha)g_1(\beta_1),$$
$$\beta_3' = Z_{n-3}f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h_1(\beta_2), \ldots,$$
$$\beta_{n-1}' = Z_1 f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1(\beta_{n-2}),$$

$DQ(u) = \dfrac{d\ln|Q(u)|}{du}$, $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$, $z_\rho = Z_\rho v$, $\rho = 1, \ldots, n$, $b \ge 0$, $\delta(\alpha)$, $f_k(\alpha)$, $k = 1, \ldots, n - 1$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \ldots, n - 2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \ldots, n - 3$, …, $i_1(\beta_{n-2})$ – некоторые гладкие функции, как систему при отсутствии внешнего поля сил. При этом уравнение (2) отделяется, что дает возможность рассматривать уравнения (3) в качестве независимой системы (с n степенями свободы) на $2n$-мерном многообразии $N^{2n}\{Z_n,\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\} = TM^n\{Z_n,\ldots,Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}$ (касательном расслоении гладкого n-мерного многообразия $M^n\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$, см. также [2, 7]).

Структура системы (3) соответствует следующим уравнениям геодезических линий на касательном расслоении $TM^n\{\alpha^\bullet,\beta_1^\bullet,\ldots,\beta_{n-1}^\bullet; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}$ многообразия $M^n\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$ [8] (в частности, многомерным поверхностям вращения с $n(n-1)$ ненулевыми коэффициентами связности):

$$\begin{gathered}
\alpha^{\bullet\bullet} + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\beta_1^{\bullet 2} + \ldots + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0,\\
\beta_1^{\bullet\bullet} + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\alpha^\bullet\beta_1^\bullet + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\beta_2^{\bullet 2} + \ldots\\
\ldots + \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0,\\
\beta_2^{\bullet\bullet} + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\alpha^\bullet\beta_2^\bullet + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\beta_1^\bullet\beta_2^\bullet +\\
+ \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\beta_3^{\bullet 2} + \ldots + \Gamma^2_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0,\\
\beta_3^{\bullet\bullet} + 2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\alpha^\bullet\beta_3^\bullet + 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\beta_1^\bullet\beta_3^\bullet +\\
+ 2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\beta_2^\bullet\beta_3^\bullet + \Gamma^3_{44}(\alpha,\beta)\beta_4^{\bullet 2} + \ldots\\
\ldots + \Gamma^3_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0,\ldots,\\
\beta_{n-2}^{\bullet\bullet} + 2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta)\alpha^\bullet\beta_{n-2}^\bullet + 2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta)\beta_1^\bullet\beta_{n-2}^\bullet + \ldots\\
\ldots + 2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta)\beta_{n-3}^\bullet\beta_{n-2}^\bullet + \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0,\\
\beta_{n-1}^{\bullet\bullet} + 2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)\alpha^\bullet\beta_{n-1}^\bullet + 2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)\beta_1^\bullet\beta_{n-1}^\bullet + \ldots\\
\ldots + 2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)\beta_{n-2}^\bullet\beta_{n-1}^\bullet = 0.
\end{gathered} \tag{4}$$

Действительно, выбрав новые координаты $Z_1, \ldots, Z_n$ в касательном пространстве

$$\begin{gathered}
\alpha' = -Z_n, \quad \beta_1' = Z_{n-1}f_1(\alpha),\\
\beta_2' = Z_{n-2}f_2(\alpha)g_1(\beta_1),\\
\beta_3' = Z_{n-3}f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h_1(\beta_2),\ldots,\\
\beta_{n-1}' = Z_1 f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1(\beta_{n-2}),
\end{gathered} \tag{5}$$

мы получаем соотношения на них в следующем виде (ср. с системой (3)):

$$\begin{gathered}
Z_1' = [2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) + Df_{n-1}(\alpha)]Z_1Z_n -\\
- [2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)]f_1(\alpha)Z_1Z_{n-1} -\\
- [2\Gamma^{n-1}_{2,n-1}(\alpha,\beta) + Dh_{n-3}(\beta_2)]f_2(\alpha)g_1(\beta_1)Z_1Z_{n-2} - \ldots\\
\ldots - [2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})]\times\\
\times f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})Z_1Z_2,\\
Z_2' = [2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta) + Df_{n-2}(\alpha)]Z_2Z_n -\\
- [2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta) + Dg_{n-3}(\beta_1)]f_1(\alpha)Z_2Z_{n-1} - \ldots\\
\ldots - [2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta) + Dr_1(\beta_{n-3})]\times\\
\times f_{n-3}(\alpha)g_{n-4}(\beta_1)h_{n-5}(\beta_2)\ldots s_1(\beta_{n-4})Z_2Z_3 -\\
- \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\frac{f^2_{n-1}(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)}\frac{g^2_{n-2}(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)}\frac{h^2_{n-3}(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)}\ldots\\
\ldots\frac{r_2^2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})}i_1^2(\beta_{n-2})Z_1^2,\ldots,\\
Z_{n-1}' = [2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)]Z_{n-1}Z_n -\\
- \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)Z_{n-2}^2 - \ldots\\
\ldots - \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\frac{f^2_{n-1}(\alpha)}{f_1(\alpha)}g^2_{n-2}(\beta_1)h^2_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})Z_1^2,\\
Z_n' = \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)f_1^2(\alpha)Z_{n-1}^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\times\\
\times f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)Z_{n-2}^2 + \ldots + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f^2_{n-1}(\alpha)\times\\
\times g^2_{n-2}(\beta_1)h^2_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})Z_1^2,
\end{gathered} \tag{6}$$

и система (4) почти всюду (при согласовании независимой переменной) эквивалентна совокупности (5), (6), которая, прежде всего, присутствует в (3).

Далее, в системе (3) также присутствуют коэффициенты при параметре $b \geq 0$. Но, как и в системе (1), они не нарушают консервативности, поскольку система (2), (3) при некоторых естественных условиях обладает полным набором $(n + 2)$ гладких первых интегралов.

П р е д л о ж е н и е 1. *Если всюду на своей области определения справедлива система* $\frac{n(n-1)}{2}$ *равенств*

$$\begin{gathered}
2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)f_1^2(\alpha) \equiv 0,\ldots,\\
2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) + Df_{n-1}(\alpha) + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f^2_{n-1}(\alpha)\times\\
\times g^2_{n-2}(\beta_1)h^2_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2}) \equiv 0,\\
[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + Dg_1(\beta_1)]f_1^2(\alpha) +\\
+ \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1) \equiv 0,\ldots,\\
[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)]f_1^2(\alpha) +\\
+ \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f^2_{n-1}(\alpha)g^2_{n-2}(\beta_1)\ldots i_1^2(\beta_{n-2}) \equiv 0,\ldots,\\
[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})]f^2_{n-2}(\alpha)\ldots r_1^2(\beta_{n-3}) +\\
+ \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f^2_{n-1}(\alpha)\ldots i_1^2(\beta_{n-2}) \equiv 0,
\end{gathered} \tag{7}$$

то система (2), (3) *имеет аналитический первый интеграл вида*

$$\Phi_1(v; Z_n,\ldots,Z_1) = v^2(Z_1^2 + \ldots + Z_n^2) = C_1^2 = \text{const}. \tag{8}$$

Можно доказать отдельную теорему существования решения $f_k(\alpha)$, $k = 1, \ldots, n-1$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \ldots, n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \ldots, n-3, \ldots, i_1(\beta_{n-2})$ системы (7) для условий наличия интеграла (8) системы (5), (6) уравнений геодезических. Но в дальнейшем при изучении динамических систем с диссипацией вся группа условий (7) нам не потребуется. Тем не менее, в дальнейшем будем предполагать в уравнениях (5) выполнение равенств

$$f_1(\alpha) \equiv \ldots \equiv f_{n-1}(\alpha) = f(\alpha), \tag{9}$$

при этом функции $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \ldots, n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \ldots, n-3, \ldots, i_1(\beta_{n-2})$ должны удовлетворять преобразованным уравнениям из (7):

$$\begin{gathered} 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + Dg_1(\beta_1) + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)g_1^2(\beta_1) \equiv 0, \ldots, \\ 2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1) + \\ + \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)g^2_{n-2}(\beta_1)\ldots i_1^2(\beta_{n-2}) \equiv 0, \ldots, \\ 2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})g^2_{n-3}(\beta_1)\ldots r_1^2(\beta_{n-3}) + \\ + \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)g^2_{n-2}(\beta_1)\ldots i_1^2(\beta_{n-2}) \equiv 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Таким образом, функции $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \ldots, n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \ldots, n-3, \ldots, i_1(\beta_{n-2})$ пока зависят от коэффициентов связности, а ограничения на функцию $f(\alpha)$ будут даны ниже.

П р е д л о ж е н и е 2. *Если выполнены свойства* (9), (10), *при этом справедливы равенства*

$$\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) \equiv \ldots \equiv \Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) = \Gamma_1(\alpha), \tag{11}$$

то система (2), (3) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида:*

$$\begin{gathered} \Phi_2(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha) = \\ = v^2\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2}\,\delta(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}, \end{gathered} \tag{12}$$

при этом функция $\delta(\alpha)$ *должна удовлетворять равенству*

$$\begin{gathered} \delta(\alpha) = A_1 f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\}, \\ A_1 = \mathrm{const}. \end{gathered} \tag{13}$$

П р е д л о ж е н и е 3. *Если выполнены условия предложения* 2, *а также*

$$g_1(\beta_1) \equiv \ldots \equiv g_{n-2}(\beta_1) = g(\beta_1), \tag{14}$$

при этом справедливы равенства

$$\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) \equiv \ldots \equiv \Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) = \Gamma_2(\beta_1), \tag{15}$$

то система (2), (3) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\begin{gathered} \Phi_3(v; Z_{n-2}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1) = \\ = v^2\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2}\,\delta(\alpha)\Psi_1(\beta_1) = C_3 = \mathrm{const}, \\ \Psi_1(\beta_1) = g(\beta_1)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)db\right\}. \end{gathered} \tag{16}$$

Далее применяем по индукции вышеизложенные рассуждения и приходим к следующему утверждению.

П р е д л о ж е н и е 4. *Если выполнены условия предложений* 2, 3, ..., *при этом справедливо равенство*

$$\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) = \Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}), \tag{17}$$

то система (2), (3) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида:*

$$\begin{gathered} \Phi_n(v; Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \\ = v^2 Z_1\delta(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\ldots\Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) = C_n = \mathrm{const}, \\ \Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) = i_1(\beta_{n-2})\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}}\Gamma_{n-1}(b)db\right\}. \end{gathered} \tag{18}$$

П р е д л о ж е н и е 5. *Пусть выполнены свойства* (9), (14), ..., *нивелирующие индексы у функций* $f_k(\alpha)$ ($k = 1, \ldots, n-1$), $g_l(\beta_1)$ ($l = 1, \ldots, n-2$), $h_m(\beta_2)$ ($m = 1, \ldots, n-3$), ..., *и*

$$\begin{gathered} \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1) \equiv \ldots \equiv \\ \equiv \Gamma^{\alpha}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\ldots = \Gamma_n(\alpha). \end{gathered} \tag{19}$$

Тогда система (2), (3) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида:*

$$\Phi_0(v; Z_n; \alpha) = v^2(1 - 2bZ_n\delta(\alpha)) = C_0 = \mathrm{const}, \tag{20}$$

если функция $\delta(\alpha)$ *удовлетворяет равенству*

$$\begin{gathered} \delta(\alpha) = A_2\exp\left\{-\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_n(b)f^2(b)db\right\}, \\ A_2 = \mathrm{const}. \end{gathered}$$

В частности, если выполнены свойства (7), (9), (11), (13), (14), (19), то система (2), (3) имеет гладкий первый интеграл вида (20).

П р е д л о ж е н и е 6. *Если выполнены условия предложений* 3, ..., 4, *то система* (2), (3) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида:*

$$\begin{gathered} \Phi_{n+1}(\beta_{n-2}, \beta_{n-1}, C_{n-1}, C_n) = \beta_{n-1} \pm \\ \pm\int\limits_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}}\frac{C_n i_1(b)}{\sqrt{C_{n-1}^2\Psi_{n-2}^2(b) - C_n^2}}db = C_{n+1} = \mathrm{const}, \end{gathered} \tag{21}$$

где, после взятия интеграла (21), *вместо постоянных* C_{n-1}, C_n *можно подставить левые части соответствующих равенств.*

Т е о р е м а 1. *Если выполнены условия предложений* 1–6, *то система* (2), (3) *обладает полным набором* ($n+2$) *гладких независимых первых интегралов вида* (8), (12), (16), ..., (18), (20), (21).

То, что предъявленный полный набор состоит из $n+2$, а не из $2n$ первых интегралов, будет показано ниже.

3. ВВЕДЕНИЕ ВНЕШНЕГО СИЛОВОГО ПОЛЯ

Модифицируем систему (2), (3) при условиях (9), (11), (14), (15), ..., (17), (19) при наличии двух ключевых параметров b, $b_1 \geq 0$, введя внешнее силовое поле. Если ввести такое поле, добавив коэффициент $F(\alpha)$ лишь в уравнение на Z_n' системы (22), (23) и даже положив при этом $b_1 = 0$, то полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность будет при дополнительном условии: $b = 0$. Но мы расширим введение силового поля, положив $b_1 > 0$. Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения $TM^n\{Z_n,\ldots,Z_1;\ \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}$ примет вид

$$v' = \Psi(\alpha, Z)v,$$
$$\Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + \ldots + Z_n^2)\frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha} + b_1F(\alpha)\delta(\alpha), \tag{22}$$

$$\alpha' = -Z_n + b(Z_1^2 + \ldots + Z_n^2)\delta(\alpha) + b_1F(\alpha)\tilde{f}(\alpha),$$
$$\tilde{f}(\alpha) = \frac{\mu - \delta^2(\alpha)}{\dfrac{d\delta(\alpha)}{d\alpha}},$$
$$Z_n' = F(\alpha) + \Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha)(Z_{n-1}^2 + \ldots$$
$$\ldots + Z_1^2) - Z_n\Psi(\alpha, Z),$$
$$Z_{n-1}' = [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]Z_{n-1}Z_n -$$
$$- \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)f(\alpha)g^2(\beta_1)Z_{n-2}^2 - \ldots$$
$$\ldots - \Gamma_{n-1,n-1}^1(\alpha, \beta)f(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2})Z_1^2 -$$
$$- Z_{n-1}\Psi(\alpha, Z), \ldots,$$
$$Z_2' = [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]Z_2Z_n -$$
$$- [2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)]f(\alpha)Z_2Z_{n-1} - \ldots$$
$$\ldots - [2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3}) + Dr(\beta_{n-3})] \times$$
$$\times f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots s(\beta_{n-4})Z_2Z_3 - \tag{23}$$
$$- \Gamma_{n-1,n-1}^{n-2}(\alpha, \beta)f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots$$
$$\ldots r(\beta_{n-3})i^2(\beta_{n-2})Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z),$$
$$Z_1' = [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]Z_1Z_n -$$
$$- [2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)]f(\alpha)Z_1Z_{n-1} -$$
$$- [2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2)]f(\alpha)g(\beta_1)Z_1Z_{n-2} - \ldots$$
$$\ldots - [2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di(\beta_{n-2})]f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots$$
$$\ldots r(\beta_{n-3})Z_1Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z),$$
$$\beta_1' = Z_{n-1}f(\alpha), \quad \beta_2' = Z_{n-2}f(\alpha)g(\beta_1),$$
$$\beta_3' = Z_{n-3}f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2), \ldots,$$
$$\beta_{n-1}' = Z_1 f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots i(\beta_{n-2}),$$

$\mu = \mathrm{const}$. При этом коэффициенты консервативной составляющей силового поля содержат параметр b, а неконсервативной составляющей внешнего поля – параметр b_1.

Силовое поле в уравнениях на v', Z_1', ..., Z_n' определяется функцией $\Psi(\alpha, Z)$. Опишем введение силового поля в виде двумерного столбца, в первой строке которого стоят коэффициенты из функции $\Psi(\alpha, Z)$, а во второй строке – коэффициенты из уравнения на α'. Таким образом, совместное силовое поле (в котором присутствуют три параметра b, $b_1 \geq 0$, μ) будут иметь вид

$$U\begin{pmatrix} b(Z_1^2 + \ldots + Z_n^2) \\ b_1F(\alpha) \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} -\dfrac{d\delta(\alpha)}{d\alpha} & \delta(\alpha) \\ \delta(\alpha) & \tilde{f}(\alpha) \end{pmatrix},$$

где U – преобразование с определителем, равным $-\mu$, и являющимся унимодулярным преобразованием при $\mu = \pm 1$. Такое преобразование вносит в систему диссипацию (как одного знака, так и другого, см. также [2, 3]).

4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ С ДИССИПАЦИЕЙ

Перейдем теперь к интегрированию системы $(2n+1)$-го порядка (22), (23) при выполнении свойств (10). Она также допускает отделение независимой подсистемы $(2n-1)$-го порядка.

Введем также (по аналогии с (10)) ограничение и на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять преобразованному первому равенству из (7):

$$2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha) \equiv 0. \tag{24}$$

Для полного интегрирования системы (23) (пока без уравнения (22)) необходимо знать, вообще говоря, $(2n-1)$ независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных:

$$w_1 = \frac{Z_{n-1}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2}}, \quad \ldots, \quad w_{n-3} = \frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}},$$
$$w_{n-2} = \frac{Z_2}{Z_1}, \quad w_{n-1} = \sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2}, \quad w_n = Z_n,$$

система (23) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_n + b(w_n^2 + w_{n-1}^2)\delta(\alpha) + b_1F(\alpha)\tilde{f}(\alpha),$$
$$w_n' = F(\alpha) + \Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha)w_{n-1}^2 - w_n\Psi(\alpha, w), \tag{25}$$
$$w_{n-1}' = [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]w_{n-1}w_n - w_{n-1}\Psi(\alpha, w),$$

$$
\begin{aligned}
w_s' &= (\pm) w_{n-1}\sqrt{1+w_s^2}\, f(\alpha)\ldots[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + Dj(\beta_s)],\\
\beta_s' &= (\pm)\frac{w_s w_{n-1}}{\sqrt{1+w_s^2}} f(\alpha)\ldots, \quad s = 1,\ldots,n-2,
\end{aligned} \tag{26}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta_{n-1}' &= (\pm)\frac{w_{n-1}}{\sqrt{1+w_{n-2}^2}} f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots i(\beta_{n-2}),\\
\Psi(\alpha, w) &= -b(w_n^2 + w_{n-1}^2)\frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha} + b_1 F(\alpha)\delta(\alpha),
\end{aligned} \tag{27}
$$

где в системе (26) символом "..." показаны одинаковые члены, а функция $j(\beta_s)$ – одна из функций $g, h, \ldots$, зависящая от соответствующего угла β_s.

Видно, что для полной интегрируемости системы (23) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (25), по одному – для систем (26) (меняя в них независимые переменные; их $n-2$ штуки), и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (27) (т.е. всего $n+1$).

Т е о р е м а 2. *Пусть для некоторых* $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$ *выполняются равенства*

$$
\begin{aligned}
\Gamma_n(\alpha) f^2(\alpha) &= \kappa \frac{d}{d\alpha}\ln|\delta(\alpha)|;\\
F(\alpha) &= \lambda \frac{d}{d\alpha}\frac{\delta^2(\alpha)}{2}.
\end{aligned} \tag{28}
$$

Тогда система (22), (23) *при выполнении свойств* (10), (24) *обладает* ($n+2$) *независимыми* (*вообще говоря, трансцендентными* [9] *в смысле комплексного анализа*) *первыми интегралами*.

Первое равенство из (28) можно назвать геометрическим, а второе – энергетическим.

В общем случае первые интегралы выписываются громоздко. В частности, если $\kappa = -1$, то явный вид ключевого первого интеграла системы (25):

$$
\begin{aligned}
&\Theta_1(w_n, w_{n-1}; \alpha) = G_1\left(\frac{w_n}{\delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\delta(\alpha)}\right) =\\
&= \frac{w_n^2 + w_{n-1}^2 - b_1\lambda\mu w_n \delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)}{w_{n-1}\delta(\alpha)} = C_1 = \text{const}.
\end{aligned} \tag{29}
$$

При помощи интеграла (29) получается и дополнительный первый интеграл для системы (25), который имеет следующий структурный вид:

$$
\begin{aligned}
&\Theta_2(w_n, w_{n-1}; \alpha) =\\
&= G_2\left(\delta(\alpha), \frac{w_n}{\delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\delta(\alpha)}\right) = C_2 = \text{const}.
\end{aligned} \tag{30}
$$

Выражение первого интеграла (30) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\delta(\alpha)$. Например, при $\kappa = -1$ этот первый интеграл найдется из уравнения Бернулли

$$
\begin{aligned}
\frac{d\delta}{du_n} &= \frac{(b_1\lambda\mu - u_n)\delta + b\delta^3(U^2(C_1, u_n) + u_n^2) - b_1\lambda\delta^3}{\lambda - b_1\lambda\mu u_n + u_n^2 - U^2(C_1, u_n)},\\
U(C_1, u_n) &= \frac{\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(\lambda - b_1\lambda\mu u_n + u_n^2)}\}}{2},\\
u_n &= \frac{w_n}{\delta(\alpha)}.
\end{aligned}
$$

При этом после взятия этого интеграла вместо C_1 можно подставить левую часть равенства (29).

Первые интегралы для независимых подсистем (26) (после замен независимых переменных в них) будут иметь вид

$$
\begin{aligned}
\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) &= \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \text{const},\\
s &= 1,\ldots,n-2,
\end{aligned} \tag{31}
$$

о функциях $\Psi_s(\beta_s)$ см. (16)–(18). А дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (27), находится по аналогии с (21):

$$
\begin{aligned}
&\Phi_{n+1}(\beta_{n-2}, \beta_{n-1}, C_{n-1}, C_n) =\\
&= \beta_{n-1} \pm \int\limits_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}} \frac{C_n i_1(b)}{\sqrt{C_{n-1}^2\Psi_{n-2}^2(b) - C_n^2}}\, db = C_{n+1} = \text{const},
\end{aligned}
$$

где, после взятия этого интеграла, вместо постоянных C_{n-1}, C_n можно подставить левые части соответствующих равенств (31).

Кроме того, у системы (22), (23) существует гладкий первый интеграл (по аналогии с (20), "привязывающий" уравнение (22)), который, например, при $b = b_1$, $\mu = 1$ примет вид

$$
\begin{aligned}
&\Theta_0(v; w_n, w_{n-1}; \alpha) =\\
&= v^2(1 - 2bw_n\delta(\alpha) + b^2(w_n^2 + w_{n-1}^2)) = C_0 = \text{const}.
\end{aligned}
$$

Справедлива и теорема, обратная к теореме 2.

Т е о р е м а 3. *Условия* (10), (24), (28) (*например, при* $\kappa = -1$) *являются необходимыми условиями существования первого интеграла* (29) *для системы* (22), (23).

5. СТРОЕНИЕ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДЛЯ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ

Если α – периодическая координата периода 2π, то система (22), (23) обладает переменной диссипацией с нулевым средним [7]. При этом при $F(\alpha) \equiv 0$ она превращается в систему консервативную (2), (3). Последняя, в частности, обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (8), (12). Более того, если функция $F(\alpha)$ не равна тождественно нулю, но $b_1 = 0$, то система (22), (23) при втором условии из (28) обладает первым интегралом вида

$$\begin{gathered}\Xi_0(v; Z_n, \ldots, Z_1; \alpha) = \\ = v(Z_1^2 + \ldots + Z_n^2 + \lambda\delta^2(\alpha)) = \text{const}.\end{gathered} \tag{32}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (32), (12) также является первым интегралом системы (22), (23) при неравенстве функции $F(\alpha)$ тождественно нулю, но $b_1 = 0$. Но при $b_1 > 0$ каждая из функций

$$\begin{gathered}\Xi_{b_1}(v; Z_n, \ldots, Z_1; \alpha) = \\ = v^2(Z_1^2 + \ldots + Z_n^2 - b_1\lambda\mu Z_n\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha))\end{gathered} \tag{33}$$

и (12) по отдельности не является первым интегралом системы (22), (23). Однако отношение функций (33), (12) является первым интегралом (29) системы (22), (23) (при $\kappa = -1$) при любом $b_1 > 0$.

Вообще же, как и указывалось ранее, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств (см. также [1–3]).

6. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Выделим существенный случай для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на n-мерной сфере, и $\delta(\alpha)$:

$$f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \delta(\alpha) = \sin\alpha. \tag{34}$$

Случай (34) формирует класс систем (22), (23) при $\mu = 1$, соответствующих движению $(n + 1)$-мерного динамически симметричного твердого тела на нулевых уровнях циклических интегралов в неконсервативном поле сил [8]. В частности, при $\delta(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ рассматриваемая система описывает геодезический поток на n-мерной сфере. В случае (34), если $\delta(\alpha) = \dfrac{F(\alpha)}{\cos\alpha}$, то система описывает движение $(n + 1)$-мерного твердого тела в силовом поле $F(\alpha)$ под действием следящей силы [7]. В частности, если $F(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha$, $\delta(\alpha) = \sin\alpha$, то система эквивалентна обобщенному (сферическому) $(n + 1)$-мерному маятнику, помещенному в неконсервативное поле, и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Если функция $\delta(\alpha)$ не является периодической, то рассматриваемая система является собственно диссипативной. Тем не менее, и в этом случае (благодаря теоремам 2 и 3) можно получить явный вид трансцендентных интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Последнее также является новым нетривиальным случаем интегрируемости многомерных диссипативных систем в явном виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шамолин М.В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53. В. 3. С. 209–210.
2. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией // ДАН. 2019. Т. 487. № 4. С. 381–386.
3. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией // ДАН. 2019. Т. 489. № 6. С. 592–598.
4. *Козлов В.В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // Прикл. матем. и механ. 2015. Т. 79. № 3. С. 307–316.
5. *Козлов В.В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи матем. наук. 1983. Т. 38. В. 1. С. 3–67.
6. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.–Л.: ОГИЗ, 1947.
7. *Трофимов В.В., Шамолин М.В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. и прикл. матем. 2010. Т. 16. В. 4. С. 3–229.
8. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия // ДАН. 2018. Т. 482. № 5. С. 527–533.
9. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1987.

NEW CASES OF INTEGRABLE ODD-ORDER SYSTEMS WITH DISSIPATION

M. V. Shamolin

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

The paper shows the integrability of certain classes of odd-order dynamic systems that are homogeneous in part, in which the system on the tangent bundle to smooth manifolds is distinguished. In this case, the force fields have various dissipation and generalize the previously considered ones.

Keywords: dynamical system, integrability, dissipation, transcendental first integral