Воронежский государственный университет
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Математический институт имени В. А. Стеклова
Российской академии наук

МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ «ВОРОНЕЖСКАЯ ЗИМНЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА С. Г. КРЕЙНА – 2020»

Под редакцией В. А. Костина

Воронеж
Издательско-полиграфический центр
«Научная книга»
2020

УДК 517.5+517.9(083)
ББК 22.16я4
М34

Издание осуществлено при поддержке АО «Турбонасос»

М34 **Материалы** Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2020» / под ред. В. А. Костина. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2020. – 340 с. – ISBN 978-5-4446-1376-4. – Текст : непосредственный.

В сборнике представлены статьи участников Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2020», содержащие новые результаты по функциональному анализу, дифференциальным уравнениям, краевым задачам математической физики и другим разделам современной математики.

Предназначен для научных работников, аспирантов и студентов.

Сборник включен в РИНЦ.

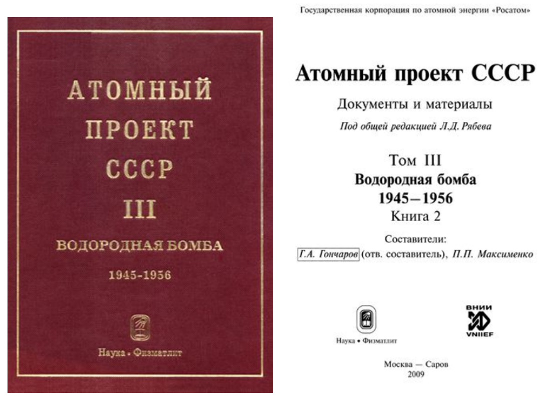
УДК 517.5+517.9(083)
ББК 22.16я4

ISBN 978-5-4446-1376-4

С.Г. КРЕЙН И ЦЕПНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ РЕАКЦИЯ В ВОРОНЕЖЕ

©2020 *В. А. Костин*, *Д. В. Костин*
(Воронеж; *vlkostin@mail.ru*)

Во время работы традиционной «Воронежской зимней математической школы С.Г. Крейна-2018» одним из авторов (Д.В. Костин, зам. председателя программного комитета школы) был обнаружен неизвестный и неожиданный для воронежских математиков факт, открывшийся после рассекречивания Атомного проекта по созданию водородной бомбы СССР, участником которого, как оказалось, был С.Г. Крейн.



Но так как труды конференции были уже опубликованы, то эта информация в них не попала. В тоже время, важность этого факта в очередной раз высветила значение С.Г. Крейна не только в воронежской, но и в отечественной математике и заставила нас с новых позиций посмотреть и проследить за теми, иногда неожиданными и судьбоносными человеческими «сцеплениями», благодаря которым наш университет, а вместе с ним и город Воронеж, стали причастными к разработке грандиозного проекта. Этот факт

3. *Шведов А.С.* Оценивание средних и ковариаций нечётко-случайных величин. Прикладная эконометрика, 2016, т. 42. с. 121-138

4. *Bargelia A., Pedrycz W., Nakashima T.* Multiple Regression with Fuzzy Data, Fuzzy Sets and Systems, 2007, pp. 2169 - 2188

5. *Colubi A.* Statistical inference about the means of fuzzy random variables: Applications to the analysis of fuzzy-and real-valued data. Fuzzy Sets and sytems, 2009, 344-356

НЕПРЕРЫВНАЯ ВЫБОРКА ИЗ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ЧЕБЫШЕВСКОГО ПРОЕКТОРА В $C(Q)$[1]

©2020 *И. Г. Царьков*
(Москва; *tsar@mech.math.msu.su*)

Путь $p : [0, 1] \to X$ (непрерывное отображение) в линейном нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$ называется монотонным, если для любого функционала $x^* \in \operatorname{extr} S^*$ функция $x^*(p(t))$ является монотонной. Геометрически это означает, что поверхности уровня этого функционала (т.е. соответствующие гиперплоскости) этот путь пересекает один раз или по следу некоторого его подпути. Множество M называется монотонно линейно связным, если любые две точки этого множества можно соединить монотонным путём, след которого лежит в M. В пространстве X для непустого множества $V \subset X$ и непустого ограниченного множества $M \subset X$ через $r_V(M)$ обозначим относительный чебышевский радиус, т.е. величину $\inf\{r \geqslant 0 \mid M \subset B(x, r), x \in V\}$. Через $Z^\varepsilon_V(M)$ обозначим множество почти чебышевских центров: $\{x \in V \mid M \subset B(x, r_V(M) + \varepsilon)\}$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00332-а.

Теорема 1. *Пусть X — линейное нормированное пространство, $V \subset X$ — монотонно линейное связное ограниченно компактное непустое множество. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная выборка из отображения $Z^\varepsilon_V(\cdot)$.*

А.Р. Алимов [1], [2] доказал, что в пространстве c_0 всякое солнце является монотонно линейно связным. Также им доказано [2], что в $C(Q)$ (Q — метрический компакт) всякое строгое солнце является монотонно линейно связным.

Следствие 1. *Пусть $X = C(Q)$ (Q — метрический компакт), $V \subset X$ — ограниченно компактное строгое солнце. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная выборка из отображения $Z^\varepsilon_V(\cdot)$.*

Аналогичный результат верен для случая пространства c_0.

Литература

1. *Алимов А.Р.* Связность солнц в пространстве c_0 // Изв. РАН. Сер. матем. — 2005. — Т. 69, № 4. — С. 3–18.

2. *Алимов А.Р.* Монотонная линейная связность чебышёвских множеств в пространстве $C(Q)$ // Матем. сб. — 2006. — Т. 197, № 9. — С. 3–18.

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ

©2020 *М. В. Шамолин*
(Москва; *shamolin@rambler.ru*, *shamolin.maxim@gmail.com*)

Дать общее определение динамической системы с диссипацией довольно затруднительно. В каждом конкретном случае иногда это может быть сделано: вносимые в систему определённые коэффициенты в уравнениях указывают в одних областях фазового пространства на рассеяние энергии, а в других областях — на её подкачку. Последнее приводит к потере известных первых интегралов (законов сохранения), являющимися гладкими функциями [1–3].

Как только в системе обнаруживаются притягивающие или отталкивающие предельные множества, необходимо забыть о полном наборе даже непрерывных во всем фазовом пространстве первых интегралов.

Показана интегрируемость некоторых классов однородных динамических систем нечётного (третьего, пятого, седьмого и девятого) порядка, в которых выделяется система на касательном расслоении к четномерным (соответственно, одномерным, двумерным, трёхмерным и четырёхмерным) многообразиям. При этом силовые поля обладают диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Приведём примеры систем третьего порядка. Пусть v, α, z — фазовые переменные в гладкой динамической системе, правые части которой — однородные полиномы степени по переменным v, z с коэффициентами, зависящими от α. Тогда, выбирая в качестве новой независимой переменной величину q ($dq = v dt$, $d/dq =<'>$, $v \neq 0$), а также новую фазовую переменную Z по формуле $z = Zv$, рассматриваемую систему можно переписать в следующем виде:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \tag{1}$$

$$\begin{array}{c} \alpha' = g(\alpha) + h(\alpha)Z + i(\alpha)Z^2, \\ Z' = d(\alpha) + e(\alpha)Z + f(\alpha)Z^2 - Z\Psi(\alpha, Z), \end{array} \tag{2}$$

$$\Psi(\alpha, Z) = a(\alpha) + b(\alpha)Z + c(\alpha)Z^2,$$

при этом уравнение (1) на v отделяется, что даёт возможность рассматривать два оставшихся уравнения в качестве системы (2) с одной степенью свободы на двумерном многообразии $N^2\{Z; \alpha\}$. Особняком стоит случай, когда выполнены тождества

$$d(\alpha) \equiv e(\alpha) \equiv f(\alpha) \equiv 0. \tag{3}$$

При этом остальные функции $a(\alpha)$, $b(\alpha)$, $c(\alpha)$, $g(\alpha)$, $h(\alpha)$, $i(\alpha)$, вообще говоря, не равны тождественно нулю. Тогда система (1), (2) имеет естественный аналитический первый интеграл

$$\Phi_1(v; Z) = z = vZ = C_1 = \text{const}. \tag{4}$$

Для полной интегрируемости системы (1), (2) при условии (3) нужно найти ещё один первый интеграл, независимый с (4). Если выполнены следующие условия

$$a(\alpha) = \frac{h^2(\alpha)}{i^2(\alpha)} c(\alpha), b(\alpha) = \frac{h(\alpha)}{i(\alpha)} c(\alpha),\ \ g(\alpha) = \frac{h^2(\alpha)}{i(\alpha)},$$

где $c(\alpha)$, $h(\alpha)$, $i(\alpha)$ — произвольные гладкие функции на своей области определения, то система (1), (2) при условии (3) имеет два гладких первых интеграла, а именно, (4), а также

$$\Phi_0(v; Z; \alpha) = v^2(\gamma(\alpha) + \epsilon(\alpha)Z) = C_0 = \text{const},$$

где функции $\gamma(\alpha)$ и $\epsilon(\alpha)$ имеют вид

$$\begin{array}{c} \gamma(\alpha) = \gamma_0 \exp\left[-2\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{c(\xi)}{i(\xi)} d\xi\right], \\ \epsilon(\alpha) = \epsilon_0 \exp\left[-\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{c(\xi)}{i(\xi)} d\xi\right],\ \ \gamma_0 = \gamma(\alpha_0),\ \ \epsilon_0 = \epsilon(\alpha_0). \end{array}$$

Внутреннее силовое поле (зависящее от трёх произвольных гладких функций $c(\alpha)$, $h(\alpha)$ и $i(\alpha)$) в системе (1), (2) при условии (3) не нарушает консервативности системы. Ограничимся важным частным случаем системы (1), (2).

Как представительницу систем вида (1), (2) при условии (3) будем рассматривать следующую систему третьего порядка

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \tag{5}$$

$$\begin{array}{c} \alpha' = -Z + b_0 Z^2 \delta(\alpha), \\ Z' = -Z\Psi(\alpha, Z), \end{array} \tag{6}$$

$$\Psi(\alpha, Z) = -b_0 Z^2 \tilde{\delta}(\alpha),\ \tilde{\delta}(\alpha) = \frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha},$$

$b_0 \geq 0$ — параметр, $\delta(\alpha)$ — некоторая гладкая функция, как систему при отсутствии внешнего поля сил. Система (5), (6) имеет два гладких первых интеграла:

$$\Phi_0(v; Z; \alpha) = v^2(1 - 2b_0 Z\delta(\alpha)) = C_0 = \text{const},$$
$$\Phi_1(v; Z) = vZ = C_1 = \text{const}.$$

Другими словами, независимая подсистема (6) на многообразии $N^2\{Z; \alpha\}$ имеет рациональный по Z первый интеграл вида

$$\Phi(Z; \alpha) = \frac{1 - 2b_0 Z\delta(\alpha)}{Z^2} = C = \text{const},$$

который не имеет существенно особых точек. В силу последнего, подсистема (6) не имеет притягивающих или отталкивающих предельных множеств, позволяющих говорить о наличии в системе диссипации того или иного знака.

Итак, внутреннее силовое поле (зависящее от $b_0 > 0$) в системе (5), (6) не нарушает консервативности системы.

Добавляя следующим образом в систему (5), (6) внешнее силовое поле $F(\alpha)$ при наличии внутреннего ($b_0 > 0$):

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= -Z + b_0 Z^2 \delta(\alpha), \\ Z' &= F(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z), \end{aligned} \tag{8}$$

создаётся впечатление, что система осталась консервативной (что имеет место при $b_0 = 0$, т.е. при отсутствии внутреннего поля). Консервативность "подтвердилась" бы наличием в системе двух гладких первых интегралов.

Действительно, при некотором естественном условии у системы (7), (8) существует гладкий первый интеграл вида

$$\Phi_1(v; Z; \alpha) = v^2(Z^2 + F_1(\alpha)) = C_1 = \text{const},\ \frac{dF_1(\alpha)}{d\alpha} = 2F(\alpha),$$

структура которого напоминает интеграл полной энергии. Но дополнительного гладкого первого интеграла система, вообще говоря, не имеет.

Если $F(\alpha) = \delta(\alpha)\tilde{\delta}(\alpha)$, то система (7), (8) имеет два независимых (один, вообще говоря, трансцендентный и один гладкий) первых интеграла:

$$\begin{gathered} \Phi_0(v; Z; \alpha) = \\ = v^2 \left(1 - b_0 Z\delta(\alpha) - b_0(Z^2 + \delta^2(\alpha)) \arctan \tfrac{\delta(\alpha)}{Z}\right) = \\ = C_0 = \text{const}, \end{gathered}$$

$$\Phi_1(v; Z; \alpha) = v^2(Z^2 + \delta^2(\alpha)) = C_1 = \text{const}.$$

Более того, как видно из вида предъявленных первых интегралов, притягивающее множество рассматриваемой системы (7), (8) может быть найдено из системы равенств $Z = \delta(\alpha) = 0$.

Модифицируем далее систему (7), (8), при наличии двух ключевых параметров $b_0, b_1 \geq 0$, введя внешнее силовое поле. Получим систему

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= -Z + b_0 Z^2 \delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\tilde{f}(\alpha), \\ Z' &= F(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z), \end{aligned} \tag{10}$$

$$\Psi(\alpha, Z) = -b_0 Z^2 \tilde{\delta}(\alpha) + b_1 F(\alpha)\delta(\alpha),\ \tilde{f}(\alpha) = \frac{\mu - \delta^2(\alpha)}{\tilde{\delta}(\alpha)},$$

$\mu = \text{const}$. Коэффициенты консервативной составляющей силового поля содержат параметр b_0, а неконсервативной составляющей внешнего поля — параметр b_1.

Только что мы ввели такое поле, добавив коэффициент $F(\alpha)$ в уравнение на Z' системы (7), (8), и убедились, что полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность будет при дополнительном условии:

$b_0 = 0$. Но мы расширим введение силового поля, положив $b_1 > 0$. Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения $TM^1\{Z;\alpha\}$ примет вид (9), (10). Как будет показано далее, только что было введено диссипативное силовое поле с помощью унимодулярного преобразования.

Если выполнено условие $F(\alpha) = \delta(\alpha)\tilde{\delta}(\alpha)$, то система (9), (10) обладает полным набором — двумя (одним гладким и одним, вообще говоря, трансцендентным) интегралами.

Литература

1. *Шамолин М.В.* Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твёрдого тела в неконсервативном поле сил / М. В. Шамолин // Итоги науки и техники. Сер. "Современная математика и её приложения. Тематические обзоры". — Т. 125. — М.: ВИНИТИ, 2013. — С. 5–254.

2. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трёхмерного многообразия / М. В. Шамолин // Доклады РАН. — 2017. — Т. 477. — № 2. — С. 168–172.

3. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырёхмерного многообразия / М. В. Шамолин // Доклады РАН. — 2018. — Т. 479. — № 3. — С. 270–276.

К ПРОДОЛЖЕНИЮ РОСТКОВ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА[1]

©2020 *Н. А. Шананин*

(Москва; *nashananin@inbox.ru*)

Статья содержит описание некоторых свойств ростков гладких решений квазилинейных уравнений вида

$$(P(u) =)u_t + \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(t,x,u,u_x)\; D^\alpha u = f(t,x,u,u_x), \qquad (1)$$

где $(t,x) = (t,x_1,\dots,x_n) \in \Omega \subseteq \mathcal{R}^{n+1}$, $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1,\dots,n$, $u_x = (u_{x_1},\dots,u_{x_1})$, $a_\alpha(t,x,\zeta) \in C^\infty(\Omega \times \mathcal{C}^{n+1})$ и $f_\alpha(t,x,\zeta) \in C^\infty(\Omega\times\mathcal{C}^{n+1})$. Операторам дифференцирования D_j поставим в соответствие вес 1, а оператору D_t – вес 2. Пусть $v(t,x) \in C^\infty(V)$, где $V \subset \Omega$. Тогда в обозначениях и терминах статьи [1] взвешенный главный символ на функции v имеет вид:

$$p_{v,2}(t,x;\tau,\xi) = i\tau + \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(t,x,v(t,x),v_x(t,x))\; \xi^\alpha,$$

где $\tau \in \mathcal{R}$ и $\xi \in \mathcal{R}^n$, и, поскольку минимальный вес оператора однократного дифференцирования равен 1, совпадает с пучком старших символов $\mathcal{H}_v(t,x;\tau,\xi,h)$, определённым на $v(x)$. Мы говорим, что росток $u_{(t^0,x^0)}$ в точке $x^0 \in \Omega$ удовлетворяет уравнению (1) и писать $(P(u) - f(u))_{(t^0,x^0)} \cong 0$, если для любой бесконечно дифференцируемой функции $u(t,x)$, представляющей росток, найдётся такая окрестность точки (t^0,x^0), в которой функция $u(t,x)$ является локальным решением уравнения. Мы говорим, что уравнение (1)

[1]Публикация была подготовлена по проекту № 2 в рамках договора пожертвования от 01 марта 2019 г. № 1154.