УДК 517, 531.01

Интегрируемые системы с диссипацией со многими степенями свободы*

Шамолин М.В.[1]

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова[1]

Аннотация: В работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательном расслоении к многомерному многообразию. При этом силовые поля обладают переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные.

Ключевые слова: динамическая система, переменная диссипация, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

Введение

В задачах динамики изучаются системы со многими степенями свободы с диссипацией (с пространством положений — многомерным многообразием). Их фазовыми пространствами становятся касательные расслоения к данным многообразиям. Например, изучение n-мерного обобщенного сферического маятника в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий [1,2]. В данном случае динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных (в смысле комплексного анализа) функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Выделим также класс задач о движении точки по многомерной поверхности, при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой всеобъемлющего пространства. В ряде случаев в системах с диссипацией также удается найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных функций.

В работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательном расслоении к многомерному многообразию (об аналогичных исследованиях на касательных расслоениях к многообразиям размерностей 2 и 3 см. [1,2]). При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные [3,4].

1. Уравнения геодезических при замене координат и их первые интегралы

Как известно, в случае n-мерного гладкого риманова многообразия M^n с координатами (α, β), $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$, и аффинной связностью $\Gamma^i_{jk}(x)$ уравнения геодезических линий на касательном расслоении $T_*M^n\{\dot\alpha, \dot\beta_1, \ldots, \dot\beta_{n-1}; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}$, $\alpha = x^1$, $\beta_1 = x^2$, …, $\beta_{n-1} = x^n$, $x = (x^1, \ldots, x^n)$, имеют следующий вид (дифференцирование берется по натуральному

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (Грант № 19-01-00016 «Динамические эффекты в процессах деформирования и течения тонких твёрдых тел»)

параметру):

$$\ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma^i_{jk}(x)\dot{x}^j\dot{x}^k = 0,\ i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Изучим структуру уравнений (1) при изменении координат на касательном расслоении T_*M^n. Рассмотрим замену координат касательного пространства, зависящую от точки x многообразия:

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} R^{ij}(x)z_j, \tag{2}$$

которую почти всюду можно обратить: $z_j = \sum_{i=1}^{n} T_{ji}(x)\dot{x}^i$, при этом $R^{ij}, T_{ji}, i, j = 1, \ldots, n,$ — функции от $x^1, \ldots, x^n$, а также $RT = E$, где $R = (R^{ij}),\ T = (T_{ji})$. Назовем также уравнения (2) новыми кинематическими соотношениями, т. е. соотношениями на касательном расслоении T_*M^n. Справедливы тождества:

$$\dot{z}_j = \sum_{i=1}^{n} \dot{T}_{ji}\dot{x}^i + \sum_{i=1}^{n} T_{ji}\ddot{x}^i,\ \dot{T}_{ji} = \sum_{k=1}^{n} T_{ji,k}\dot{x}^k, \tag{3}$$

где $T_{ji,k} = \partial T_{ji}/\partial x^k,\ j, i, k = 1, \ldots, n$. Подставляя в (3) уравнения (1), имеем:

$$\dot{z}_i = \sum_{j,k=1}^{n} T_{ij,k}\dot{x}^j\dot{x}^k - \sum_{j,p,q=1}^{n} T_{ij}\Gamma^j_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q, \tag{4}$$

при этом в последней системе вместо $\dot{x}^i,\ i = 1, \ldots, n$, надо подставить формулы (2).

Другими словами, равенство (4) можно переписать в виде

$$\dot{z}_i + \sum_{j,k=1}^{n} Q_{ijk}\dot{x}^j\dot{x}^k|_{(2)} = 0,\ Q_{ijk}(x) = \sum_{s=1}^{n} T_{is}(x)\Gamma^s_{jk}(x) - T_{ij,k}(x).$$

Непосредственно из формул (4) следует следующее утверждение.

Предложение 1. *Система (1) в той области, где* $\det R(x) \neq 0$, *эквивалентна составной системе (2), (4).*

Таким образом, результат перехода от уравнений геодезических (1) к эквивалентной системе уравнений (2), (4) зависит как от замены переменных (2) касательного пространства (т. е. вводимых новых кинематических соотношений), так и от аффинной связности $\Gamma^i_{jk}(x)$.

2. Важный частный случай

Рассмотрим далее достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\begin{gathered}\dot{\alpha} = -z_n,\ \dot{\beta}_1 = z_{n-1}f_1(\alpha),\ \dot{\beta}_2 = z_{n-2}f_2(\alpha)g_1(\beta_1),\ \dot{\beta}_3 = z_{n-3}f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h_1(\beta_2),\ \ldots,\\ \dot{\beta}_{n-1} = z_1 f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1(\beta_{n-2}),\end{gathered} \tag{5}$$

где $f_k(\alpha)$, $k = 1, \ldots, n-1$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \ldots, n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \ldots, n-3$, $\ldots$, $i_1(\beta_{n-2})$ — гладкие на своей области определения функции. Такие координаты $z_1, \ldots, z_n$ в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются следующие классы уравнений геодезических [3, 5, 6] (в частности, на многомерных поверхностях вращения) с $n(n-1)$ ненулевыми коэффициентами связности:

$$\begin{gathered}
\ddot{\alpha}+\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2+\ldots+\Gamma^{\alpha}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2=0,\\
\ddot{\beta}_1+2\Gamma^{1}_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1+\Gamma^{1}_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2+\ldots+\Gamma^{1}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2=0,\\
\ddot{\beta}_2+2\Gamma^{2}_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2+2\Gamma^{2}_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2+\Gamma^{2}_{33}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2+\ldots+\Gamma^{2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2=0,\\
\ddot{\beta}_3+2\Gamma^{3}_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3+2\Gamma^{3}_{13}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3+2\Gamma^{3}_{23}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3+\\
+\Gamma^{3}_{44}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_4^2+\ldots+\Gamma^{3}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2=0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\ddot{\beta}_{n-2}+2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-2}+2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-2}+\ldots\\
\ldots+2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-3}\dot{\beta}_{n-2}+\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2=0,\\
\ddot{\beta}_{n-1}+2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-1}+2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-1}+\ldots\\
\ldots+2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-2}\dot{\beta}_{n-1}=0,
\end{gathered}\tag{6}$$

т. е. остальные коэффициенты связности равны нулю.

В случае (5) уравнения (4) примут вид

$$\begin{gathered}
\dot{z}_1=\left[2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)+Df_{n-1}(\alpha)\right]z_1z_n-\left[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)+Dg_{n-2}(\beta_1)\right]f_1(\alpha)z_1z_{n-1}-\\
-\left[2\Gamma^{n-1}_{2,n-1}(\alpha,\beta)+Dh_{n-3}(\beta_2)\right]f_2(\alpha)g_1(\beta_1)z_1z_{n-2}-\ldots\\
\ldots-\left[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)+Di_1(\beta_{n-2})\right]f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})z_1z_2,\\
\dot{z}_2=\left[2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta)+Df_{n-2}(\alpha)\right]z_2z_n-\left[2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta)+Dg_{n-3}(\beta_1)\right]f_1(\alpha)z_2z_{n-1}-\ldots\\
\ldots-\left[2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta)+Dr_1(\beta_{n-3})\right]f_{n-3}(\alpha)g_{n-4}(\beta_1)h_{n-5}(\beta_2)\ldots s_1(\beta_{n-4})z_2z_3-\\
-\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)}\frac{g_{n-2}^2(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)}\frac{h_{n-3}^2(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)}\ldots\frac{r_2^2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})}i_1^2(\beta_{n-2})z_1^2,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\dot{z}_{n-1}=\left[2\Gamma^{1}_{\alpha 1}(\alpha,\beta)+Df_1(\alpha)\right]z_{n-1}z_n-\Gamma^{1}_{22}(\alpha,\beta)\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)z_{n-2}^2-\ldots\\
\ldots-\Gamma^{1}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})z_1^2,\\
\dot{z}_n=\Gamma^{\alpha}_{11}f_1^2(\alpha)z_{n-1}^2+\Gamma^{\alpha}_{22}f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)z_2^2+\ldots\\
\ldots+\Gamma^{\alpha}_{n-1,n-1}f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})z_1^2,
\end{gathered}\tag{7}$$

здесь $DQ(q)=d\ln|Q(q)|/dq$, и уравнения (6) почти всюду эквивалентны составной системе (5), (7) на касательном расслоении $T_*M^n\{z_n,\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$.

Для полного интегрирования системы (5), (7) необходимо знать, вообще говоря, $(2n-1)$ независимых первых интегралов. В нашем случае их нужно знать меньше, что будет показано ниже.

Предложение 2. *Если всюду на своей области определения справедлива система* $\dfrac{n(n-1)}{2}$ *равенств*

$$
\begin{gathered}
2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)+Df_1(\alpha)+\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)f_1^2(\alpha)\equiv 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)+Df_{n-1}(\alpha)+\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\dots i_1^2(\beta_{n-2})\equiv 0,\\
\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+Dg_1(\beta_1)\right]f_1^2(\alpha)+\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\equiv 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\left[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)+Dg_{n-2}(\beta_1)\right]f_1^2(\alpha)+\\
+\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\dots i_1^2(\beta_{n-2})\equiv 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\left[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)+Di_1(\beta_{n-2})\right]f_{n-2}^2(\alpha)g_{n-3}^2(\beta_1)h_{n-4}^2(\beta_2)\dots r_1^2(\beta_{n-3})+\\
+\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\dots i_1^2(\beta_{n-2})\equiv 0,
\end{gathered}
\tag{8}
$$

то система (5), (7) имеет аналитический первый интеграл вида

$$
\Phi_1(z_n,\dots,z_1)=z_1^2+\dots+z_n^2=C_1^2=const. \tag{9}
$$

На первый взгляд вопрос наличия первого интеграла достаточно простого вида (9) не «заслуживает» решения такой достаточно сложной системы квазилинейных уравнений (8) (которая содержит, вообще говоря, уравнения в частных производных). Можно даже доказывать отдельную теорему существования решения $f_k(\alpha)$, $k=1,\dots,n-1$, $g_l(\beta_1)$, $l=1,\dots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m=1,\dots,n-3$, $\dots$, $i_1(\beta_{n-2})$ системы (8) квазилинейных уравнений для наличия аналитического первого интеграла (9) для системы (5), (7) уравнений геодезических (6). Но в дальнейшем при изучении динамических систем с диссипацией полная группа условий (8) нам не потребуется. Тем не менее, в дальнейшем будем предполагать в уравнениях (5) выполнение условий

$$
f_1(\alpha)=\dots=f_{n-1}(\alpha)=f(\alpha), \tag{10}
$$

при этом функции $g_l(\beta_1)$, $l=1,\dots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m=1,\dots,n-3$, $\dots$, $i_1(\beta_{n-2})$ должны удовлетворять преобразованным уравнениям из (8):

$$
\begin{gathered}
2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+Dg_1(\beta_1)+\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)g_1^2(\beta_1)\equiv 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)+Dg_{n-2}(\beta_1)+\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\dots i_1^2(\beta_{n-2})\equiv 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)+Di_1(\beta_{n-2})g_{n-3}^2(\beta_1)h_{n-4}^2(\beta_2)\dots r_1^2(\beta_{n-3})+\\
+\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\dots i_1^2(\beta_{n-2})\equiv 0.
\end{gathered}
\tag{11}
$$

Таким образом, функции $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \ldots, n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \ldots, n-3$, $\ldots$, $i_1(\beta_{n-2})$ зависят от коэффициентов связности через систему (11), а ограничения на функцию $f(\alpha)$ будут даны ниже.

Предложение 3. *Если выполнены свойства (10), (11) и при этом справедливы равенства*

$$\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha, \beta) = \ldots = \Gamma^{n-1}_{\alpha, n-1}(\alpha, \beta) = \Gamma_1(\alpha), \tag{12}$$

то система (5), (7) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_2(z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2}\, \Phi_0(\alpha) = C_2 = const, \tag{13}$$

$$\Phi_0(\alpha) = f(\alpha) \exp\left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db \right\}.$$

Предложение 4. *Если выполнены условия предложения 3, а также*

$$g_1(\beta_1) = \ldots = g_{n-2}(\beta_1) = g(\beta_1), \tag{14}$$

и при этом справедливы равенства

$$\Gamma^2_{12}(\alpha, \beta) = \ldots = \Gamma^{n-1}_{1, n-1}(\alpha, \beta) = \Gamma_2(\beta_1), \tag{15}$$

то система (5), (7) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_3(z_{n-2}, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1) = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2}\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1) = C_3 = const, \tag{16}$$

$$\Psi_1(\beta_1) = g(\beta_1) \exp\left\{ 2 \int_{\beta_{10}}^{\beta_1} \Gamma_2(b) db \right\}.$$

Далее применяем по индукции вышеизложенные рассуждения и приходим к следующему утверждению.

Предложение 5. *Если выполнены условия предложений 3, 4, $\ldots$, и при этом справедливо равенство*

$$\Gamma^{n-1}_{n-2, n-1}(\alpha, \beta) = \Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}), \tag{17}$$

то система (5), (7) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_n(z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = z_1 \Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\ldots\Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) = C_n = const, \tag{18}$$

$$\Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) = i(\beta_{n-2}) \exp\left\{ 2 \int_{\beta_{20}}^{\beta_2} \Gamma_3(b) db \right\}, \ i(\beta_{n-2}) = i_1(\beta_{n-2}).$$

Предложение 6. *Если выполнены условия предложений 3, 4, $\ldots$, 5, то система (5), (7) имеет первый интеграл следующего вида:*

$$\Phi_{n+1}(z_{n-2}, \ldots, z_1; \alpha, \beta) = \beta_{n-1} \pm \int_{\beta_{n-20}}^{\beta_{n-2}} \frac{C_n i(b)}{\sqrt{C_{n-1}^2 \Phi_{n-2}^2(b) - C_n^2}}\, db = C_{n+1} = const. \tag{19}$$

Набор первых интегралов (9), (13), (16), $\ldots$, (18), (19) является полным набором независимых первых интегралов системы (5), (7) при вышеперечисленных условиях (то, что полный набор состоит из $(n+1)$, а не из $(2n-1)$ первых интегралов, будет показано ниже).

Вопрос о гладкости первого интеграла (19) не так прост. В принципе, он может выражаться через конечную комбинацию элементарных функций и даже являться функцией рациональной. Но поскольку в рассматриваемой динамической системе отсутствуют асимптотические предельные множества, то функция (19) не может быть трансцендентной с точки зрения комплексного анализа. Действительно, у нее отсутствуют существенно особые точки. Но с точки зрения теории элементарных функций она может быть трансцендентной.

3. Уравнения движения в потенциальном силовом поле и их первые интегралы

Несколько модифицируем систему (5), (7) при условиях (10)–(12), (14), (15), ..., (17), получив систему консервативную. А именно, наличие силового поля характеризует достаточно гладкий коэффициент $F(\alpha)$ во втором уравнении системы (20). Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^n\{z_n,\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$ примет вид

$$
\begin{gathered}
\dot\alpha = -z_n,\\
\dot z_n = F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)z^2_{n-1} + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)g^2(\beta_1)z_2^2 + \ldots\\
\ldots + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2})z_1^2,\\
\dot z_{n-1} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right]z_{n-1}z_n - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)f(\alpha)g^2(\beta_1)z^2_{n-2} - \ldots\\
\ldots - \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2})z_1^2,\ \ldots,\\
\dot z_2 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right]z_2z_n - \left[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)\right]f(\alpha)z_2z_{n-1} - \ldots\\
\ldots - \left[2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3}) + Dr(\beta_{n-3})\right]f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots s(\beta_{n-4})z_2z_3 -\\
-\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots r(\beta_{n-3})i^2(\beta_{n-2})z_1^2,\\
\dot z_1 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right]z_1z_n - \left[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)\right]f_1(\alpha)z_1z_{n-1} -\\
-\left[2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2)\right]f(\alpha)g(\beta_1)z_1z_{n-2} - \ldots\\
\ldots - \left[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di(\beta_{n-2})\right]f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots r(\beta_{n-3})z_1z_2,\\
\dot\beta_1 = z_{n-1}f(\alpha),\ \dot\beta_2 = z_{n-2}f(\alpha)g(\beta_1),\ \dot\beta_3 = z_{n-3}f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2),\ \ldots,\\
\dot\beta_{n-1} = z_1f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots i(\beta_{n-2}),
\end{gathered}
\tag{20}
$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$
\begin{gathered}
\ddot\alpha + F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \ldots + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_{n-1} = 0,\\
\ddot\beta_1 + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \ldots + \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_{n-1} = 0,\\
\ddot\beta_2 + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 + \ldots + \Gamma^2_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_{n-1} = 0,\\
\ddot\beta_3 + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_3 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_3 + 2\Gamma_3(\beta_2)\dot\beta_2\dot\beta_3 +\\
+\Gamma^3_{44}(\alpha,\beta)\dot\beta_4^2 + \ldots + \Gamma^3_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_{n-1} = 0,\ \ldots,\\
\ddot\beta_{n-2} + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_{n-2} + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_{n-2} + \ldots\\
\ldots + 2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3})\dot\beta_{n-3}\dot\beta_{n-2} + \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_{n-1} = 0,\\
\ddot\beta_{n-1} + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_{n-1} + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_{n-1} + \ldots + 2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2})\dot\beta_{n-2}\dot\beta_{n-1} = 0.
\end{gathered}
$$

Предложение 7. *Если выполнены условия предложения 2, то система (20) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:*

$$
\Phi_1(z_n,\ldots,z_1;\alpha) = z_1^2 + \ldots + z_n^2 + F_1(\alpha) = C_1 = const,\ F_1(\alpha) = 2\int_{\alpha_0}^{\alpha} F(b)db. \tag{21}
$$

Предложение 8. *Если выполнены условия предложений 3, 4, ..., 5, то система (20) имеет гладкие первые интегралы вида (13), (16), ..., (18).*

Предложение 9. *Если выполнены условия предложения 6, то система (20) имеет первый интеграл вида (19).*

Набор первых интегралов (21), (13), (16), ..., (18), (19) является полным набором независимых первых интегралов системы (20) при вышеперечисленных условиях (то, что полный набор состоит из $(n+1)$, а не из $(2n-1)$ первых интегралов, будет показано ниже).

Вопрос о гладкости первого интеграла (19) по-прежнему не так прост. Поскольку в рассматриваемой динамической системе даже при наличии гладкого консервативного силового поля отсутствуют асимптотические предельные множества, то функция (19) не может быть трансцендентной с точки зрения комплексного анализа (у нее отсутствуют существенно особые точки). Но с точки зрения теории элементарных функций она может быть трансцендентной (см. также [7, 8]).

4. Уравнения движения в силовом поле с диссипацией и их первые интегралы

Теперь усложним систему (20) и получим систему с диссипацией. А именно, наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует достаточно гладкий коэффициент $b\delta(\alpha)$ в первом уравнении следующей системы:

$$\begin{gathered}
\dot\alpha = -z_n + b\delta(\alpha),\\
\dot z_n = F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)z_{n-1}^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)g^2(\beta_1)z_2^2 + \ldots\\
\ldots + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2})z_1^2,\\
\dot z_{n-1} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right] z_{n-1}z_n - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)f(\alpha)g^2(\beta_1)z_{n-2}^2 - \ldots\\
\ldots - \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2})z_1^2,\ \ldots,\\
\dot z_2 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right] z_2 z_n - \left[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)\right] f(\alpha)z_2 z_{n-1} - \ldots\\
\ldots - \left[2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3}) + Dr(\beta_{n-3})\right] f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots s(\beta_{n-4})z_2 z_3 -\\
-\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots r(\beta_{n-3})i^2(\beta_{n-2})z_1^2,\\
\dot z_1 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right] z_1 z_n - \left[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)\right] f_1(\alpha)z_1 z_{n-1} -\\
- \left[2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2)\right] f(\alpha)g(\beta_1)z_1 z_{n-2} - \ldots\\
\ldots - \left[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di(\beta_{n-2})\right] f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots r(\beta_{n-3})z_1 z_2,\\
\dot\beta_1 = z_{n-1}f(\alpha),\ \dot\beta_2 = z_{n-2}f(\alpha)g(\beta_1),\ \dot\beta_3 = z_{n-3}f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2),\ \ldots\\
\dot\beta_{n-1} = z_1 f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots i(\beta_{n-2}),
\end{gathered}\tag{22}$$

которая почти всюду эквивалентна

$$\ddot{\alpha} - b\dot{\alpha}\delta'(\alpha) + F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + \ldots + \Gamma^{\alpha}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0,$$

$$\ddot{\beta}_1 - b\dot{\beta}_1\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + \ldots + \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0,$$

$$\ddot{\beta}_2 - b\dot{\beta}_2\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 +$$

$$+\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 + \ldots + \Gamma^2_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0,$$

$$\ddot{\beta}_3 - b\dot{\beta}_3\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_3(\beta_2)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 +$$

$$+\Gamma^3_{44}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_4^2 + \ldots + \Gamma^3_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \ \ldots,$$

$$\ddot{\beta}_{n-2} - b\dot{\beta}_{n-2}\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-2} + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-2} + \ldots$$

$$\ldots + 2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3})\dot{\beta}_{n-3}\dot{\beta}_{n-2} + \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0,$$

$$\ddot{\beta}_{n-1} - b\dot{\beta}_{n-1}\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-1} + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-1} + \ldots$$

$$\ldots + 2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2})\dot{\beta}_{n-2}\dot{\beta}_{n-1} = 0,$$

здесь $W(\alpha) = 2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)$.

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы (22) порядка $2n$ при выполнении равенств

$$\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1) \equiv \ldots \equiv \Gamma^{\alpha}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\ldots = \Gamma_n(\alpha). \tag{23}$$

Введем также (по аналогии с (11)) ограничение и на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять преобразованному первому равенству из (8):

$$2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha) \equiv 0. \tag{24}$$

Для полного интегрирования системы (22) необходимо знать, вообще говоря, $2n-1$ независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных

$$w_n = z_n, \ w_{n-1} = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2}, \ w_{n-2} = \frac{z_2}{z_1},$$
$$w_{n-3} = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \ \ldots, \ w_1 = \frac{z_{n-1}}{\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_2^{n-2}}},$$

система (22) распадается следующим образом:

$$\begin{gathered}\dot{\alpha} = -w_n + b\delta(\alpha), \ \dot{w}_n = F(\alpha) + \Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha)w_{n-1}^2, \\ \dot{w}_{n-1} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]w_{n-1}w_n,\end{gathered} \tag{25}$$

$$\begin{gathered}\dot{w}_s = \pm w_{n-1}\sqrt{1+w_s^2}f(\alpha)\ldots\left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + Dj(\beta_s)\right], \\ \dot{\beta}_s = \pm\frac{w_s w_{n-1}}{\sqrt{1+w_s^2}}f(\alpha)\ldots, \ s = 1,\ldots,n-2,\end{gathered} \tag{26}$$

$$\dot{\beta}_{n-1} = \pm\frac{w_{n-1}}{\sqrt{1+w_{n-2}^2}}f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots i(\beta_{n-2}), \tag{27}$$

где в системе (26) символом «...» показаны одинаковые члены, а функция $j(\beta_s)$ — одна из функций $g, h, \ldots$, зависящая от соответствующего угла β_s.

Видно, что для полной интегрируемости системы (25)–(27) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (25), по одному — для систем (26) (меняя в них независимые переменные; их $(n-2)$ штуки), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (27) (т. е. всего $(n+1)$).

Теорема 1. *Пусть для некоторых $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$ выполняются равенства*

$$\Gamma_n(\alpha) f^2(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\delta(\alpha)|, \ F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{\delta^2(\alpha)}{2}. \tag{28}$$

Тогда система (22) при выполнении условий (23), (24) обладает полным набором $(n+1)$ независимых, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.

Для начала сопоставим системе третьего порядка (25) неавтономную систему второго порядка

$$\frac{dw_n}{d\alpha} = \frac{F(\alpha) + \Gamma_n(\alpha) f^2(\alpha) w_{n-1}^2}{-w_n + b\delta(\alpha)}, \ \frac{dw_{n-1}}{d\alpha} = \frac{[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]\, w_{n-1} w_n}{-w_n + b\delta(\alpha)}. \tag{29}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам $w_n = u_n \delta(\alpha), \ w_{n-1} = u_{n-1}\delta(\alpha)$, приводим систему (29) к следующему виду:

$$\begin{gathered} \delta(\alpha) \frac{du_n}{d\alpha} = \frac{F_3(\alpha) + \Gamma_n(\alpha) f^2(\alpha) \delta(\alpha) u_{n-1}^2 + \delta'(\alpha) u_n^2 - b\delta'(\alpha) u_n}{-u_n + b}, \\ \delta(\alpha) \frac{du_{n-1}}{d\alpha} = \frac{-\Gamma_n(\alpha) f^2(\alpha) \delta(\alpha) u_{n-1} u_n + \delta'(\alpha) u_{n-1} u_n - b\delta'(\alpha) u_n}{-u_n + b}, \ F_3(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{\delta(\alpha)}. \end{gathered} \tag{30}$$

А после выполнения условий (28) система (30) приводится к уравнению первого порядка

$$\frac{du_n}{du_{n-1}} = \frac{\lambda + \kappa u_{n-1}^2 + u_n^2 - bu_n}{(1-\kappa) u_{n-1} u_n - bu_n}. \tag{31}$$

Уравнение (31) имеет вид уравнения Абеля. В частности, при $\kappa = -1$ оно имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_n^2 + u_{n-1}^2 - bu_n + \lambda}{u_{n-1}} = C_1 = \text{const}, \tag{32}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_n, w_{n-1}; \alpha) = G_1\left(\frac{w_n}{\delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\delta(\alpha)}\right) = \frac{w_n^2 + w_{n-1}^2 - bw_n \delta(\alpha) + \lambda \delta^2(\alpha)}{w_{n-1}\delta(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \tag{33}$$

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (25) при $\kappa = -1$. Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (32) при $u_{n-1} \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_n - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(u_{n-1} - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - \lambda. \tag{34}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4\lambda \geq 0, \tag{35}$$

и фазовое пространство системы (21) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (34).

Таким образом, в силу соотношения (32) первое уравнение системы (30) при $\kappa = -1$ примет вид

$$\frac{\delta(\alpha)}{\delta'(\alpha)}\frac{du_n}{d\alpha} = \frac{2(\lambda - bu_n + u_4^2) - C_1U_1(C_1, u_n)}{-u_n + b},\ U_1(C_1, u_n) = \frac{1}{2}\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_n^2 - bu_n + \lambda)}\},$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (35).

Тогда дополнительный первый интеграл для системы (25) имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_n, w_{n-1}; \alpha) = G_2\left(\delta(\alpha), \frac{w_n}{\delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\delta(\alpha)}\right) = C_2 = \mathrm{const} \qquad (36)$$

и при $\kappa = -1$ он найдется из квадратуры

$$\ln|g(\alpha)| = \int \frac{(b - u_n)du_n}{2(\lambda - bu_n + u_n^2) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_n^2 - bu_n + \lambda)}\}/2},\ u_n = \frac{w_n}{\delta(\alpha)}.$$

При этом после взятия этого интеграла вместо C_1 можно подставить левую часть равенства (33). Правая часть данного равенства выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая — в зависимости от функции $\delta(\alpha)$. Поэтому выражение первых интегралов (33), (36) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\delta(\alpha)$.

Первые интегралы для систем (26) будут иметь вид

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \mathrm{const},\ s = 1, \ldots, n-2, \qquad (37)$$

о функциях $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1, \ldots, n-2$, см. (16), ..., (18). А дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (27), находится по аналогии с (19):

$$\Theta_{n+1}(w_2, w_1; \alpha, \beta) = \beta_{n-1} \pm \int_{\beta_{n-20}}^{\beta_n-2} \frac{C_n i(b)}{\sqrt{C_{n-1}^2\Psi_{n-2}^2(b) - C_n^2}}\,db = C_{n+1} = \mathrm{const},$$

при этом после взятия этого интеграла вместо постоянных C_{n-1}, C_n можно подставить соответствующие левые части равенства (37).

5. Замечания о структуре первых интегралов систем с диссипацией

Если α — периодическая координата периода 2π, то система (25) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним [1, 2, 8, 9]. При этом при $b = 0$ она превращается в систему консервативную, которая обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (21), (13). В силу (28)

$$\Phi_1(z_n, \ldots, z_1; \alpha) = z_1^2 + \ldots + z_n^2 + 2\int_{\alpha_0}^{\alpha} F(b)db \cong w_n^2 + w_{n-1}^2 + \lambda\delta^2(\alpha), \qquad (38)$$

где «$\cong$» означает равенство с точностью до аддитивной постоянной. При этом, в силу (24) и (28)

$$\Phi_2(z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2}\ f(\alpha)\exp\left\{2\int_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\} \cong w_{n-1}\delta(\alpha) = \qquad (39)$$

$$= C_2 = \text{const},$$

где «$\cong$» означает равенство с точностью уже до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (38) и (39) (или (21) и (13)) также является первым интегралом системы (25) при $b = 0$. Но при $b \neq 0$ каждая из функций

$$w_n^2 + w_{n-1}^2 - bw_n\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha) \tag{40}$$

и (39) по отдельности не является первым интегралом системы (25). Однако отношение функций (40), (39) является первым интегралом системы (25) (при $\kappa = -1$) при любом b.

Вообще же, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств.

Литература

1. Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. Москва: Изд-во “Экзамен”, 2007. 352 с.

2. Шамолин М.В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т. 14, Вып. 3. С. 3–237.

3. Козлов В.В. Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // Прикл. матем. и механ. 2015. Т. 79, № 3. С. 307–316.

4. Трофимов В.В., Шамолин М.В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундаментальная и прикладная математика. 2010. Т. 16, Вып. 4. С. 3–229.

5. Шамолин М.В. Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил // Итоги науки и техники. Сер. «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». 2013. Т. 125. С. 5–254.

6. Шамолин М.В. Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения // Фундаментальная и прикладная математика. 2015. Т. 20, Вып. 4. С. 3–231.

7. Шамолин М.В. Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // Доклады РАН. 2015. Т. 464, №. 6. С. 688–692.

8. Шамолин М.В. Многомерный маятник в неконсервативном силовом поле при наличии линейного демпфирования // Доклады РАН. 2016. Т. 470, №. 3. С. 288–292.

9. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемости систем с диссипацией на касательных расслоениях к двумерной и трехмерной сферам // Доклады РАН. 2016. Т. 471, №. 5. С. 547–551.

MSC2010 37C, 37J, 70F

Integrable systems with dissipation and finitely many degrees of freedom

M.V. Shamolin[1]

Lomonosov Moscow State University[1]

Abstract: We establish the integrability for some classes of dynamic systems on the tangent bundles of multidimensional manifolds. We consider the case where the force fields possess variable dissipation. An example of a four-dimensional manifold is discussed in detail.

Keywords: dynamical system, variable dissipation, integrability, transcendental first integral.

References

1. Shamolin M.V. Metody analiza dinamicheskikh sistem s peremennoy dissipatsiey v dinamike tverdogo tela [Methods of analysis of variable dissipation dynamical systems in dynamics of a rigid body]. Moscow, Publishing of "Ekzamen", 2007. 352 p.

2. Shamolin M.V. Dinamicheskie sistemy s peremennoy dissipatsiey: podkhody, metody, prilozheniya [Dynamical systems with variable dissipation: approaches, methods, and applications]. Fundamentalnaya i prikladnaya matematika [Fundamental and applied mathematics]. 2008. V. 14, No. 3. P. 3–237.

3. Kozlov V.V. Ratsional'nie integraly kvaziodorodnykh dynamicheskikh sistem [Rational integrals of quasi-homogeneous dynamical systems]. Prokladnaya matematika i mekhanika [Journal of Applied Mathematics and Mechanics]. 2015. V. 79, No. 3. P. 307–316.

4. Trofimov V.V., Shamolin M.V. Geometricheskie i dinamicheskie invarianty integriruemykh gamil'tonovykh i dissipativnykh sistem [Geometric and dynamical invariants of integrable Hamiltonian and dissipative systems]. Fundamentalnaya i prikladnaya matematika [Fundamental and applied mathematics]. 2010. V. 16, No. 4. P. 3–229.

5. Shamolin M.V. Mnogoobrazie sluchaev integriruemosti v dinamike malomernogo i mnogomernogo tverdogo tela v nekonservativnom pole sil [Variety of integrable cases in dynamics of low- and multi-dimensional rigid bodies in nonconservative force fields]. Itogi nauki i tekhniki. Ser. "Sovremennaya matematika i ee prilozheniya. Tematicheskie obzory" [Contemporary mathematics and its applications. Thematic surveys]. 2013. V. 125. P. 5–254.

6. Shamolin M.V. Integriruemye sistemy s peremennoy dissipatsiey na kasatel'nom rassloenii k mnogomernoy sfere i prilozheniya [Integrable variable dissipation systems on the tangent bundle of a multi-dimensional sphere and some applications]. Fundamentalnaya i prikladnaya matematika [Fundamental and applied mathematics]. 2015. V. 20, No. 4. P. 3–231.

7. Shamolin M.V. Polniy spisok pervikh integralov uravneniy dvizheniya mnogomernogo tverdogo tela v nekonservativnom pole pri nalichii lineynogo dempfirovaniya [Complete list of the first integrals of dynamic equations of a multidimensional solid in a nonconservative

field under the assumption of linear damping]. Doklady RAN [Doklady physics]. 2015. V. 464, No. 6. P. 688–692.

8. Shamolin M.V. Mnogomerniy mayatnik v nekonservativnom silovom pole pri nalichii lineynogo dempfirovaniya [A multidimensional pendulum in a nonconservative force field under the presence of linear damping]. Doklady RAN [Doklady physics]. 2016. V. 470, No. 3. P. 288–292.

9. Shamolin M.V. Novye slushai integriruemosti sistem s dissipatsyey na kasatel'nykh rassloeniyakh k dvumernoy i trekhmernoy sferam [New cases of integrable systems with dissipation on tangent bundles of two- and three-dimensional spheres]. Doklady RAN [Doklady physics]. 2016. V. 471, No. 5. P. 547–551.