ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Декабрь 2019 **Выпуск 101. С. 131-145**

М. В. Шамолин

Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова
Москва, Россия
shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ СЕДЬМОГО И ДЕВЯТОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ

Установлена интегрируемость некоторых классов однородных по части переменных динамических систем нечетного (седьмого и девятого) порядка, в которых выделяется система на касательном расслоении к гладким многообразиям. Библиография: 13 назв.

Данная статья продолжает серию работ автора по данной тематике (см., например, [**1, 2, 3**]). Здесь установлена интегрируемость некоторых классов однородных по части переменных динамических систем нечетного (седьмого и девятого) порядка, в которых выделяется система на касательном расслоении к трехмерным и четырехмерным многообразиям. При этом силовые поля обладают диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

1. Системы седьмого порядка при отсутствии внешнего силового поля

Пусть v, α, $\beta=(\beta_1,\beta_2)$, $z=(z_1,z_2,z_3)$ — фазовые переменные в системе, правые части которой — однородные полиномы степени 2 по переменным v, z с коэффициентами, зависящими от α, β. Выбирая в качестве нового времени переменную q ($dq=vdt$, $d/dq=\langle'\rangle$, $v\neq 0$), рассмотрим систему седьмого порядка

$$v'=\Psi(\alpha,Z)v, \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha'=-Z_3+b(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2)\delta(\alpha),\\
&Z_3'=\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)f_1^2(\alpha)Z_2^2+\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)Z_1^2-Z_3\Psi(\alpha,Z),\\
&Z_2'=\Big[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\Big]Z_2Z_3-\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g^2(\beta_1)Z_1^2-Z_2\Psi(\alpha,Z),\\
&Z_1'=\Big[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\Big]Z_1Z_3-\Big[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\Big]f_1(\alpha)Z_1Z_2-Z_1\Psi(\alpha,Z),\\
&\beta_1'=Z_2f_1(\alpha),\\
&\beta_2'=-Z_1f_2(\alpha)g(\beta_1)
\end{aligned} \tag{1.2}$$

как систему при отсутствии внешнего поля сил. Здесь $\Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\widetilde{\delta}(\alpha)$, $\widetilde{\delta}(\alpha) = \dfrac{d\delta(\alpha)}{d\alpha}$, $Z = (Z_1, Z_2, Z_3)$, $z_k = Z_k v$, $k = 1, 2, 3$, $b \geqslant 0$, $\delta(\alpha)$, $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $g(\beta_1)$ — гладкие функции. При этом уравнение (1.1) отделяется, что дает возможность рассматривать уравнения (1.2) в качестве независимой системы (с тремя степенями свободы) на шестимерном многообразии $N^6\{Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\} = TM^3\{Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ (касательном расслоении гладкого трехмерного многообразия $M^3\{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$ (см. также [**4, 5**])).

Рассмотрим структуру системы (1.2). Она соответствует следующим уравнениям геодезических линий на касательном расслоении $TM^3\{\dot\alpha, \dot\beta_1, \dot\beta_2; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ многообразия $M^3\{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$ [**4**] (в частности, сферы или поверхностей вращения — с шестью или девятью ненулевыми коэффициентами связности):

$$\begin{aligned} &\ddot\alpha + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha, \beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha, \beta)\dot\beta_2^2 = 0, \\ &\ddot\beta_1 + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha, \beta)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha, \beta)\dot\beta_2^2 = 0, \\ &\ddot\beta_2 + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha, \beta)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha, \beta)\dot\beta_1\dot\beta_2 = 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Действительно, выбрав новые координаты Z_1, Z_2, Z_3 в касательном пространстве в виде

$$\begin{aligned} &\dot\alpha = -Z_3, \\ &\dot\beta_1 = Z_2 f_1(\alpha), \\ &\dot\beta_2 = Z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1), \end{aligned} \tag{1.4}$$

мы получаем соотношения на них в виде (ср. с системой (1.2))

$$\begin{aligned} &Z_1' = \left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha, \beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_1 Z_3 - \left[2\Gamma^2_{12}(\alpha, \beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1(\alpha) Z_1 Z_2, \\ &Z_2' = \left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha, \beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_2 Z_3 - \Gamma^1_{22}(\alpha, \beta)\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2(\beta_1) Z_1^2, \\ &Z_3' = \Gamma^\alpha_{11} f_1^2(\alpha) Z_2^2 + \Gamma^\alpha_{22} f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1) Z_1^2, \end{aligned} \tag{1.5}$$

при этом уравнения (1.3) почти всюду эквивалентны совокупности (1.4), (1.5), которая, прежде всего, присутствует в системе (1.2).

Далее, в системе (1.2) также присутствуют коэффициенты при параметре $b \geqslant 0$. Но они не нарушают консервативности, поскольку система (1.1), (1.2) обладает полным набором (пятью) гладких первых интегралов (то, что полный набор состоит не из шести, а из пяти первых интегралов, будет показано ниже).

Предложение 1.1. *Если всюду на своей области определения справедлива система равенств*

$$\begin{aligned} &2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha, \beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha, \beta) f_1^2(\alpha) \equiv 0, \\ &2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha, \beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha, \beta) f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1) \equiv 0, \\ &\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha, \beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1^2(\alpha) + \Gamma^1_{22}(\alpha, \beta) f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1) \equiv 0, \end{aligned} \tag{1.6}$$

то система (1.1), (1.2) *имеет аналитический первый интеграл вида*

$$\Phi_1(v; Z_3, Z_2, Z_1) = v^2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) = C_1^2 = \mathrm{const}\,. \tag{1.7}$$

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (1.7) в силу системы (1.1), (1.2) дает

$$2v^2\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha, \beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha, \beta) f_1^2(\alpha)\right] Z_2^2 Z_3$$

$$+ 2v^2\Big[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Big]Z_1^2 Z_3$$

$$+ 2v^2\Big[\Big[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\Big]f_1^2(\alpha) + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Big]Z_1^2 Z_2 \equiv 0,$$

поскольку выполнены свойства (1.6). □

Можно доказать отдельную теорему существования решения $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $g(\beta_1)$ системы (1.6) для условий наличия аналитического первого интеграла (1.7) для системы (1.4), (1.5) уравнений геодезических (1.3). Но, как будет показано ниже, данные рассуждения справедливы или для систем при отсутствии силового поля, или для систем при наличии потенциального силового поля. Но для систем с диссипацией условия (1.6) приобретут несколько иной смысл.

Тем не менее, в дальнейшем будем предполагать в уравнениях (1.4) выполнение условий

$$f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = f(\alpha), \tag{1.8}$$

при этом функция $g(\beta_1)$ должна удовлетворять преобразованному третьему равенству из (1.6):

$$2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1} + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1) \equiv 0. \tag{1.9}$$

Таким образом, функцию $g(\beta_1)$ будем брать в зависимости от коэффициентов связности, а вот ограничения на функцию $f(\alpha)$ будут даны ниже.

Предложение 1.2. *Если выполнены свойства* (1.8), (1.9) *и*

$$\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) = \Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) = \Gamma_1(\alpha), \tag{1.10}$$

то система (1.1), (1.2) *имеет гладкий первый интеграл вида*

$$\Phi_2(v; Z_2, Z_1; \alpha) = v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\,\delta(\alpha) = C_2 = \text{const}, \tag{1.11}$$

при этом функция $\delta(\alpha)$ *должна удовлетворять равенству*

$$\delta(\alpha) = A_1 f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\},\ A_1 = \text{const}\,. \tag{1.12}$$

Доказательство. Будем искать первый интеграл в виде

$$v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\,\Phi_0(\alpha).$$

Дифференцирование последней функции в силу системы (1.1), (1.2) дает

$$v^2\Big\{\Big[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\Big]\Phi_0(\alpha) - \Phi_0'(\alpha)\Big\}Z_3\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}$$

$$- v^2 b\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)[\delta'(\alpha)\Phi_0(\alpha) - \delta(\alpha)\Phi_0'(\alpha)].$$

Для того, чтобы эта производная тождественно равнялась нулю, достаточно, чтобы функция $\Phi_0(\alpha)$ удовлетворяла обыкновенному уравнению

$$\Phi_0'(\alpha) = \Big[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\Big]\Phi_0(\alpha),$$

а также было выполнено тождество

$$\delta'(\alpha)\Phi_0(\alpha) \equiv \delta(\alpha)\Phi_0'(\alpha).$$

Но для этого, в свою очередь, достаточно выполнения свойства (1.12) и равенства функций $\Phi_0(\alpha)$ и $\delta(\alpha)$ с точностью до множителя. Предложение доказано. □

Аналогичным образом доказываются и два следующих утверждения.

Предложение 1.3. *Если выполнено свойство* (1.8), *при этом справедливо условие*

$$\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) = \Gamma_2(\beta_1), \tag{1.13}$$

а также второе равенство из (1.10) ($\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) = \Gamma_1(\alpha)$) *и* (1.12), *то система* (1.1), (1.2) *имеет гладкий первый интеграл вида*

$$\Phi_3(v; Z_1; \alpha, \beta_1) = v^2 Z_1 \delta(\alpha)\Phi(\beta_1) = C_3 = \mathrm{const}, \tag{1.14}$$

где

$$\Phi(\beta_1) = g(\beta_1)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{01}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)db\right\}.$$

Предложение 1.4. *Пусть выполнено свойство* (1.8) *и*

$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) = \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1) = \Gamma_3(\alpha). \tag{1.15}$$

Тогда система (1.1), (1.2) *имеет гладкий первый интеграл вида*

$$\Phi_0(v; Z_3; \alpha) = v^2(1 - 2bZ_3\delta(\alpha)) = C_0 = \mathrm{const}, \tag{1.16}$$

если функция $\delta(\alpha)$ *удовлетворяет равенству*

$$\delta(\alpha) = A_2\exp\left\{-\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_3(b)db\right\},\ A_2 = \mathrm{const}\,.$$

В частности, если выполнены свойства (1.6), (1.8), (1.10), (1.12), (1.15), то система (1.1), (1.2) имеет гладкий первый интеграл вида (1.16).

Предложение 1.5. *Если выполнены условия* (1.8)–(1.10), (1.12), *то система* (1.1), (1.2) *имеет первый интеграл вида*

$$\Phi_4(\beta_1, \beta_2, C_2, C_3) = \beta_2 + \int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1}\frac{C_3^2 g(b)}{C_2^2\Phi^2(b) - C_3^2}\ db = C_4 = \mathrm{const}, \tag{1.17}$$

где, после взятия интеграла (1.17), *вместо постоянных* C_2, C_3 *можно подставить левые части равенств* (1.11), (1.14) *соответственно.*

Доказательство. Данное предложение вытекает из предложений 1.2, 1.3 и использовании явных видов первых интегралов (1.11) и (1.14). □

Прямым следствием предложений 1.1–1.5 является основная теорема данного раздела.

Теорема 1.1. *Если выполнены условия* (1.6), (1.8)–(1.10), (1.12), (1.15), *то система* (1.1), (1.2) *обладает полным набором* (*пятью*) *гладких независимых первых интегралов вида* (1.7), (1.11), (1.14), (1.16), (1.17).

2. Введение внешнего силового поля и унимодулярные преобразования для систем седьмого порядка

Модифицируем систему (1.1), (1.2) при условиях (1.8)–(1.10), (1.13), (1.15) при наличии двух ключевых параметров $b, b_1 \geqslant 0$, введя внешнее силовое поле. Если ввести такое поле, добавив коэффициент $F(\alpha)$ лишь в уравнение на Z_3' системы (2.1), (2.2) и даже положив при этом $b_1 = 0$, то полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность будет при дополнительном условии: $b = 0$. Но мы расширим введение силового поля, положив $b_1 > 0$. Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения $T^*M^3\{Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ примет вид

$$v' = \Psi(\alpha, Z)v, \tag{2.1}$$

$$
\begin{aligned}
&\alpha' = -Z_3 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\widetilde{f}(\alpha),\\
&Z_3' = F(\alpha) + \Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) Z_2^2 + \Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) Z_1^2 - Z_3\Psi(\alpha, Z),\\
&Z_2' = \Big[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\Big] Z_2 Z_3 - \Gamma_{22}^1(\alpha,\beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z),\\
&Z_1' = \Big[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\Big] Z_1 Z_3 - \Big[2\Gamma_2(\beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\Big] f(\alpha) Z_1 Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z),\\
&\beta_1' = Z_2 f(\alpha),\\
&\beta_2' = Z_1 f(\alpha) g(\beta_1),
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

где

$$
\Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\widetilde{\delta}(\alpha) + b_1 F(\alpha)\delta(\alpha), \quad \widetilde{f}(\alpha) = \frac{\mu - \delta^2(\alpha)}{\widetilde{\delta}(\alpha)},
$$

$\mu = \text{const}$. При этом коэффициенты консервативной (внутренней) составляющей силового поля содержат параметр b, а неконсервативной составляющей внешнего поля — параметр b_1.

Силовое поле в уравнениях на v', Z_1', Z_2', Z_3' определяется функцией $\Psi(\alpha, Z)$. Опишем введение силового поля в виде двумерного столбца, в первой строке которого стоят соответствующие коэффициенты из функции $\Psi(\alpha, Z)$, а во второй строке — соответствующие коэффициенты из уравнения на α'. Таким образом, совместное силовјe поле (в котором присутствуют три параметра $b, b_1 \geqslant 0$, $\mu \in \mathbf{R}$) будет иметь вид

$$
U \begin{pmatrix} b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \\ b_1 F(\alpha) \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} -\widetilde{\delta}(\alpha) & \delta(\alpha) \\ \delta(\alpha) & \widetilde{f}(\alpha) \end{pmatrix},
$$

где U — преобразование с определителем, равным $-\mu$, и являющимся унимодулярным преобразованием при $\mu = \pm 1$. Такое преобразование вносит в систему диссипацию (как одного знака, так и другого).

3. Интегрирование системы седьмого порядка с диссипацией

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы седьмого порядка (2.1), (2.2) при выполнении свойства (1.9). Она также допускает отделение независимой подсистемы пятого порядка.

Введем также (по аналогии с (1.9)) ограничение и на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять преобразованному первому равенству из (1.6):

$$
2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) \equiv 0. \tag{3.1}
$$

Для полного интегрирования системы (2.2) необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных

$$
Z_1, Z_2 \to Z_0, Z_*, \ Z_0 = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}, \ Z_* = \frac{Z_2}{Z_1},
$$

система (2.2) распадается следующим образом:

$$
\begin{cases}
\alpha' = -Z_3 + b(Z_3^2 + Z_0^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\widetilde{f}(\alpha),\\
Z_3' = F(\alpha) + \Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) Z_0^2 - Z_3\Psi(\alpha, Z),\\
Z_0' = \Big[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\Big] Z_0 Z_3 - Z_0\Psi(\alpha, Z),
\end{cases}
\tag{3.2}
$$

$$\begin{cases} Z'_* = \pm Z_0\sqrt{1+Z_*^2} f(\alpha)\Big[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\Big], \\ \beta'_1 = \pm \dfrac{Z_0 Z_*}{\sqrt{1+Z_*^2}} f(\alpha), \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\beta'_2 = \pm \frac{Z_0}{\sqrt{1+Z_*^2}} f(\alpha) g(\beta_1), \tag{3.4}$$

где

$$\Psi(\alpha, Z) = -b(Z_3^2 + Z_0^2)\widetilde{\delta}(\alpha) + b_1 F(\alpha)\delta(\alpha),\ \ \widetilde{f}(\alpha) = \frac{\mu - \delta^2(\alpha)}{\widetilde{\delta}(\alpha)}.$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (2.2) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (3.2), один — системы (3.3), и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (3.4) (т.е. всего четыре).

Теорема 3.1. *Пусть для некоторых $\varkappa, \lambda \in \mathbf{R}$ выполняются равенства*

$$\begin{aligned} \Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) &= \varkappa \frac{d}{d\alpha} \ln|\delta(\alpha)|, \\ F(\alpha) &= \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{\delta^2(\alpha)}{2}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Тогда система (2.1), (2.2) *при выполнении свойств* (1.9), (3.1) *обладает пятью независимыми* (*вообще говоря, трансцендентными* **[6]**–**[8]** *в смысле комплексного анализа*) *первыми интегралами.*

Доказательство. Для начала сопоставим рассматриваемой подсистеме третьего порядка (3.2) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{dZ_3}{d\alpha} &= \frac{F(\alpha) + \Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) Z_0^2 + b Z_3 (Z_3^2 + Z_0^2)\widetilde{\delta}(\alpha) - b_1 Z_3 F(\alpha)\delta(\alpha)}{-Z_3 + b(Z_3^2 + Z_0^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\widetilde{f}(\alpha)}, \\ \frac{dZ_0}{d\alpha} &= \frac{\Big[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\Big] Z_0 Z_3 + b Z_0 (Z_3^2 + Z_0^2)\widetilde{\delta}(\alpha) - b_1 Z_0 F(\alpha)\delta(\alpha)}{-Z_3 + b(Z_3^2 + Z_0^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\widetilde{f}(\alpha)}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$Z_0 = u_1 \delta(\alpha),\ \ Z_3 = u_2 \delta(\alpha), \tag{3.7}$$

пользуясь (3.5), приводим систему (3.6) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \delta \frac{du_2}{d\delta} + u_2 &= \frac{\lambda + b u_2 (u_1^2 + u_2^2)\delta^2 - b_1 \lambda u_2 \delta^2 + \varkappa u_1^2}{-u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\delta^2 + b_1 \lambda(\mu - \delta^2)}, \\ \delta \frac{du_1}{d\delta} + u_1 &= \frac{b u_1 (u_1^2 + u_2^2)\delta^2 - b_1 \lambda u_1 \delta^2 - \varkappa u_1 u_2}{-u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\delta^2 + b_1 \lambda(\mu - \delta^2)}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

В дальнейшем система (3.8) приводится к уравнению первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda - b_1 \lambda \mu u_2 + u_2^2 + \varkappa u_1^2}{(1 - \varkappa) u_1 u_2 - b_1 \lambda \mu u_1}. \tag{3.9}$$

Уравнение (3.9) имеет вид уравнения Абеля. Для примера, при $\varkappa = -1$ оно имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 - b_1 \lambda \mu u_2 + \lambda}{u_1} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{3.10}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(Z_3, Z_0; \alpha) = G_1\Big(\frac{Z_3}{\delta(\alpha)}, \frac{Z_0}{\delta(\alpha)}\Big) = \frac{Z_3^2 + Z_0^2 - b_1 \lambda \mu Z_3 \delta(\alpha) + \lambda \delta^2(\alpha)}{Z_0 \delta(\alpha)} = C_1 = \mathrm{const}\,. \tag{3.11}$$

В общем случае первые интегралы выписываются громоздко. В частности, если $\varkappa = -1$, то явный вид одного из первых интегралов только что приведен.

При помощи интеграла (3.11) получается и дополнительный первый интеграл для системы (2.2), который имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(Z_3, Z_0; \alpha) = G_2\Big(\delta(\alpha), \frac{Z_3}{\delta(\alpha)}, \frac{Z_0}{\delta(\alpha)}\Big) = C_2 = \mathrm{const}\,. \tag{3.12}$$

Выражение первого интеграла (3.12) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\delta(\alpha)$. Например, при $\varkappa = -1$ этот первый интеграл найдется из уравнения Бернулли

$$\frac{d\delta}{du_2} = \frac{(b_1\lambda\mu - u_2)\delta + b\delta^3(U^2(C_1, u_2) + u_2^2) - b_1\lambda\delta^3}{\lambda - b_1\lambda\mu u_2 + u_2^2 - U^2(C_1, u_2)},$$

$$U(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\Big\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(\lambda - b_1\lambda\mu u_2 + u_2^2)}\Big\},\ u_2 = \frac{Z_3}{\delta(\alpha)}.$$

При этом после взятия этого интеграла вместо C_1 можно подставить левую часть равенства (3.11).

Первый интеграл для независимой (после замены независимого переменного) подсистемы (3.3) будет иметь вид

$$\Theta_3(Z_*; \beta_1) = \frac{\sqrt{1 + Z_*^2}}{\Phi(\beta_1)} = C_3 = \mathrm{const}, \tag{3.13}$$

о функции $\Phi(\beta_1)$ см. (1.14). А дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (3.4), находится по аналогии с (1.17):

$$\Theta_4(\beta_1, \beta_2, C_3) = \beta_2 \pm \int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1} \frac{g(b)}{C_3^2\Phi^2(b) - 1}\, db = C_4 = \mathrm{const},$$

при этом после взятия этого интеграла вместо C_3 можно подставить левую часть равенства (3.13).

Кроме того, у системы (2.1), (2.2) существует гладкий первый интеграл (по аналогии с (1.16), “привязывающий” уравнение (1.1)), который, например, при $b = b_1$, $\mu = 1$ примет вид

$$\Theta_0(v; Z_3, Z_0; \alpha) = v^2(1 - 2bZ_3\delta(\alpha) + b^2(Z_3^2 + Z_0^2)) = C_0 = \mathrm{const}\,.$$

□

Справедлива и теорема, обратная к теореме 3.1.

Теорема 3.2. *Условия* (1.9), (3.1), (3.5) (*например, при* $\varkappa = -1$) *являются необходимыми условиями существования первого интеграла* (3.11) *для системы* (2.1), (2.2).

4. Строение первых интегралов для систем седьмого порядка с диссипацией

Если α — периодическая координата периода 2π, то система (2.1), (2.2) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним. При этом при $F(\alpha) \equiv 0$ она превращается в систему консервативную (1.1), (1.2). Последняя, в частности, обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (1.7), (1.11). Более того, если функция $F(\alpha)$ не равна тождественно нулю, но $b_1 = 0$, то система (2.1), (2.2) при втором условии из (3.5) обладает первым интегралом вида

$$\Theta_0(v; Z_3, Z_2, Z_1; \alpha) = v^2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + \lambda\delta^2(\alpha)) = \mathrm{const}\,. \tag{4.1}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (4.1), (1.11) также является первым интегралом системы (2.1), (2.2) при не равенстве функции $F(\alpha)$ тождественно нулю, но $b_1 = 0$. Но при $b_1 > 0$ каждая из функций

$$\Theta_{b_1}(v; Z_3, Z_2, Z_1; \alpha) = v^2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 - b_1\lambda\mu Z_3\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)) \tag{4.2}$$

и (1.11) по отдельности не является первым интегралом системы (2.1), (2.2). Однако отношение функций (4.2), (1.11) является первым интегралом (3.11) системы (2.1), (2.2) (при $\varkappa = -1$) при любом $b_1 > 0$.

Вообще же, как и указывалось ранее, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств.

5. Системы девятого порядка при отсутствии внешнего силового поля

Перейдем теперь к системам более высокого — девятого порядка. При этом повышение порядка проводится не так очевидно, поэтому автором принято решение достаточно подробно провести соответствующий анализ.

Пусть v, α, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $z = (z_1, \ldots, z_4)$ — фазовые переменные в системе, правые части которой — однородные полиномы степени 2 по переменным v, z (см. также [**9, 10, 11**]) с коэффициентами, зависящими от α, β. Тогда, выбирая в качестве нового времени переменную q ($dq = v dt$, $d/dq =<'>$, $v \neq 0$), будем рассматривать систему девятого порядка

$$v' = \Psi(\alpha, Z)v, \tag{5.1}$$

$$\begin{cases} \alpha' = -Z_4 + b(Z_1^2 + \ldots + Z_4^2)\delta(\alpha), \\ Z_4' = \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) f_1^2(\alpha) Z_3^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) Z_2^2 \\ \quad + \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta) f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) Z_1^2 - Z_4 \Psi(\alpha, Z), \\ Z_3' = \left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_3 Z_4 - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) Z_2^2 \\ \quad - \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta) \dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) Z_1^2 - Z_3 \Psi(\alpha, Z), \\ Z_2' = \left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_2 Z_4 - \left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1(\alpha) Z_2 Z_3 \\ \quad - \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta) \dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \dfrac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2) Z_1^2 - Z_2 \Psi(\alpha, Z), \\ Z_1' = \left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_1 Z_4 - \left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1(\alpha) Z_1 Z_3 \\ \quad - \left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] f_2(\alpha) g_1(\beta_1) Z_1 Z_2 - Z_1 \Psi(\alpha, Z), \\ \beta_1' = Z_3 f_1(\alpha), \\ \beta_2' = Z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \\ \beta_3' = Z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2) \end{cases} \tag{5.2}$$

как систему при отсутствии внешнего поля сил, где

$$\Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + \ldots + Z_4^2)\widetilde{\delta}(\alpha), \ \widetilde{\delta}(\alpha) = \frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha},$$

$Z = (Z_1, \ldots, Z_4)$, $z_s = Z_s v$, $s = 1, \ldots, 4$, $b \geqslant 0$, $\delta(\alpha)$, $f_k(\alpha)$, $k = 1,2,3$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1,2$, $h(\beta_2)$ — гладкие функции,. При этом уравнение (5.1) отделяется, что дает возможность рассматривать уравнения (5.2) в качестве независимой системы (с четырьмя степенями свободы) на восьмимерном многообразии $N^8\{Z_4, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\} = TM^4\{Z_4, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ (касательном расслоении гладкого четырехмерного многообразия $M^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ (см. также [**4, 11, 12**]).

Рассмотрим структуру системы (5.2). Она соответствует следующим уравнениям геодезических линий на касательном расслоении $TM^4\{\dot\alpha, \dot\beta_1, \dot\beta_2, \dot\beta_3; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ многообразия $M^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$

[11] (в частности, сферы или более общих поверхностей вращения — с двенадцатью ненулевыми коэффициентами связности):

$$
\begin{aligned}
&\ddot{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + \Gamma^{\alpha}_{33}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 = 0,\\
&\ddot{\beta}_1 + 2\Gamma^{1}_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma^{1}_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + \Gamma^{1}_{33}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 = 0,\\
&\ddot{\beta}_2 + 2\Gamma^{2}_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma^{2}_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \Gamma^{2}_{33}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 = 0,\\
&\ddot{\beta}_3 + 2\Gamma^{3}_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + 2\Gamma^{3}_{13}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + 2\Gamma^{3}_{23}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 = 0.
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

Действительно, выбрав новые координаты Z_1, …, Z_4 в касательном пространстве в виде

$$
\begin{aligned}
&\alpha' = -Z_4,\\
&\beta_1' = Z_3 f_1(\alpha),\\
&\beta_2' = Z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1),\\
&\beta_3' = Z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2),
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

мы получаем соотношения на них в виде (ср. с системой (5.2))

$$
\begin{aligned}
Z_1' &= \Big[2\Gamma^{3}_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\Big] Z_1 Z_4 - \Big[2\Gamma^{3}_{13}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\Big] f_1(\alpha) Z_1 Z_3\\
&- \Big[2\Gamma^{3}_{23}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\Big] f_2(\alpha) g_1(\beta_1) Z_1 Z_2,\\
Z_2' &= \Big[2\Gamma^{2}_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\Big] Z_2 Z_4 - \Big[2\Gamma^{2}_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\Big] f_1(\alpha) Z_2 Z_3\\
&- \Gamma^{2}_{33}(\alpha,\beta)\frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2) Z_1^2,\\
Z_3' &= \Big[2\Gamma^{1}_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\Big] Z_3 Z_4 - \Gamma^{1}_{22}(\alpha,\beta)\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) Z_2^2\\
&- \Gamma^{1}_{33}(\alpha,\beta)\frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) Z_1^2,\\
Z_4' &= \Gamma^{\alpha}_{11} f_1^2(\alpha) Z_3^2 + \Gamma^{\alpha}_{22} f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) Z_2^2 + \Gamma^{\alpha}_{33} f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) Z_1^2,
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

при этом уравнения (5.3) почти всюду эквивалентны совокупности (5.4), (5.5), которая, прежде всего, присутствует в системе (5.2).

Далее, в системе (5.2) также присутствуют коэффициенты при параметре $b \geqslant 0$. Но они не нарушают консервативности, поскольку система (5.1), (5.2) при некоторых естественных условиях обладает полным набором (шестью) гладких первых интегралов (то, что полный набор состоит не из восьми, а из шести первых интегралов, будет показано ниже).

Следующие утверждения для систем девятого порядка доказываются аналогично соответствующим утверждениям для систем седьмого порядка.

Предложение 5.1. *Если всюду на своей области определения справедлива система равенств*

$$
\begin{aligned}
&2\Gamma^{1}_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta) f_1^2(\alpha) \equiv 0,\\
&2\Gamma^{2}_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta) f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) \equiv 0,\\
&\Big[2\Gamma^{2}_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\Big] f_1^2(\alpha) + \Gamma^{1}_{22}(\alpha,\beta) f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) \equiv 0,\\
&2\Gamma^{3}_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{33}(\alpha,\beta) f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \equiv 0,
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

$$\left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]f_1^2(\alpha)+\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\equiv 0,$$

$$\left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)+\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\equiv 0,$$

то система (5.1), (5.2) *имеет аналитический первый интеграл вида*

$$\Phi_1(v;Z_4,\ldots,Z_1)=v^2(Z_1^2+\ldots+Z_4^2)=C_1^2=\mathrm{const}\,. \tag{5.7}$$

На первый взгляд вопрос наличия первого интеграла достаточно простого вида (5.7) не “заслуживает” решения такой достаточно сложной системы квазилинейных уравнений (5.6) (которая содержит, вообще говоря, уравнения в частных производных). В работе будет применен подход, позволяющий с помощью решения системы (5.6) успешно находить полные наборы первых интегралов систем с диссипацией.

Можно доказать отдельную теорему существования решения $f_k(\alpha)$, $k=1,2,3$, $g_l(\beta_1)$, $l=1,2$, $h(\beta_2)$ системы (5.6) квазилинейных уравнений для наличия аналитического первого интеграла (5.7) для системы (5.4), (5.5) уравнений геодезических (5.3). Но в дальнейшем при изучении динамических систем с диссипацией полная группа условий (5.6) нам не потребуется.

Тем не менее, в дальнейшем будем предполагать в уравнениях (5.4) выполнение условий

$$f_1(\alpha)=f_2(\alpha)=f_3(\alpha)=f(\alpha), \tag{5.8}$$

при этом функции $g_l(\beta_1)$, $l=1,2$, $h(\beta_2)$ должны удовлетворять преобразованным уравнениям из (5.6):

$$\begin{gathered}2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}+\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)g_1^2(\beta_1)\equiv 0,\\ 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}+\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\equiv 0,\\ \left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]g_1^2(\beta_1)+\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\equiv 0.\end{gathered} \tag{5.9}$$

Таким образом, функции $g_l(\beta_1)$, $l=1,2$, $h(\beta_2)$ пока зависят от коэффициентов связности через систему (5.9), а ограничения на функцию $f(\alpha)$ будут даны ниже.

Предложение 5.2. *Если выполнены свойства* (5.8), (5.9) *и*

$$\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)=\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)=\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)=\Gamma_1(\alpha), \tag{5.10}$$

то система (5.1), (5.2) *имеет гладкий первый интеграл вида*

$$\Phi_2(v;Z_3,Z_2,Z_1;\alpha)=v^2\sqrt{Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2}\,\delta(\alpha)=C_2=\mathrm{const}, \tag{5.11}$$

при этом функция $\delta(\alpha)$ *должна удовлетворять равенству*

$$\delta(\alpha)=A_1f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\},\ \ A_1=\mathrm{const}\,. \tag{5.12}$$

Предложение 5.3. *Если выполнены условия предложения* 5.2, *а также*

$$g_1(\beta_1)=g_2(\beta_1)=g(\beta_1), \tag{5.13}$$

при этом справедливы равенства

$$\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)=\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)=\Gamma_2(\beta_1), \tag{5.14}$$

то система (5.1), (5.2) *имеет гладкий первый интеграл вида*

$$\Phi_3(v;Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1)=v^2\sqrt{Z_1^2+Z_2^2}\,\delta(\alpha)\Psi_1(\beta_1)=C_3=\mathrm{const}, \tag{5.15}$$

$$\Psi_1(\beta_1)=g(\beta_1)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)db\right\}.$$

Предложение 5.4. *Если выполнены условия предложений* 5.2, 5.3 *и*

$$\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) = \Gamma_3(\beta_2), \tag{5.16}$$

то система (5.1), (5.2) *имеет гладкий первый интеграл вида*

$$\Phi_4(v; Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) = v^2 Z_1 \delta(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\Psi_2(\beta_2) = C_4 = \mathrm{const}, \tag{5.17}$$

где

$$\Psi_2(\beta_2) = h(\beta_2)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{20}}^{\beta_2}\Gamma_3(b)db\right\}.$$

Предложение 5.5. *Пусть выполнены свойства* (5.8), (5.13) *и*

$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) = \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1) = \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2) = \Gamma_4(\alpha). \tag{5.18}$$

Тогда система (5.1), (5.2) *имеет гладкий первый интеграл вида*

$$\Phi_0(v; Z_4; \alpha) = v^2(1 - 2bZ_4\delta(\alpha)) = C_0 = \mathrm{const}, \tag{5.19}$$

если функция $\delta(\alpha)$ *удовлетворяет равенству*

$$\delta(\beta_1) = A_2\exp\left\{-\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1}\Gamma_4(b)f^2(b)db\right\},\ A_2 = \mathrm{const}\,.$$

В частности, если выполнены свойства (5.6), (5.8), (5.10), (5.12), (5.13), (5.18), то система (5.1), (5.2) имеет гладкий первый интеграл вида (5.19).

Предложение 5.6. *Если выполнены условия предложений* 5.3, 5.4, *то система* (5.1), (5.2) *имеет гладкий первый интеграл вида*

$$\Phi_5(\beta_2, \beta_3, C_3, C_4) = \beta_3 + \int\limits_{\beta_{20}}^{\beta_2}\frac{C_4 h(b)}{\sqrt{C_3^2\Psi_2^2(b) - C_4^2}}\,db = C_5 = \mathrm{const}, \tag{5.20}$$

где, после взятия интеграла (5.20), *вместо постоянных* C_3, C_4 *можно подставить левые части равенств* (5.15), (5.17) *соответственно.*

Прямым следствием предложений 5.1–5.6 является основная теорема данного раздела.

Теорема 5.1. *Если выполнены условия предложений* 5.1–5.6, *то система* (5.1), (5.2) *обладает полным набором* (*шестью*) *гладких независимых первых интегралов вида* (5.7), (5.11), (5.15), (5.17), (5.19), (5.20).

6. Введение внешнего силового поля и унимодулярные преобразования для систем девятого порядка

Модифицируем систему (5.1), (5.2) при условиях (5.8), (5.10), (5.13), (5.14) (5.16), (5.18) при наличии двух ключевых параметров $b, b_1 \geqslant 0$, введя внешнее силовое поле. Если ввести такое поле, добавив коэффициент $F(\alpha)$ лишь в уравнение на Z_4' системы (6.1), (6.2) и даже положив при этом $b_1 = 0$, то полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность будет при дополнительном условии: $b = 0$. Но мы расширим введение силового поля, положив $b_1 > 0$. Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения $T^*M^4\{Z_4, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ примет вид

$$v' = \Psi(\alpha, Z)v, \tag{6.1}$$

$$
\begin{aligned}
&\alpha' = -Z_4 + b(Z_1^2 + \ldots + Z_4^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\widetilde{f}(\alpha),\\
&Z_4' = F(\alpha) + \Gamma_4 f^2(\alpha) Z_3^2 + \Gamma_4 f^2(\alpha) Z_2^2 + \Gamma_4 f^2(\alpha) Z_1^2 - Z_4 \Psi(\alpha, Z),\\
&Z_3' = \Big[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\Big] Z_3 Z_4 - \Gamma_{22}^1(\alpha,\beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) Z_2^2\\
&\quad - \Gamma_{33}^1(\alpha,\beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) Z_1^2 - Z_3\Psi(\alpha, Z),\\
&Z_2' = \Big[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\Big] Z_2 Z_4 - \Big[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\Big] f(\alpha) Z_2 Z_3\\
&\quad - \Gamma_{33}^2(\alpha,\beta) f(\alpha) g(\beta_1) h^2(\beta_2) Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z),\\
&Z_1' = \Big[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\Big] Z_1 Z_4 - \Big[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\Big] f(\alpha) Z_1 Z_3\\
&\quad - \Big[2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\Big] f(\alpha) g(\beta_1) Z_1 Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z),\\
&\beta_1' = Z_3 f(\alpha),\\
&\beta_2' = Z_2 f(\alpha) g(\beta_1),\\
&\beta_3' = Z_1 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2),
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

где

$$
\Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + \ldots + Z_4^2)\widetilde{\delta}(\alpha) + b_1 F(\alpha)\delta(\alpha),\ \ \widetilde{f}(\alpha) = \frac{\mu - \delta^2(\alpha)}{\widetilde{\delta}(\alpha)},
$$

$\mu = \mathrm{const}$. При этом коэффициенты консервативной (внутренней) составляющей силового поля содержат параметр b, а неконсервативной составляющей внешнего поля — параметр b_1.

Силовое поле в уравнениях на v', Z_1', ..., Z_4' определяется функцией $\Psi(\alpha, Z)$. Опишем введение силового поля в виде двумерного столбца, в первой строке которого стоят соответствующие коэффициенты из функции $\Psi(\alpha, Z)$, а во второй строке — соответствующие коэффициенты из уравнения на α'. Таким образом, совместное силовое поле (в котором присутствуют три параметра $b, b_1 \geqslant 0$, $\mu \in \mathbf{R}$) будет иметь вид

$$
U\begin{pmatrix} b(Z_1^2 + \ldots + Z_4^2) \\ b_1 F(\alpha) \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} -\widetilde{\delta}(\alpha) & \delta(\alpha) \\ \delta(\alpha) & \widetilde{f}(\alpha) \end{pmatrix},
$$

где U — преобразование с определителем, равным $-\mu$, и являющимся унимодулярным преобразованием при $\mu = \pm 1$. Такое преобразование вносит в систему диссипацию (как одного знака, так и другого; см. также [**13**]).

7. Интегрирование системы девятого порядка с диссипацией

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы девятого порядка (6.1), (6.2) при выполнении свойства (5.9). Она также допускает отделение независимой подсистемы седьмого порядка.

Введем также (по аналогии с (5.9)) ограничение и на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять преобразованному первому равенству из (5.6):

$$
2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_4(\alpha) f^2(\alpha) \equiv 0. \tag{7.1}
$$

Для полного интегрирования системы (6.2) необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных

$$
w_4 = Z_4,\ w_3 = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2},\ w_2 = \frac{Z_2}{Z_1},\ w_1 = \frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}},
$$

система (6.2) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \alpha' = -Z_4 + b(w_4^2 + w_3^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\widetilde{f}(\alpha), \\ w_4' = F(\alpha) + \Gamma_4(\alpha) f^2(\alpha) w_3^2 - w_4 \Psi(\alpha, w), \\ w_3' = \Big[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha}\Big] w_3 w_4 - w_3 \Psi(\alpha, w), \end{cases} \tag{7.2}$$

$$\begin{cases} w_2' = \pm w_3 \sqrt{1 + w_2^2} f(\alpha) g(\beta_1) \Big[2\Gamma_3(\beta_2) + \dfrac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2}\Big], \\ \beta_2' = \pm \dfrac{w_2 w_3}{\sqrt{1 + w_2^2}} f(\alpha) g(\beta_1), \end{cases} \tag{7.3}$$

$$\begin{cases} w_1' = \pm w_3 \sqrt{1 + w_1^2} f(\alpha) \Big[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1}\Big], \\ \beta_1' = \pm \dfrac{w_1 w_3}{\sqrt{1 + w_1^2}} f(\alpha), \end{cases} \tag{7.4}$$

$$\beta_3' = \pm \frac{w_3}{\sqrt{1 + w_2^2}} f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2), \tag{7.5}$$

где

$$\Psi(\alpha, w) = -b(w_4^2 + w_3^2)\widetilde{\delta}(\alpha) + b_1 F(\alpha)\delta(\alpha), \;\; \widetilde{f}(\alpha) = \frac{\mu - \delta^2(\alpha)}{\widetilde{\delta}(\alpha)}.$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (6.2) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (7.2), по одному — для систем (7.3) и (7.4) (после соответствующих замен независимых переменных), и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (7.5) (т.е. всего пять).

Теорема 7.1. *Пусть для некоторых $\varkappa, \lambda \in \mathbf{R}$ выполняются равенства*

$$\Gamma_4(\alpha) f^2(\alpha) = \varkappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\delta(\alpha)|, \;\; F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{\delta^2(\alpha)}{2}. \tag{7.6}$$

Тогда система (6.1), (6.2) *при выполнении свойств* (5.9), (7.1) *обладает шестью независимыми* (*вообще говоря, трансцендентными в смысле комплексного анализа*) *первыми интегралами.*

Первое равенство из (7.6) можно назвать геометрическим, а второе — энергетическим.

Доказательство. Для начала сопоставим рассматриваемой подсистеме третьего порядка (7.2) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{dw_4}{d\alpha} &= \frac{F(\alpha) + \Gamma_4(\alpha) f^2(\alpha) w_3^2 + b w_4 (w_4^2 + w_3^2)\widetilde{\delta}(\alpha) - b_1 w_4 F(\alpha)\delta(\alpha)}{-w_4 + b(w_4^2 + w_3^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\widetilde{f}(\alpha)}, \\ \frac{dw_3}{d\alpha} &= \frac{\Big[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha}\Big] w_3 w_4 + b w_3 (w_4^2 + w_3^2)\widetilde{\delta}(\alpha) - b_1 w_3 F(\alpha)\delta(\alpha)}{-w_4 + b(w_4^2 + w_3^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\widetilde{f}(\alpha)}. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_3 = u_1 \delta(\alpha), \;\; w_4 = u_2 \delta(\alpha), \tag{7.8}$$

пользуясь (7.6), приводим систему (7.7) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \delta \frac{du_2}{d\delta} + u_2 &= \frac{\lambda + b u_2 (u_1^2 + u_2^2)\delta^2 - b_1 \lambda u_2 \delta^2 + \varkappa u_1^2}{-u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\delta^2 + b_1 \lambda (\mu - \delta^2)}, \\ \delta \frac{du_1}{d\delta} + u_1 &= \frac{b u_1 (u_1^2 + u_2^2)\delta^2 - b_1 \lambda u_1 \delta^2 - \varkappa u_1 u_2}{-u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\delta^2 + b_1 \lambda (\mu - \delta^2)}. \end{aligned} \tag{7.9}$$

В дальнейшем система (7.9) приводится к уравнению первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda - b_1\lambda\mu u_2 + u_2^2 + \varkappa u_1^2}{(1-\varkappa)u_1 u_2 - b_1\lambda\mu u_1}. \tag{7.10}$$

Уравнение (7.10) имеет вид уравнения Абеля. Для примера, при $\varkappa = -1$ оно имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 - b_1\lambda\mu u_2 + \lambda}{u_1} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{7.11}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_4, w_3; \alpha) = G_1\Big(\frac{w_4}{\delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\delta(\alpha)}\Big) = \frac{w_4^2 + w_3^2 - b_1\lambda\mu w_4\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)}{w_3\delta(\alpha)} = C_1 = \mathrm{const}\,. \tag{7.12}$$

В общем случае первые интегралы выписываются громоздко. В частности, если $\varkappa = -1$, то явный вид одного из первых интегралов только что приведен.

При помощи интеграла (7.12) получается и дополнительный первый интеграл для системы (6.2), который имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_4, w_3; \alpha) = G_2\Big(\delta(\alpha), \frac{w_4}{\delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\delta(\alpha)}\Big) = C_2 = \mathrm{const}\,. \tag{7.13}$$

Выражение первого интеграла (7.13) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\delta(\alpha)$. Например, при $\varkappa = -1$ этот первый интеграл найдется из уравнения Бернулли

$$\frac{d\delta}{du_4} = \frac{(b_1\lambda\mu - u_4)\delta + b\delta^3(U^2(C_1, u_4) + u_4^2) - b_1\lambda\delta^3}{\lambda - b_1\lambda\mu u_4 + u_4^2 - U^2(C_1, u_4)},$$

$$U(C_1, u_4) = \frac{1}{2}\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(\lambda - b_1\lambda\mu u_4 + u_4^2)}\},\ u_4 = \frac{Z_4}{\delta(\alpha)}.$$

При этом после взятия этого интеграла вместо C_1 можно подставить левую часть равенства (7.11).

Первые интегралы для независимых (после замен независимых переменных) подсистем (7.3) и (7.4) будут иметь вид

$$\Theta_{2+s}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\Phi_s(\beta_s)} = C_{2+s} = \mathrm{const},\ s = 1, 2, \tag{7.14}$$

о функциях $\Psi_s(\beta_s)$ см. (5.15), (5.17). А дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (7.5), находится по аналогии с (5.20):

$$\Theta_5(\beta_2, \beta_3, C_3, C_4) = \beta_3 \pm \int\limits_{\beta_{20}}^{\beta_2} \frac{C_4 h(b)}{C_3^2\Psi_2^2(b) - C_4^2}\, db = C_5 = \mathrm{const},$$

где, после взятия этого интеграла, вместо постоянных C_3, C_4 можно подставить соответствующие левые части равенств (7.14).

Кроме того, у системы (6.1), (6.2) существует гладкий первый интеграл (по аналогии с (5.19), “привязывающий” уравнение (5.1)), который, например, при $b = b_1$, $\mu = 1$ примет вид

$$\Theta_0(v; w_4, w_3; \alpha) = v^2(1 - 2bw_4\delta(\alpha) + b^2(w_4^2 + w_3^2)) = C_0 = \mathrm{const}\,.$$

□

Справедлива и теорема, обратная к теореме 7.1.

Теорема 7.2. *Условия* (5.9), (7.1), (7.6) (*например, при* $\varkappa = -1$) *являются необходимыми условиями существования первого интеграла* (7.12) *для системы* (6.1), (6.2).

8. Строение первых интегралов для систем девятого порядка с диссипацией

Если α — периодическая координата периода 2π, то система (6.1), (6.2) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним. При этом при $F(\alpha) \equiv 0$ она превращается в систему консервативную (5.1), (5.2). Последняя, в частности, обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (5.7), (5.11). Более того, если функция $F(\alpha)$ не равна тождественно нулю, но $b_1 = 0$, то система (6.1), (6.2) при втором условии из (7.6) обладает первым интегралом вида

$$\Theta_0(v; Z_4, \ldots, Z_1; \alpha) = v^2(Z_1^2 + \ldots + Z_4^2 + \lambda\delta^2(\alpha)) = \mathrm{const}\,. \qquad (8.1)$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (8.1), (5.11) также является первым интегралом системы (6.1), (6.2) при не равенстве функции $F(\alpha)$ тождественно нулю, но $b_1 = 0$. Но при $b_1 > 0$ каждая из функций

$$\Theta_{b_1}(v; Z_4, \ldots, Z_1; \alpha) = v^2(Z_1^2 + \ldots + Z_4^2 - b_1\lambda\mu Z_4\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)) \qquad (8.2)$$

и (5.11) по отдельности не является первым интегралом системы (6.1), (6.2). Однако отношение функций (8.2), (5.11) является первым интегралом (7.12) системы (6.1), (6.2) (при $\varkappa = -1$) при любом $b_1 > 0$.

Вообще же, как и указывалось ранее, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств.

Литература

1. М. В. Шамолин, “Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к сфере”, *Пробл. мат. анал.* **86**, 139–151 (2016).
2. М. В. Шамолин, “Интегрируемые системы с диссипацией с двумя и тремя степеням свободы”, *Пробл. мат. анал.* **94**, 91–109 (2018).
3. М. В. Шамолин, “Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия”, *Докл. РАН* **482**, No. 5, 527–533 (2018).
4. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия*, Наука, М. (1979).
5. М. В. Шамолин, “Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия”, *Докл. АН* **477**, No. 2, 168–172 (2017).
6. Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ*, Наука, М. (1987).
7. М. В. Шамолин, “Об интегрируемости в трансцендентных функциях”, *Успехи мат. наук* **53**, No. 3, 209–210 (1998).
8. М. В. Шамолин, “Случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере”, *Пробл. мат. анал.* **90**, 107–113 (2018).
9. В. В. Козлов, “Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем”, *Прикл. мат. мех.* **79**, No. 3, 307–316 (2015).
10. М. В. Шамолин, “Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией”, *Пробл. мат. анал.* **95**, 79–101 (2018).
11. М. В. Шамолин, “Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия”, *Докл. АН* **479**, No. 3, 270–276 (2018).
12. М. В. Шамолин, “Некоторые интегрируемые динамические системы третьего и пятого порядка с диссипацией”, *Пробл. мат. анал.* **97**, 155–165 (2019).
13. В. В. Трофимов, М. В. Шамолин, “Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем”, *Фундам. прикл. мат.* **16**, No. 4, 3–229 (2010).

Статья поступила в редакцию 27 октября 2019 г.