Министерство образования и науки РФ
Санкт-Петербургский государственный университет
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова
Воронежский государственный университет инженерных технологий
Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина
Воронежский государственный университет
Пермский государственный национальный исследовательский университет
Пермский национальный исследовательский политехнический университет

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ, ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

(ПМТУКТ-2019)

Сборник трудов
XII Международной конференции
Воронеж, 25–28 сентября 2019 г.

Воронеж

2019

УДК 517.94 (95, 97, 62,63), 519.17 (67, 71, 977)
С568

С568 **Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий:** сб. тр. XII междунар. конф. «ПМТУКТ-2019» / под ред. А.П. Жабко, В.В. Провоторова, Д.С. Сайко; С.- Петербург. гос. ун-т., Моск. гос. ун-т., Воронеж. гос. ун-т. инжен. технол., Военно-возд. академия (Воронеж), Воронеж. гос. ун-т., Пермск. гос. нац. исслед. ун-т, Пермск. нац. исслед. политех. ун-т. – Воронеж: ВГУИТ, 2019. – 428 с.

В сборнике представлены статьи по материалам докладов и лекций, включенных в программу XII Международной научной конференции ПМТУКТ-2019.

Тематика охватывает широкий спектр проблем прикладной математики, теории управления, дифференциальных игр, качественных методов математического моделирования в различных разделах естествознания (биология, медицина, химия), другие разделы современной прикладной математики (в том числе экономического характера). Представлены приближенные методы исследования математических моделей, компьютерные технологии в процессах управления, а также современные компьютерные технологии создания программных продуктов.

УДК 517.94 (95, 97, 62,63), 519.17 (67, 71, 977)

С568

9. Braverman E., Chatzarakis G.E., Stavroulakis I.P. Iterative oscillation tests for differential equations with several non-monotone arguments // Adv. Difference Equ. 2016:87, 18 pages.
10. Chatzarakis G.E., Öcalan Ö. Oscillation of differential equations with non-monotone retarded arguments // LMS J. Comput. Math. 2016. V.19, no.1. P. 98-104.
11. Чудинов К.М., Малыгина В.В. Об осцилляции линейных дифференциальных уравнений с несколькими запаздываниями // Вестник Перм. ун-та. 2017. №4. С.11-18.
12. Chatzarakis G.E., Purnaras I.K., Stavroulakis I.P. Oscillation tests for differential equations with deviating arguments // Adv. Math. Sci. Appl. 2018. V.27, no.1. P. 1-28.
13. Чудинов К.М. О точных достаточных условиях осцилляции решений линейных дифференциальных и разностных уравнений первого порядка с последействием // Изв. вузов. Матем. 2018. №5. С.93-98.
14. Чудинов К.М., Малыгина В.В. Признаки осцилляции решений дифференциальных уравнений первого порядка с последействием // Изв. вузов. Матем. 2019. №7. С.72-85.
15. Chudinov K. Note on oscillation conditions for first-order delay differential equations, Electron. J. Qual.Theory Differ. Equ. 2016. No.2. P.1–10.
16. Чудинов К.М. Об условиях осцилляции решений дифференциальных уравнений с последействием и обобщении теоремы Коплатадзе – Чантурия // Сиб. матем. журнал. В печати.

УДК 531.01+531.552

АВТОКОЛЕБАНИЯ ПРИ ПРОСТРАНСТВЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ВОЗДЕЙСТВИЯ СРЕДЫ НА ТВЕРДОЕ ТЕЛО С ПЕРЕДНЕЙ ЧАСТЬЮ В ВИДЕ КОНУСА

Шамолин М.В.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, г. Москва

1. Постановка задачи. Рассмотрим пространственное движение однородного осесимметричного твердого тела массы m, имеющего конусообразную переднюю часть, взаимодействующую с потоком среды в условиях струйного или отрывного обтекания (см. также [1, 2]).

Если (v,α,β) – сферические координаты вектора $\boldsymbol{v}_D$ скорости точки D (вершины конуса), то расстояние D_1N точки N приложения силы воздействия среды $\boldsymbol{S}$ определяется, для простоты, лишь одним параметром – углом атаки α, измеряемым между вектором скорости точки D и осью симметрии Dx (угол $xD\boldsymbol{v}_D$): $D_1N = R(\alpha)$. При этом угол β равен углу yD_1N (вектор $\boldsymbol{v}_D$ проектируется на прямую D_1N). Пусть $(0,y_N(\alpha,\beta),z_N(\alpha,\beta))$ – координаты точки N в системе D_1xyz, жестко связанной с телом. Силы лобового $\boldsymbol{S}_1$ и бокового $\boldsymbol{S}_2$ сопротивления будем представлять в квадратичном виде по скорости точки D: $\boldsymbol{S}_1 = \boldsymbol{S}_x = -s(\alpha)v^2\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{S}_2 = \boldsymbol{S}_y + \boldsymbol{S}_z$, $\boldsymbol{S}_y = -b(\alpha)v^2\cos\beta\,\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{S}_z = -b(\alpha)v^2\sin\beta\,\boldsymbol{e}_z$, $|\boldsymbol{v}_D| = v$, при этом векторы $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$ и $\boldsymbol{v}_D$ лежат в одной плоскости.

Таким образом, тройка функций $R(\alpha)$, $s(\alpha)$, $b(\alpha)$ определяет воздействие среды на твердое тело при пространственном движении в условиях квазистационарности [3, 4].

2. Динамическая часть уравнений движения. Если $\mathrm{diag}\{I_1,I_2,I_2\}$ – тензор инерции тела в осях D_1xyz, связанных с телом (оси D_1y и D_1z жестко связаны с перпендикулярным круговым сечением конуса, а в ось D_1x совпадает с осью симметрии тела), $\sigma = CD$, C – центр масс, $(\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3)$ – компоненты угловой скорости тела в осях D_1xyz, то динамическую часть уравнений движения можно представить в следующем виде:

$$\begin{gathered}
v^{\bullet}\cos\alpha-\alpha^{\bullet}v\sin\alpha+\Omega_2 v\sin\alpha\sin\beta-\Omega_3 v\sin\alpha\cos\beta+\sigma(\Omega_2^2+\Omega_3^2)=-s(\alpha)v^2/m,\\
v^{\bullet}\sin\alpha\cos\beta+\alpha^{\bullet}v\cos\alpha\cos\beta-\beta^{\bullet}v\sin\alpha\sin\beta+\Omega_3 v\cos\alpha-\\
-\Omega_1 v\sin\alpha\sin\beta-\sigma\Omega_1\Omega_2-\sigma\Omega_3^{\bullet}=-b(\alpha)v^2\cos\beta/m,\\
v^{\bullet}\sin\alpha\sin\beta+\alpha^{\bullet}v\cos\alpha\sin\beta+\beta^{\bullet}v\sin\alpha\cos\beta+\Omega_1 v\sin\alpha\cos\beta- \qquad (1)\\
-\Omega_2 v\cos\alpha-\sigma\Omega_1\Omega_3+\sigma\Omega_2^{\bullet}=-b(\alpha)v^2\sin\beta/m,\\
I_1\Omega_1^{\bullet}=-y_N(\alpha,\beta)b(\alpha)v^2\sin\beta+z_N(\alpha,\beta)b(\alpha)v^2\cos\beta,
\end{gathered}$$

$$I_2\Omega_2^\bullet + (I_1 - I_2)\Omega_1\Omega_3 = -z_N(\alpha,\beta)s(\alpha)v^2,\ z_N(\alpha,\beta) = R(\alpha)\sin\beta,$$
$$I_2\Omega_3^\bullet + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2 = y_N(\alpha,\beta)s(\alpha)v^2,\ y_N(\alpha,\beta) = R(\alpha)\cos\beta.$$

Система (1) имеет первый интеграл вида $\Omega_1 = \Omega_1^0$ = const, и в будем рассматривать динамику системы на нулевом его уровне:

$$\Omega_1^0 = 0. \tag{2}$$

Для определения вида тройки функций R(□), s(□), b(□) используется экспериментальная информация о свойствах струйного обтекания (см. также [5]).

Проектируя угловые скорости на подвижные оси, не связанные с телом, так, что $z_1 = \Omega_2\cos\beta + \Omega_3\sin\beta$, $z_2 = \Omega_3\cos\beta - \Omega_2\sin\beta$, и вводя новые безразмерные фазовые переменные и дифференцирование по формулам $z_i = Z_i n_0 v,\ i = 1,2$, <•> = n_0v<’>, система (1) при условии (2) приведется к следующему виду:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \tag{3}$$

$$\alpha' = -Z_2 + \mu_2(Z_1^2 + Z_2^2)\sin\alpha + \frac{\sigma}{I_2 n_0}R(\alpha)s(\alpha)\cos\alpha + \frac{1}{mn_0}[s(\alpha)\sin\alpha - b(\alpha)\cos\alpha], \tag{4}$$

$$Z_2' = \frac{1}{I_2 n_0^2}R(\alpha)s(\alpha) - Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_2\Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \tag{5}$$

$$Z_1' = Z_1 Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1\Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \tag{6}$$

$$\beta' = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{7}$$

$$\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) = -\mu_2(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha + \frac{\sigma}{I_2 n_0}R(\alpha)s(\alpha)\sin\alpha - \frac{1}{mn_0}[s(\alpha)\cos\alpha + b(\alpha)\sin\alpha],$$

при этом выбирая безразмерные параметры μ_1, μ_2, μ_3 следующим образом: $\mu_1 = 2B/mn_0$, $\mu_2 = b = \sigma n_0$, $n_0^2 = AB/I_2$, $\mu_3 = H_1 = 2b_1/mn_0$ ($B = s(0)$, $A = F'(0)$, $b_1 = b'(0)$). Уравнения (4)–(7) системы (3)–(7) образуют независимую подсистему четвертого, а уравнения (4)–(6) – третьего порядка.

3. Возможное достижение автоколебаний в системе. Для начала исследовалась устойчивость ключевого режима – пространственного прямолинейного поступательного торможения – по отношению к возмущениям угла атаки и угловой скорости, т.е. по отношению к переменным □, Z_1, Z_2. Другими словами, исследовалась устойчивость тривиального решения независимой системы третьего порядка (4)–(6) (если доопределить данную систему по непрерывности в начале координат).

В результате проведенного анализа над классом рассматриваемых систем, порожденных тремя функциональными классами функций R(□), s(□), b(□), был получен результат о рождении устойчивого предельного цикла.

Теорема. *Независимая подсистема* (4)–(6) *третьего порядка при* $\mu_3 > 2(\mu_1 + \mu_2)$ *обладает, по крайней мере, одним притягивающим автоколебательным режимом.*

Доказательство теоремы использует как технику обнаружения замкнутой фазовой характеристики из негрубого фокуса, так и численный эксперимент.

Литература

1. Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. – М.: Экзамен, 2007. 352 с.

2. Чаплыгин С.А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // В кн. Полн. собр. соч. Т. 1. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. – С. 133–135.

3. Шамолин М.В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фундам. и прикл. матем. – 2008. – Т. 14. – Вып. 3. – С. 3–237.

4. Шамолин М.В. Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем. Механ. – 1996. – № 4. – С. 57–69.

5. Шамолин М.В. Автоколебания при моделировании воздействия среды на твердое тело // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий. Сб. тр. IX междунар. конф. "ПМТУКТ-2016" (Воронеж, 20–26 сентября 2016 г.), ред. И. Л. Батаронов, А. П. Жабко, В. В. Провоторов. – Воронеж: «Научная книга», 2016. – С. 398–401.

УДК 519.71

СПЕЦИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА УДЕРЖАНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В ОКРЕСТНОСТИ НЕУСТОЙЧИВОЙ ТОЧКИ ЛАГРАНЖА

Шиманчук Д.В., Шмыров А.С., Шмыров В.А.

ФГБОУВО «Санкт-Петербургский государственный университет», г. Санкт-Петербург

Введение. Исследование космических полетов стало одним из приоритетов современной науки и техники. Наиболее важными и широко исследуемыми являются проекты, связанные с полетами в околоземном пространстве, т.к. они наиболее необходимы для решения прикладных задач, таких как, например, телетрансляция и доступ к Интернет. Также, актуальной современной проблемой стало исследование астероидной и кометной опасности. Толчком для таких исследований стали современные факты космических катастроф, в первую очередь падение фрагментов кометы Шумейкеров-Леви 9 на Юпитер в 1994 году и взрыв метеорита над Челябинском в 2012 г. В связи с этим изучение неуправляемого и управляемого движения космических аппаратов в околоземном пространстве является важным. В настоящее время разрабатывается ряд подходов к решению проблемы кометно-астероидной опасности, среди которых является наведение на него малого астероида [1] или искусственного небесного тела, движение которых заранее разработано. Одним из подходов является использование для этого точки либрации системы Солнце-Земля, с тем, чтобы малый астероид или искусственное небесное тело находились в окрестности точки либрации перед маневром. Для пребывания в окрестности неустойчивой точки [2] требуется решать проблему управления, в связи с чем задачи, рассматриваемые в работе являются актуальными при изучения проблем кометно-астероидной опасности.

Математическая модель движения. Окрестности точек либрации L_1 и L_2 системы Солнце-Земля, находятся на расстоянии порядка 1,5 млн км от цента Земли по линии, соединяющей Солнце и Землю, и также относятся к околоземному пространству. Понятие "точка либрации" или "лагранжева точка" является модельным понятием круговой ограниченной задачи трех тел. В данной работе мы исследуем управляемое орбитальное движение космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 [2]. В качестве математической модели мы используем один из вариантов уравнений Хилла для круговой ограниченной задачи трех тел. Уравнения, описывающие движения вблизи L_1 в рамках принятой математической модели имеют вид [3], [4]

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= y_1 + x_2, \quad \dot{y}_1 = -\frac{3x_1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{3}{2}}} + 2x_1 + y_2 + u;\\
\dot{x}_2 &= y_2 - x_1, \quad \dot{y}_2 = -\frac{3x_2}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{3}{2}}} - x_2 - y_1;\\
\dot{x}_3 &= y_3, \qquad\;\; \dot{y}_3 = -\frac{3x_3}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{3}{2}}} - x_3,
\end{aligned} \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$ – положение КА во вращающейся геоцентрической системе координат; $y = (y_1, y_2, y_3)$ – импульсы, а u – управление, направленное по линии Солнце-Земля. Единица